

Introduction à un domaine de recherche : Phase de non-unicité dans la percolation

Jhih-Huang LI

Sous la direction de Vincent BEFFARA

octobre 2013

Table des matières

1	Préliminaires	2
1.1	Définition du modèle	2
1.2	Quelques propriétés	3
1.3	Graphes de Cayley	5
1.4	Théorie des graphes	6
1.4.1	Constante isopérimétrique	6
1.4.2	Rayon spectral	7
1.4.3	Cycles simples et chemins sans back-tracking	8
2	Unicité du cluster infini	9
2.1	Sur un graphe transitif	9
2.2	Sur un graphe de Cayley	10
2.3	Non-unicité?!	11
3	Les graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$	12
3.1	Bornes sur p_c	12
3.2	Borne sur p_u : méthode probabiliste	13
3.3	Bornes sur p_u : méthode combinatoire	13
3.4	Conclusion	14
4	Pour aller plus loin	14
	Références	15

1 Préliminaires

1.1 Définition du modèle

La percolation est un modèle issu de la physique statistique. Sa description est très simple, contrairement aux méthodes utilisées et aux résultats obtenus, qui ont demandé des décennies à être prouvés de manière rigoureuse. Certains résultats validés par les calculs numériques ou conformes à l'intuition, souvent utilisés par les physiciens, restent toujours sans preuve mathématique.

Considérons une roche poreuse que l'on fait tremper dans l'eau. Les molécules d'eau y pénètrent en suivant le réseau cristallin de la roche. Tout ceci se déroule aléatoirement puisque l'on peut imaginer que les molécules qui constituent le réseau se déplacent localement, ce qui contraint le mouvement des molécules d'eau. Pour modéliser ce phénomène, on pourrait supposer que le réseau de la roche est un graphe assez régulier, périodique (donc infini) par exemple. On pourrait également considérer des réseaux de dimensions différentes (c'est plus rigolo), en particulier le cas planaire, dont les études sont relativement plus faciles. Les arbres sont pareillement de bons graphes à voir, puisque l'on peut avoir un maximum d'indépendance. Les graphes pour lesquels les comportements sont mieux compris sont les arbres réguliers \mathbb{T}_k , les réseaux euclidiens \mathbb{Z}^d , le réseau triangulaire planaire et le réseau hexagonal planaire.

Définition 1.1. On désigne par $G = (V, E)$ un graphe, où V est l'ensemble des sommets et $E \subset V \times V$ l'ensemble des arêtes. On ne considère ici que des graphes non orientés, c'est-à-dire tels que $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$.

Désormais, on considère un graphe $G = (V, E)$ qui est toujours non-orienté. On demande de plus qu'il soit simple (aucun sommet n'est connecté à lui-même), transitif (localement le graphe est identique partout), localement fini (chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins) et connexe (en partant d'un sommet quelconque, on peut atteindre tous les autres sommets).

La roche étant modélisée par un réseau, on mettra des aléas sur les arêtes ou les sommets, pour simuler le mouvement des molécules du réseau cristallin. En effet, chaque arête ou sommet peut avoir deux états : passant (ouvert) ou bloquant (fermé), le premier avec la probabilité p et le deuxième avec la probabilité $1 - p$, où p dépend des paramètres du système, tels que le type de molécule, la température, etc. Une configuration est alors un sous-graphe du graphe de départ, n'étant constitué que des arêtes ou des sommets ouverts. La configuration aléatoire décrite précédemment est notre *modèle de percolation* (dite de Bernoulli).

Voici la définition formelle :

Définition 1.2 (percolation de Bernoulli par arêtes). Soit $0 \leq p \leq 1$. A chaque arête $e \in E$ on associe une variable aléatoire X_e qui suit la loi Bernoulli de paramètre p , la famille $(X_e)_{e \in E}$ étant indépendante. On peut identifier la famille $(X_e)_{e \in E}$ à $\omega_p \in \Omega$ où $\Omega := \{0, 1\}^E = 2^E$, dite configuration de percolation de Bernoulli de paramètre p . Enfin, on définit la probabilité produit \mathbb{P}_p sur Ω .

Une configuration de percolation peut être vue comme un sous-graphe du graphe original, en ouvrant (gardant) les arêtes pour lesquelles $X_e = 1$ et en fermant (supprimant) les arêtes pour lesquelles $X_e = 0$.

Une fois que le modèle est établi, à quoi pourra-t-on s'intéresser? On pourra se demander si un point particulier, disons l'origine, est connecté à l'infini. Être connecté à l'infini veut dire qu'il existe un chemin ouvert aussi long que l'on veut.

Une composante connexe dans une percolation sera parfois appelée un *cluster*. On pourra s'intéresser aux tailles des clusters dans une configuration de percolation.

Définition 1.3. On définit la *probabilité de connexion* comme suit :

$$\theta^v(p) = \mathbb{P}_p(v \leftrightarrow \infty).$$

C'est la probabilité que l'on puisse atteindre l'infini en partant de v , tout en ne prenant que des arêtes ouvertes (ou des sites ouverts).

Puis on définit N_p en tant que le *nombre de composantes connexes infinies* dans la percolation. Parfois, le paramètre p est omis.

On remarque ici que, comme le graphe est transitif, la quantité $\theta^v(p)$ ne dépend pas du site v , on pourra alors noter $\theta(p)$. Et toujours grâce à la transitivité, $\theta(p) > 0$ est équivalent à $\mathbb{P}(N_p \geq 1) > 0$.

Lorsque l'on fait varier le paramètre p entre 0 et 1, on voit que de plus en plus d'arêtes sont ouvertes quand p augmente. Ceci dit que la fonction $p \mapsto \theta(p)$ est croissante. Afin de prouver ceci d'une manière rigoureuse, on utilise une méthode classique qui fait appel à un couplage avec des variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$.

On peut alors définir la quantité suivante, le *paramètre critique* entre « n'avoir aucun cluster infini » et « avoir au moins un cluster infini » :

Définition 1.4.

$$\begin{aligned} p_c &= \sup \{p \in [0, 1], \theta(p) = 0\} \\ &= \inf \{p \in [0, 1], \theta(p) > 0\}. \end{aligned}$$

La probabilité de connexion est nulle au-dessous de ce paramètre critique et est strictement positive au-dessus. Il s'appelle la *valeur critique* de percolation, et les deux comportements sont les *phases* séparées par cette valeur critique. Le régime au-dessous de p_c est dit sous-critique et celui au-dessus de p_c est dit sur-critique. Lorsque le paramètre p évolue, un phénomène dit *transition de phases* est présent en p_c .

1.2 Quelques propriétés

Ce serait bien de pouvoir calculer la valeur p_c pour un graphe transitif quelconque, mais ce n'est pas toujours facile. On peut alors se demander si la percolation n'est pas dégénérée, *i.e.* $0 < p_c < 1$. En fait, il est facile de donner une borne inférieure simple de p_c sous la condition d'avoir le degré maximal borné.

Proposition 1.5. *Si le degré maximal du graphe G est majoré par $d < \infty$, alors*

$$p_c(G) \geq \frac{1}{d-1}.$$

Cependant, il n'existe pas de condition simple pour obtenir une borne supérieure. Par exemple, si on considère l'arbre \mathbb{T}_k^n , obtenu de l'arbre k -valent \mathbb{T}_k en remplaçant chaque arête par n arêtes en série, alors la probabilité critique vaut $p_c = \sqrt[n]{1/(k-1)}$, qui peut être arbitrairement proche de 1 si n tend vers l'infini.

Dans une percolation de Bernoulli, lorsque le paramètre p est très petit, le sous-graphe est découpé en beaucoup de petits morceaux (des points lorsque $p = 0$), contrairement au cas où p est proche de 1, où le sous-graphe recouvre quasiment tout le graphe (graphe lui-même lorsque $p = 1$). Pour analyser ce phénomène en détail, on pourrait étudier la taille des composantes connexes. En particulier, en régime sous-critique, on obtient la décroissance exponentielle des clusters.

Par l'ergodicité de la percolation de Bernoulli sur un graphe transitif, l'ensemble des valeurs p.s. possibles de N est réduit à $\{0, 1, \infty\}$. Et par la monotonie de θ , on sait seulement que la phase $N = 0$ p.s. arrive avant $N = 1$ p.s. et $N = \infty$ p.s. Comment N varie-t-il avec p quand $p \geq p_c$? Est-il monotone? Bascule-t-il entre les deux phases $N = 1$ p.s. et $N = \infty$ p.s.?

Dans le cas général, ce comportement est imprévisible, alors que pour les graphes transitifs, l'évolution de N est connue. En fait, lorsque p est trop petit, on n'a aucun cluster infini. Quand on augmente petit à petit la valeur de p , soudainement, une infinité de clusters infinis se créent dans le graphe, dont chacun occupe une proportion nulle dans le graphe entier. Et enfin, tous ces clusters infinis se relient entre eux quand p est encore plus grand.

Le théorème suivant, dû à Schonmann ([Sch99]) et Häggström, Peres et Schonmann ([HPS99]), montre qu'une fois que l'unicité de cluster infini est établie, on aura l'unicité pour tous les paramètres p supérieurs.

Théorème 1.6. *Soit $0 \leq p \leq 1$. Si $N_p = 1$ p.s., alors pour tout $p' > p$, on a aussi $N_{p'} = 1$ p.s.*

Grâce à ce théorème, on peut définir une autre valeur critique de percolation :

Définition 1.7. On définit la *probabilité critique d'unicité* par

$$p_u = \inf\{p, N_p = 1 \text{ p.s.}\}.$$

Il est possible que la phase $N = \infty$ p.s. ne soit pas présente dans la percolation. On s'intéressera donc à savoir si $p_c = p_u$ ou $p_c < p_u$ et à étudier ce qui se passe lorsque $p = p_u$. (Regarder plus loin, théorème 2.2 et conjecture 2.3.) Pour séparer les deux valeurs critiques, la méthode la plus simple est de trouver une borne supérieure de p_c qui soit plus petite qu'une borne inférieure de p_u .

Afin d'étudier la percolation, de nombreuses méthodes probabilistes ont été développées, et beaucoup de propriétés, comme le couplage, l'ergodicité, la tolérance par insertion et suppression, les inégalités FKG et BK ont été découvertes. La théorie des graphes joue un rôle important aussi : constante isopérimétrique, rayon spectral, cycle simple, rayon, bout, etc.

1.3 Graphes de Cayley

On peut aussi faire des percolations sur des groupes ! Pour ce faire, on ne travaille qu'avec les groupes de type fini, c'est-à-dire ceux qui sont engendrés par un nombre fini d'éléments. A partir de ceux-là, on peut définir des graphes de Cayley, qui sont des graphes bien sympathiques, pour lesquels la percolation est bien définie.

On considère désormais Γ un groupe de type fini.

Définition 1.8. On prend S une partie génératrice de Γ . On définit le *graphe de Cayley* associé à (Γ, S) comme suit :

- un sommet est un élément de Γ ;
- l'ensemble des arêtes est $\{\{g, gs\}, \{g, gs^{-1}\}, g \in \Gamma, s \in S\}$.

Il est important de préciser la partie génératrice, puisque le graphe de Cayley en dépend comme l'illustre l'exemple ci-après.

Pour faire simple, notre groupe Γ est \mathbb{Z} ici, et on regarde les graphes de Cayley engendrés par deux parties génératrices distinctes $\{1\}$ et $\{2, 3\}$.

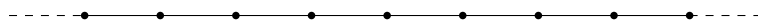


FIGURE 1 – Le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{1\})$.

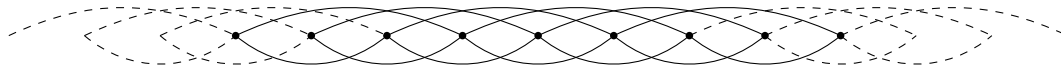


FIGURE 2 – Le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$.

Par la définition, tous les graphes de Cayley sont simples, de degré borné et connexes. De plus, l'action par multiplication à gauche fournit un sous-groupe d'automorphismes du graphe qui agit transitivement. On est bien dans le cadre établi précédemment.

Si à un groupe de type fini, on peut associer des graphes différents, y aurait-il un lien entre eux ? Autrement dit, y aurait-il des propriétés intrinsèques du groupe qui sont préservées en passant par des parties génératrices différentes ? Tout d'abord, on définit la relation d'être quasi-isométrique. Intuitivement, si deux graphes sont quasi-isométriques, ils se « ressemblent » beaucoup à grande échelle.

Définition 1.9 (quasi-isométrie). Soient (M_1, d_1) et (M_2, d_2) deux espaces métriques. Une application $f : (M_1, d_1) \rightarrow (M_2, d_2)$ est une *quasi-isométrie* de (M_1, d_1) à (M_2, d_2) s'il existe $A \geq 1, B, C \geq 0$ telles que

1. Pour tous $x, y \in M_1$, $\frac{1}{A}d_1(x, y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Ad_1(x, y) + B$.
2. Pour tout $x \in M_2$, il existe $z \in M_1$ tel que $d_2(x, f(z)) \leq C$.

Si une telle application existe, on dit que (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont *quasi-isométriques*.

On peut montrer aisément qu'« être quasi-isométriques » est une relation d'équivalence. Comme exemple concret, les espaces \mathbb{Z}^d , muni de la distance du graphe, et \mathbb{R}^d , muni de la norme euclidienne, sont quasi-isométriques pour tout d .

On a pour les groupes de type fini :

Proposition 1.10. *Deux graphes de Cayley associés à un même groupe sont quasi-isométriques, via l'application identité.*

Un résultat très joli qui n'utilise que la technique de couplage est : la propriété « $p_c < 1$ » ne dépend pas de la partie génératrice.

Proposition 1.11. *Si S_1 et S_2 sont deux différentes parties génératrices du groupe Γ , et si l'on note $G_1 = (\Gamma, S_1)$ et $G_2 = (\Gamma, S_2)$, alors*

$$p_c(G_1) < 1 \iff p_c(G_2) < 1.$$

Une technique appelée « transport de masse » s'avère très utile pour étudier la percolation de Bernoulli sur les graphes de Cayley. Elle permettra de démontrer de nombreux résultats intéressants. Elle se généralise sur les graphes unimodulaires.

1.4 Théorie des graphes

Maintenant, on va pousser plus loin dans la percolation de Bernoulli. On a besoin de quelques éléments de la théorie des graphes. On définira la constante isopérimétrique et le rayon spectral d'un graphe ainsi que les cycles simples et les chemins sans backtracking dans un graphe. Tout ceci nous permettra d'obtenir des informations sur les bornes inférieure de p_u et supérieure de p_c .

1.4.1 Constante isopérimétrique

Constante isopérimétrique donne une estimation du rapport entre la taille du bord d'un domaine et la taille du domaine.

Définition 1.12 (constante isopérimétrique). On définit la *constante isopérimétrique par arêtes* du graphe G par

$$\Phi_E(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_E A|}{|A|}, A \subset V \text{ fini}, A \neq \emptyset \right\},$$

où $\partial_E A$ désigne l'ensemble des arêtes adjacentes à A , *i.e.*

$$\partial_E A = \{(x, y) \in A \times A^c \text{ ou } A^c \times A\}.$$

Et la *constante isopérimétrique par sites* par

$$\Phi_V(G) = \inf \left\{ \frac{|\partial_V K|}{|K|}, K \subset V \text{ fini}, K \neq \emptyset \right\},$$

où $\partial_V K$ désigne l'ensemble des sites voisins de K , *i.e.*

$$\partial_V K = \{x \notin K, \exists y \in K, x \sim y\}.$$

On remarque que $\Phi_V \leq \Phi_E$ est toujours vraie. De plus, si le degré de G est majoré par d , alors $\Phi_E \leq d\Phi_V$.

Les constantes isomérimétriques des graphes suivants se calculent facilement :

1. Pour tout $d \geq 1$, $\Phi_E(\mathbb{Z}^d) = \Phi_V(\mathbb{Z}^d) = 0$.
2. Pour tout $k \geq 2$, $\Phi_E(\mathbb{T}_k) = \Phi_V(\mathbb{T}_k) = k - 2$.

La proposition suivante donne une borne supérieure pour p_c . Ce résultat a été prouvé par Benjamini et Schramm dans [BS96].

Proposition 1.13. *Si on fait une percolation de Bernoulli par sites ou par arêtes sur G , alors*

$$p_c^{\text{sites}}(G) \leq \frac{1}{\Phi_V(G) + 1} \quad \text{et} \quad p_c^{\text{arêtes}}(G) \leq \frac{1}{\Phi_E(G) + 1}$$

1.4.2 Rayon spectral

Le rayon spectral est défini par la plus grande valeur propre de la matrice de transition donnée par la marche aléatoire simple symétrique.

Définition 1.14 (rayon spectral). Soit $o \in V$. On définit une marche aléatoire simple symétrique partant de o , notée X_n . Le rayon spectral du graphe est défini à partir de la probabilité de retour de cette marche, plus précisément,

$$\rho(G) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = o)^{1/n}.$$

Si le graphe n'est pas biparti, alors $\rho(G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_o(X_n = o)^{1/n}$ car $(-\log a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le lemme sous-additif (tous les a_n sont strictement positifs pour n grand).

Savoir calculer le rayon spectral du produit cartésien de deux graphes nous sera utile :

Proposition 1.15 (rayon spectral du produit). *Soient G_1, G_2 deux graphes transitifs de degré d_1, d_2 respectivement. On note $G_1 \times G_2$ le graphe produit muni de la structure cartésienne, *i.e.**

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in G_1 \times G_2, \\ x \sim y \Leftrightarrow (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \overset{G_2}{\sim} y_2) \text{ ou } (x_1 \overset{G_1}{\sim} y_1 \text{ et } x_2 = y_2). \end{aligned}$$

On a

$$\rho(G_1 \times G_2) = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \rho(G_1) + \frac{d_2}{d_1 + d_2} \rho(G_2).$$

En particulier, ceci nous donne le rayon spectral des graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ dont on se servira plus tard :

Pour tout $k \geq 2$,

$$\rho(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) = \frac{2\sqrt{k-1} + 2}{k+2}, \quad (1.1)$$

$$\text{car } \rho(\mathbb{T}_k) = \frac{2\sqrt{k-1}}{k}.$$

1.4.3 Cycles simples et chemins sans back-tracking

L'étude des cycles simples et des chemins sans back-tracking permettra de donner une borne inférieure sur p_u , ceci est très bien présenté dans le livre en rédaction de Lyons et Peres [LP05].

Définition 1.16. Dans un graphe G transitif, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(G) = |\{\text{cycles simples de longueur } n \text{ contenant } O\}|.$$

Puis,

$$\gamma(G) = \limsup a_n(G)^{1/n}.$$

Le théorème suivant donne une borne inférieure de p_u en fonction de la constante γ .

Théorème 1.17. *Pour une percolation par sites dans un graphe G transitif, on a $p_u(G) \geq 1/\gamma(G)$.*

Par conséquent, il faudrait trouver une borne supérieure de γ aussi bonne que l'on peut pour ne pas trop s'écarter de p_u . Une majoration assez grossière est donnée par $\rho(G)d$.

Afin d'obtenir une meilleure majoration de γ , on pourrait regarder les chemins sans back-tracking, *i.e.* les chemins qui ne reviennent pas en arrière. En particulier, les cycles simples sont des cycles sans back-tracking.

Définition 1.18. Dans un graphe G , un chemin est dit *sans back-tracking* si aucune arête n'est suivie par la même arête parcourue dans le sens opposé. On note

$$b_n(G) = |\{\text{cycles sans back-tracking contenant } o\}|$$

et on définit la cocroissance de G , $\text{cogr}(G) = \limsup b_n(G)^{1/n}$.

Estimer (ou majorer) le nombre de cycles sans back-tracking donnera une meilleure borne inférieure de p_u . Son étude est relativement plus facile que celle des cycles simples parce que sa fonction génératrice se calcule plutôt facilement, et donc donne une formule exacte de la cocroissance.

Proposition 1.19 (formule de cocroissance). *Si G est un graphe connexe d -valent, alors*

$$\text{cogr}(G) > \sqrt{d-1} \Leftrightarrow \rho(G) > \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \quad (1.2)$$

et dans ce cas-là,

$$d\rho(G) = \frac{d-1}{\text{cogr}(G)} + \text{cogr}(G). \quad (1.3)$$

Si (1.2) n'est pas vraie, alors

$$\rho(G) = \frac{2\sqrt{d-1}}{d}, \text{cogr}(G) \leq \sqrt{d-1}.$$

2 Unicité du cluster infini

2.1 Sur un graphe transitif

Dans les graphes dits moyennables, la phase de non-unicité ne peut pas être présente dans la percolation de Bernoulli. Un graphe est dit moyennable si le rapport entre la taille du bord d'une partie finie et celle de la partie elle-même est petit lorsque cette partie finie devient de plus en plus grande. Plus formellement,

Définition 2.1. Un graphe transitif est dit *moyennable par arêtes* si $\Phi_E(G) = 0$ et *moyennable par sites* si $\Phi_V(G) = 0$. Si le graphe est moyennable, une suite (F_n) telle que $\frac{|\partial F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0$ est appelée *suite de Følner*.

Un résultat assez surprenant a été démontré par Burton et Keane (voir théorème 2.2) : la percolation de Bernoulli sur les graphes connexes, localement finis, transitifs et moyennables ne possède que deux phases : une phase où aucun cluster infini n'est présent et une phase où le cluster infini est unique. La réciproque a été conjecturée par Benjamini et Schramm dans [BS96] : si le graphe n'est pas moyennable, alors il existe une phase intermédiaire, où un nombre infini de clusters infinis co-existent.

Ils l'ont prouvée dans [BS01] lorsque le graphe non-moyennable peut se plonger dans le plan hyperbolique. A part ceci, on n'a eu que des réponses partielles. En particulier, le paragraphe 3 sera consacré à l'étude des graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ (produit euclidien), et le meilleur résultat que l'on puisse obtenir à ce jour dit que la conjecture est vraie pour $k \geq 4$ (voir tableau 1).

Théorème 2.2. *Si le graphe G est moyennable par arêtes, alors dans la percolation par arêtes de Bernoulli sur G , la phase de non-unicité ne peut pas exister. En particulier, $p_c(G) = p_u(G)$.*

Que se passe-t-il lorsque le graphe n'est pas moyennable ? Par exemple, si le graphe considéré est \mathbb{T}_k avec $k \geq 3$, alors par les résultats sur le processus de Galton-Watson, on sait que $p_c = 1/(k-1)$ et $p_u = 1$. Il existe dans ce cas-là une phase où un nombre infini de clusters co-existent.

Intuitivement, si notre graphe croît « suffisamment vite », on peut placer beaucoup de clusters infinis dans le graphe, sans pour autant qu'ils se connectent entre eux. Plus précisément, Benjamini et Schramm ont conjecturé la réciproque du théorème d'unicité 2.2 dans [BS96].

Conjecture 2.3. Pour tout graphe transitif et non moyennable, on a $p_c < p_u$.

Pour l'instant, on ne sait que très peu de chose dans ce genre de percolation. On a une réponse partielle donnée par Pak et Smirnova-Nagnibeda dans [PSN00] sur les graphes de Cayley (proposition 2.9). Dans l'article de Thom [Tho13] publié en 2013, le résultat a été amélioré. Il s'avère aussi que la technique de transport de masse est très utile dans les graphes transitifs, non moyennables et unimodulaires.

Dans la première section, on a défini la percolation de Bernoulli sur un graphe puis la percolation de Bernoulli sur un groupe de type fini. Ici, on va voir comment les propriétés probabilistes sont reliées aux propriétés algébriques.

2.2 Sur un graphe de Cayley

La définition d'un groupe moyennable fait intervenir un de ses graphes de Cayley.

Définition 2.4 (groupe moyennable). Un groupe Γ de type fini est dit *moyennable* s'il existe S une partie génératrice finie telle que (Γ, S) soit un graphe moyennable.

L'exemple le plus simple qu'on puisse donner comme groupes moyennables est un groupe abélien.

On fournit ci-dessous la définition de moyennabilité dans la théorie des groupes qui est en fait équivalente à celle donnée précédemment.

Définition 2.5. On désigne par $\ell^\infty(\Gamma)$ l'espace Banach muni de $\|\cdot\|_\infty$:

$$\ell^\infty(\Gamma) = \{f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bornées} \}.$$

Une application linéaire μ sur $\ell^\infty(\Gamma)$ est appelée une *moyenne* si $\mu(\mathbb{1}) = 1$ et pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ positive, $\mu(f) \geq 0$. Si $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et $\gamma \in \Gamma$, on écrit $(L_s f)(\gamma) := f(s^{-1}\gamma)$. On dit qu'une moyenne μ est invariante si $\mu(L_\gamma f) = \mu(f)$ pour toute $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ et tout $\gamma \in \Gamma$. Enfin, on dit que Γ est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante sur $\ell^\infty(\Gamma)$.

En passant par la définition de la théorie des groupes, on peut montrer facilement que si Γ est moyennable, alors pour toute S partie génératrice finie de G , (Γ, S) est aussi moyennable.

Dire qu'un groupe n'est pas moyennable est équivalent à dire que sa constante isopérimétrique pour tout graphe de Cayley est strictement positive. Ceci dit que le groupe croît exponentiellement (*i.e.* la boule $B(o, n)$ croît exponentiellement en n). Mais attention, la réciproque est fautive ! Un fameux contre-exemple est le groupe d'allumeur de réverbères défini ci-après, qui est moyennable et de croissance exponentielle.

Tout d'abord, on donne une idée de ce à quoi ressemble ce groupe d'allumeur de réverbères. Sur chaque site de \mathbb{Z} se trouve un réverbère éteint à l'instant initial. Un allumeur part de l'origine et se promène sur l'axe \mathbb{Z} , et il est autorisé à allumer ou éteindre le réverbère correspondant à sa position. On appelle le groupe d'allumeur de réverbères celui engendré par ces opérations. Voici la définition formelle :

Définition 2.6 (groupe d'allumeur de réverbères). Le groupe d'allumeur de réverbères, noté G , est le produit semi-direct de \mathbb{Z} et la somme directe des copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ indexée par \mathbb{Z} :

$$G = \mathbb{Z} \ltimes \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Ce groupe est engendré par $(1, 0)$ et $(0, \mathbb{1}_{\{0\}})$, qui correspondent respectivement au déplacement de l'allumeur sur \mathbb{Z} et changement d'état du réverbère à la position de l'allumeur. Un élément du groupe peut aussi être vu comme un état du système (position de l'allumeur + états des réverbères), ainsi, le groupe peut agir sur cet espace d'états par composition, dont la loi est donnée par

$$(m, \eta)(m', \eta') := (m + m', \eta \oplus S^{-m}\eta'),$$

où S est le shift vers la gauche de $\bigoplus_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$: $S(\eta)(j) := \eta(j + 1)$.

2.3 Non-unicité ?!

Etant donné un groupe, on a vu que s'il possède une partie génératrice telle que le graphe de Cayley associé soit moyennable, il en va de même pour toute partie génératrice. La percolation de Bernoulli sur les graphes moyennables est bien étudiée : on sait, d'après le théorème 2.2, que la phase de non-unicité ne peut pas exister. Puis, la conjecture sur la non-unicité de clusters infinis dans les groupes non moyennables (conjecture 2.3) se formule comme suit dans le langage des groupes :

Conjecture 2.7. Soit Γ un groupe de type fini. Si Γ n'est pas moyennable, alors pour toute S partie génératrice finie, la percolation de Bernoulli dans (Γ, S) admet 3 phases : $N = 0$, $N = \infty$ puis $N = 1$ p.s.

Maintenant, on donne une réponse partielle à cette conjecture. Ceci est dû à Pak et Smirnova-Nagnibeda [PSN00] : si l'on regarde un groupe non moyennable, on peut trouver une partie génératrice avec multiplicité pour laquelle on a $p_c < p_u$ dans le graphe de Cayley associé.

Définition 2.8. Si G est un graphe et $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. On définit le graphe des chemins de longueur k de manière suivante :

$$\begin{aligned} V(G^{[k]}) &= V(G), \\ E(G^{[k]}) &= \{\{x, y\}, \text{ il existe un chemin de longueur } k \text{ dans } G \text{ d'extrémités } x \text{ et } y\}. \end{aligned}$$

Si G n'est pas biparti, le graphe obtenu est connexe quelle que soit la valeur de k ; si G est biparti, le graphe obtenu n'est connexe que si k est impair.

Si G est un graphe de Cayley (Γ, S) , alors S^k reste une partie génératrice si k est impair, donc, de manière générale, on n'a le droit d'écrire $G^{[k]} = (\Gamma, S^k)$ que pour k impair. Si G n'est pas biparti, cette écriture est valable pour tout k .

Proposition 2.9. *Si G est un graphe transitif non moyennable, alors*

$$p_c^{\text{arêtes}}(G^{[k]}) < p_u^{\text{arêtes}}(G^{[k]}) \text{ pour tout } k \geq -\frac{\log 2}{\log \rho(G)} \text{ impair.}$$

En particulier, si un groupe est non moyennable, alors il possède une partie génératrice avec redondance pour laquelle son graphe de Cayley admet deux transitions de phases : $p_c^{\text{arêtes}} < p_u^{\text{arêtes}}$.

Ce qui est encore mieux, Thom a prouvé, en 2013, le même résultat sans multiplicité. Les lecteurs intéressés sont invités à lire son article [Tho13].

3 Les graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$

On a vu, dans le théorème 2.2, que dans un graphe transitif moyennable, on a seulement deux phases de percolation, *i.e.* $p_c = p_u$. Dans les graphes non moyennables, la conjecture dit que $p_c < p_u$. Les arbres k -valents avec $k \geq 3$ sont évidemment non moyennables, et leur phase d'unicité est réduite à un point $p = 1$, ce qui n'est pas très intéressant. On cherche des graphes pour lesquels on sait montrer qu'il y a trois phases non dégénérées de percolation. C'est pour cette raison que l'on regarde les graphes donnés par le produit cartésien entre l'arbre k -valent et \mathbb{Z} : $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$.

Afin de séparer les deux valeurs critiques p_c et p_u , on cherchera à majorer p_c et à minorer p_u .

3.1 Bornes sur p_c

On a une borne supérieure naïve de p_c , obtenue par le processus Galton-Watson sur le sous-graphe \mathbb{T}_k .

Proposition 3.1. *Pour $k \geq 3$, $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{k-1}$.*

On peut faire mieux en utilisant un couplage astucieux. L'idée est de découvrir le cluster contenant 0 « positivement dirigé », *i.e.* la coordonnée en \mathbb{Z} est croissante quand on s'éloigne de l'origine, puis on projette pour avoir une percolation de Bernoulli sur \mathbb{T}_k . Ensuite, on estime la probabilité de connexion entre deux niveaux successifs. Ceci nous donnera :

Proposition 3.2. *Pour une percolation par arêtes de Bernoulli, on obtient une meilleure borne supérieure pour p_c ,*

$$p_c^{\text{arêtes}}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2} \left[k - \sqrt{k^2 - 4} \right]. \quad (3.1)$$

On pourrait légèrement améliorer ce résultat en autorisant l'exploration dans les deux directions de l'axe \mathbb{Z} , on obtient alors

$$p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \leq g^{-1}\left(\frac{1}{k-1}\right), \quad (3.2)$$

$$\text{où } g(p) = \frac{p - p^3 + p^4}{(1 - p(1 - p))^2}.$$

3.2 Borne sur p_u : méthode probabiliste

On peut dominer stochastiquement la percolation de Bernoulli de paramètre p par un processus de contact du même paramètre. La transience du processus de contact implique que la percolation a une infinité de clusters infinis. Et pour trouver le critère de la transience du processus de contact, on a besoin des informations sur la marche aléatoire simple symétrique et donc le rayon spectral ρ .

Théorème 3.3. *Soit G un graphe quasi-transitif de degré maximal k . Soit p un paramètre de percolation tel que $\theta^v(p) > 0$ pour un certain (donc pour tout) v . Si $\rho(G)dp < 1$, alors $\mathbb{P}_p - p.s.$ il y a une infinité de clusters infinis. En particulier, si $\rho(G)kp_c < 1$, alors $p_c < p_u$.*

Ce théorème a été démontré par Grimmett et Newman dans [GN90] en 1990. On va découper la preuve en plusieurs parties puis on verra comment le théorème s'applique à la percolation sur les graphes $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$.

3.3 Bornes sur p_u : méthode combinatoire

On se sert maintenant des notions de la théorie des graphes définies dans le paragraphe 1.4, en particulier, p_u est minorée par $1/\text{cogr}$.

Proposition 3.4.

$$p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) \geq \frac{1}{\text{cogr}(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})} = \frac{1}{(\sqrt{k-1} + 1) + \sqrt{2\sqrt{k-1} - 1}}, \quad (3.3)$$

où la formule de cocroissance est donnée par l'équation (1.3).

Par les inégalités (3.1) et (3.3), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3.5. *Pour $k \geq 5$, on peut séparer les deux phases de percolation dans $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$: $p_c(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}) < p_u(\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z})$.*

Afin d'améliorer le résultat jusqu'à avoir $k \geq 3$, on pourrait essayer d'estimer γ directement au lieu de majorer par cogr . On pourrait également essayer d'améliorer la borne supérieure de p_c .

3.4 Conclusion

Une méthode qui améliore la borne supérieure de p_c consiste à modifier l'argument du paragraphe 3.1 en faisant intervenir des matrices de transfert. Au lieu d'estimer la probabilité de connexion entre deux niveaux successifs, on estime celle entre deux niveaux de distance 2 ou même plus. Ceci donne une borne plus fine, mais déjà suffisante pour le cas où $k = 4$. Ce calcul étant assez compliqué a été traité par Maple.

Voici un tableau récapitulatif de ce que l'on a fait :

	$p_c \leq$		$\leq p_u$
	(3.2)	(*)	(3.3)
$\mathbb{T}_3 \times \mathbb{Z}$	0.3276	0.3146	0.2655
$\mathbb{T}_4 \times \mathbb{Z}$	0.2343	0.2284	0.2325
$\mathbb{T}_5 \times \mathbb{Z}$	0.1854		0.2113
$\mathbb{T}_6 \times \mathbb{Z}$	0.1543		0.1961

TABLE 1 – Applications numériques de certaines bornes. Les bornes supérieures de p_c sont données par l'équation (3.2) et par une méthode (colonne en astérisque) qui utilise les matrices de transfert. Et les bornes inférieures de p_u sont données par l'équation (3.3).

4 Pour aller plus loin

On est parti de la conjecture 2.3 en se restreignant à une famille de graphes moyennables particulière $\mathbb{T}_k \times \mathbb{Z}$ qui paraît plutôt simple, mais pour laquelle on n'a toujours pas une réponse satisfaisante. Franchir le pas entre $k = 5$ et $k = 4$ a été relativement plus facile, car il a suffi d'améliorer légèrement une des deux bornes alors qu'on voit dans le tableau que pour $k = 3$, on est encore loin.

Ce qui se passe est que quand le degré de l'arbre est grand, le cluster infini a tendance de rester plutôt dans l'arbre sans faire trop d'allers-retours dans la direction de \mathbb{Z} , alors que dans $\mathbb{T}_3 \times \mathbb{Z}$, le cluster infini a tendance de faire aussi des allers-retours dans la direction de \mathbb{Z} , car le degré dans \mathbb{T}_3 est plus petit, ce qui complique l'analyse.

Afin de surmonter ce problème, il faudrait peut-être essayer d'améliorer la borne inférieure de p_u , autrement dit, trouver une meilleure borne supérieure de γ , ou même l'estimer.

Le cas général, surtout la percolation sur les graphes de Cayley, reste un domaine assez ouvert. Montrer $p_c < p_u$ ne dépend pas de la matrice génératrice résoudrait tout le problème.

Références

- [BS96] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. In *Electr. Commun. Probab.* Citeseer, 1996.
- [BS01] Itai Benjamini and Oded Schramm. Percolation in the hyperbolic plane. *Journal of the American Mathematical Society*, 14(2) :487–507, 2001.
- [GN90] GR Grimmett and CM Newman. Percolation in $\infty + 1$ dimensions. *Disorder in physical systems*, pages 167–190, 1990.
- [HPS99] Olle Häggström, Yuval Peres, and Roberto H Schonmann. Percolation on transitive graphs as a coalescent process : Relentless merging followed by simultaneous uniqueness. In *Perplexing problems in probability*, pages 69–90. Springer, 1999.
- [LP05] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on trees and networks*, 2005.
- [PSN00] Igor Pak and Tatiana Smirnova-Nagnibeda. On non-uniqueness of percolation on nonamenable cayley graphs. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series I Mathematics*, 330(6) :495–500, 2000.
- [Sch99] Roberto H Schonmann. Stability of infinite clusters in supercritical percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 113(2) :287–300, 1999.
- [Tho13] Andreas Thom. A remark about the spectral radius. *arXiv preprint arXiv :1306.1767*, 2013.