

Introduction au domaine de recherche : Théorie géométrique de la mesure.

Antoine Julia

13 octobre 2015

1. INTRODUCTION

1.1. **Théorie géométrique de la mesure : les origines.** Les premiers résultats de ce que l'on appelle maintenant théorie géométrique de la mesure remontent à l'Antiquité. Zénodore, formule au deuxième siècle avant notre ère un des premiers théorèmes d'isopérimétrie :

Théorème 1.

- *L'aire d'un disque est supérieure à celle de tout polygone de même périmètre¹.*
- *Le volume d'une sphère est supérieure à celle de tout solide de même surface.*

Ce théorème implique deux mesures : une mesure de surface et une mesure de longueur. Les outils de l'époque étaient essentiellement des constructions géométriques, comme la décomposition de polygones en triangles. Bernoulli propose une nouvelle approche au 17^{ème} siècle avec les premiers outils de calcul différentiel, c'est la première rencontre de la théorie de la mesure géométrique et du calcul des variations. Il faut attendre Steiner et son procédé de symétrisation pour une démonstration rigoureuse de l'unicité d'un éventuel minimiseur du périmètre parmi les compacts de \mathbb{R}^2 : le disque. Pour l'existence, avec un bord lisse, elle découle de l'inégalité de Wirtinger. Sans hypothèse sur la régularité, on peut se contenter de demander que le bord soit une courbe de longueur finie et utiliser le résultat qui dit que tout polygone d'aire maximale est régulier. Les propriétés particulières des polygones rendent difficile la généralisation à la dimension supérieure (en dimension 3, il n'y a que 5 polyèdres réguliers, mais les travaux de Minkowski sur les sommes de convexes compacts et l'inégalité de Brunn-Minkowski donnent une preuve élégante de l'inégalité isopérimétrique en dimension finie quelconque. La distance introduite plus tard par Hausdorff sur l'espace des compacts permet aussi de parler de convergence d'une suite de compacts, et donc de trouver une suite de convexes approchant le minimiseur. Un problème de ce type de convergence est que le périmètre n'est pas continu pour la distance de Hausdorff, on peut par exemple approcher un disque de périmètre 2π par des ensembles de périmètre 8 (des carrés de plus en plus petit, un peu comme sur la figure 1. Toutefois, le périmètre est continu pour la distance de Hausdorff sur la classe des compacts convexes, c'est une bonne classe pour chercher un minimiseur, car un compact non convexe est clairement sous optimal pour la minimisation de périmètre à aire donnée.

1. Il s'agit de la solution au problème de Didon, attribuée à la reine de Carthage qui a vécu au 9^{ème} siècle avant JC

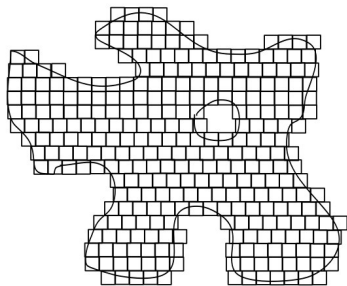


FIGURE
1. Approximation
d'un compact par
des carrés

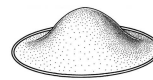


Figure 1.1. A surface with area $\pi + 1$.

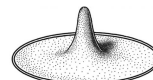


Figure 1.2. A surface with area $\pi + 1$.

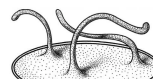


Figure 1.3. A surface with area $\pi + 1$.

FIGURE 2. Ces surfaces
convergent-elles ?

1.2. **Cas type en théorie géométrique de la mesure.** Supposons que l'on s'intéresse à un problème qui fasse intervenir la "taille" d'un ensemble. Les questions soulevées sont en particulier :

- Quel sens donner au mot "taille" ? C'est à dire, quelle mesure utiliser ?
- Quels objets sont mesurables ?
- Quel classe d'objets faut-il considérer pour y trouver un minimum ?
- Une suite minimisante converge-t-elle ?
- Le minimiseur a-t-il un sens pour notre problème initial ?
- Peut on paramétrer le minimiseur ? Tous les objets de la classe

Par exemple, une suite de surfaces comme sur la figure 2 est bien minimisante pour les surfaces lisses de même bord (le cercle dans ce cas), mais ne converge pas en distance de Hausdorff vers une surface lisse.

2. PROBLÈMES ET OUTILS DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA MESURE

2.1. **Surfaces minimales.** Le problème est ici de comparer les surfaces d'objets ayant le même bord donné et de caractériser le ou les minimiseurs. Nous allons voir plusieurs modèles possibles. La

2.1.1. *Fonctions à variations bornées, surfaces minimales de codimension 1.* On dit qu'une fonction \mathbb{L}^1 de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert dans \mathbb{R} est dans $BV(\Omega)$ si son gradient au sens des distributions est une mesure de Radon finie. Cet espace de fonctions est lié aux ensembles de périmètre fini : en effet, si un sous ensemble borné de \mathbb{R}^n est de périmètre fini au sens où sa frontière est de mesure \mathcal{H}^{n-1} finie, alors sa fonction indicatrice (ou celle de son complémentaire) est dans BV . Dès lors, l'optimisation de volumes et d'aires de parties de \mathbb{R}^n peut être vue comme un problème d'analyse fonctionnelle. Ces fonctions ont été définies dans les années vingt par Caccioppoli et Cesari [9, 11] puis étudiées en particulier par De Giorgi, Giusti, Ambrosio [5].

Soit E un ensemble de périmètre fini dans Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , la frontière de E est donnée par le support du gradient de sa fonction indicatrice (au sens des distributions dans Ω). Si on considère deux ensembles qui coïncident en dehors de Ω et qui sont de

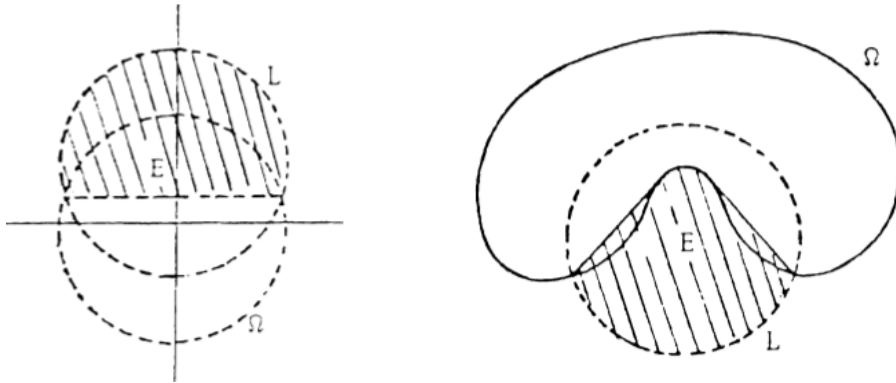


FIGURE 3. Dans les deux cas, E est de périmètre fini dans Ω , et définit une surface (minimale) de bord que $L \cap \partial\Omega$. Ces dessins sont tirés de [20]

périmètre fini dans Ω . Leurs frontières restreintes à cet ouvert sont deux surfaces de même bord. Ce bord est l'intersection de la frontière de l'ouvert avec la frontière de l'ensemble considéré (voir figure 3). Dans cette classe d'ensembles (modulo les ensembles de mesure nulle) il est possible de trouver un minimiseur du périmètre à l'intérieur de Ω . Notons que les ensembles bornés de périmètre fini ont le bon goût d'être approximables dans au sens de BV par des ensembles de bord C^∞ , ce qui est un atout majeur car le périmètre est semi-continu inférieurement pour la convergence BV . Par ailleurs dans un ouvert Ω borné de bord Lipschitz, une suite bornée dans BV est précompacte, ce qui assure que de toute suite minimisante, on peut extraire une sous suite convergente et donc un minimiseur par semi continuité inférieure du périmètre. La régularité d'un tel minimiseur a fait l'objet de nombreux travaux (on peut citer Federer, Simons, De Giorgi, Bombieri et Giusti. Le résultat optimal date de 1969 ([8]) et assure que les surfaces ainsi obtenues sont analytiques à l'intérieur jusqu'en dimension ambiante 8!

2.1.2. *Courants*. Les ensembles de périmètre fini permettent uniquement de traiter le cas de surfaces de codimension 1, mais les ensembles de périmètre fini peuvent être vus comme des n courants intégraux. Précisons ce qu'est un courant : les k -courants sont les formes linéaires sur les k -formes différentielles. On peut leur associer un support, une densité (donc une norme) et un opérateur de bord, comme dual de l'opérateur de différentiation des formes. Un k -courant intégral est un courant de support rectifiable (une union dénombrable de k -variétés Lipschitz), dont le bord est un $k-1$ -courant rectifiable, et qui admet une densité entière presque partout, on peut le voir comme une mesure k -vectorielle à densité entière, avec une masse : la variation totale de la mesure concernée. La notion de courant intégral de \mathbb{R}^n est donc une généralisation de la notion de sous-variété compacte. Les propriétés des courants, analogues en de nombreux points à celles des ensembles de périmètre fini sont adaptées à la théorie de la mesure, en particulier pour les résultats d'approximation et de compacité.

La théorie des courants intégraux ([19, 18]) a été développée pour résoudre le problème des surfaces minimales qui peut être reformulé ainsi dans le langage des courants : étant donné un k -courant intégral de \mathbb{R}^n , trouver parmi tout les courants intégraux de même

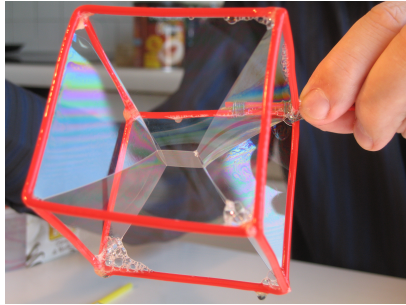


FIGURE 4. Surface minimale formée par un film de savon (Photo, Guy David)

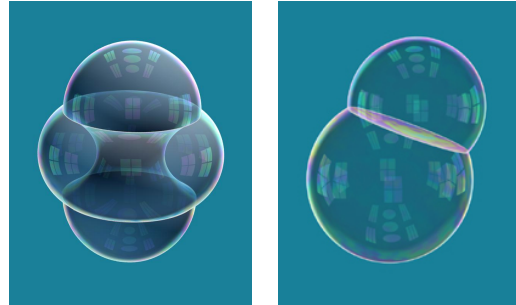


FIGURE 5. Ces doubles bulles sont-elles minimales ? (Images : John M. Sullivan)

bord, celui ou ceux dont la masse est minimale. Si la compacité est relativement facile à obtenir pour des courants rectifiables de masse minimale, la régularité est beaucoup plus difficile en codimension supérieure strictement à 1. Le gigantesque "Big Regularity Paper" d'Almgren ([2], près de mille pages) établit en 1983 le résultat optimal, mais au prix de l'introduction de la théorie des fonctions Q -valuées. Cette théorie a été rendue plus accessible ces dernières années par De Lellis et Spadaro dans [15, 14] et les ouvrages suivants. Le résultat optimal est donc que la codimension de l'ensemble des singularités d'un courant intégral de masse minimale est au maximum 2.

2.2. Quelques autres objets.

2.2.1. *Ensembles minimaux.* La masse d'un k -courant intégral n'est pas vraiment une mesure de "taille", en effet, c'est plutôt l'intégrale sur son support de sa densité, et la taille (définie comme la mesure de Hausdorff de dimension k de son support) peut être différente de sa masse. Le cadre des courants est trop algébrique pour permettre de bons résultats sur les minimiseurs de taille, qui par ailleurs sont bien plus singuliers comme on peut le montrer en plongeant une armature rigide dans de l'eau savonneuse (voir figure 4). Les résultats sur ce problème sont plus récents, et on peut montrer que de tels ensembles minimaux sont rectifiables et ont une régularité $C^{1,\alpha}$ presque partout, en toute codimension ([13]).

2.2.2. *Varifolds.* Une autre notion, moins algébrique que les courants est celle de varifold (contraction de "manifold" et "variation"). Développées par Young, Almgren, Allard ([3, 1]) comme surfaces généralisées. On peut définir une k -varifold de R^n comme une mesure de Radon sur le produit $R^n \times G(k, n)$ de l'espace ambiant avec la k -Grassmannienne. Ce sont en quelque sorte des courants sans l'orientation : on travaille sur des directions et non sur des vecteurs. Les varifolds sont particulièrement adaptées à l'étude d'interfaces et d'agglomération de bulles, en particulier pour les problèmes de flot de courbure ([22]). Récemment, Coda Marques et Neves [24] on démontré à l'aide de

varifolds la conjecture de Willmore : Il existe un tore de genre 1 qui minimise l'énergie de Willmore parmi les surfaces de genre strictement positif.

3. MON PROJET DE THÈSE : FONCTIONS À VARIATIONS BORNÉES SUR UN COURANT.

La mécanique des membranes joue un rôle crucial dans le fonctionnement des cellules et des organismes, en particulier dans le transport d'espèces chimiques et la compartimentation de celles-ci. Or, ces membranes sont toujours basées sur le même mécanisme : une double couche de lipides tête-bêche crée une interface hydrophobe étanche (voir figure 6).

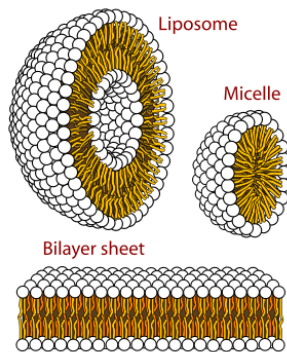


FIGURE 6. exemples de membranes lipidiques (Wikipedia)

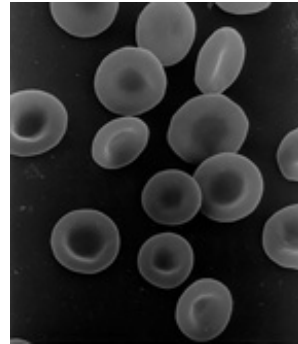


FIGURE 7. Hématies (microscope électronique - Wikipedia)

L'étude des propriétés mécaniques de ce type de membrane remonte à 1964 et aux travaux de Rand et Burton sur les hématies [25], voir figure 7. Dans les années 1970, Canham [10] Helfrich [21] et E. Evans [17] montrent que leur forme biconcave est causée par une élasticité mécanique et non par la tension de surface. Dans leurs modèles, l'énergie de courbure d'une bicouche lipidique vient de l'écart à une courbure de référence, H_0 . Pour une membrane modélisée par la surface Σ , la forme stable est donnée par la minimisation à volume et aire fixée d'une énergie de la forme : $\mathcal{F}(\Sigma) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa_H}{2} (H - H_0)^2 + \kappa_G K \right) dS$, où H est la somme des courbures principales, soit deux fois la courbure moyenne et K la courbure de Gauss : le produit des courbures principales. Des travaux plus récents ont montrés que les membranes pouvaient être constituées de plusieurs espèces, caractérisées par des courbures de référence et des modules de courbure différents ce qui affecte le comportement de la vésicule et peut causer des phénomènes de bourgeonnement ou au contraire d'invagination : voir figure 9 et [23, 7]. Si les espèces se séparent en deux phases (rouge et bleue sur la figure 8), on observera deux comportement locaux distincts. De plus, l'énergie de l'interface entre les deux domaines de la membrane devra être prise en compte. Notant alors $\phi : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}$ le paramètre de phase et rendant les paramètres de l'équation précédente dépendants de la phase, on obtient l'énergie d'une membrane constituée de deux phases [12] :

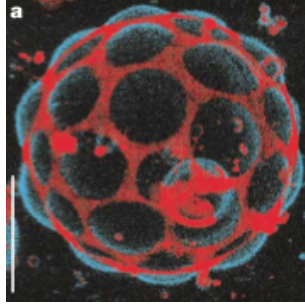


FIGURE 8. Membrane présentant deux phases [7]

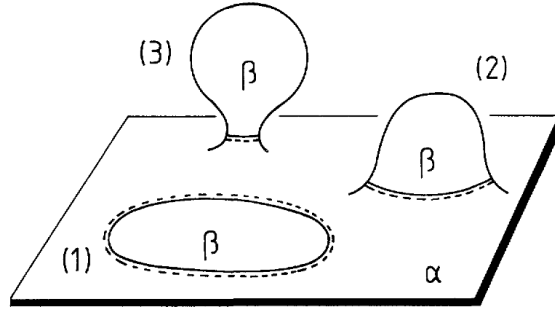


FIGURE 9. Trois moments du bourgeonnement. Tiré de [23]

$$(1) \quad \mathcal{F}(\Sigma, \phi) = \int_{\Sigma} \left(\frac{\kappa_H(\phi)}{2} (H - H_0(\phi))^2 + \kappa_G(\phi) K \right) dS + \sigma(H)^1(\Gamma),$$

Où σ est l'énergie linéique de l'interface Γ entre les deux phases et \mathcal{H}^1 est la mesure de Hausdorff de dimension 1. Les auteurs de [12] ont montré qu'il existait un minimiseur global de cette fonctionnelle dans le cas des surfaces et des phases axisymétriques. La symétrie axiale leur permet de définir la surface comme fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et d'imposer à ϕ d'être à variation bornée de $[0, 1]$ dans $\{0, 1\}$. Toutefois, cette hypothèse ne permet pas de décrire des situations plus générales comme celle de de la figure 8.

Ainsi, il est nécessaire, non seulement de paramétrer la surface généralisée représentant la membrane, mais également de donner un sens à la variation d'une fonction sur cette surface, d'une manière compatible avec les problèmes variationnels posés. Cela peut passer par une bonne notion de fonction à variations bornées sur un courant rectifiable. Les définitions existantes n'étant pas satisfaisantes (voir [6]) nous nous baserons sur les évolutions considérables de la théorie de la mesure géométrique dans les 15 dernières années. Notamment sur les nouveaux points de vues apportés par la généralisation de problèmes classiques aux espaces métriques ([4, 16]). L'objet de la thèse sera donc d'étudier des définitions de fonctions à variation bornée sur un k -courant rectifiable de \mathbb{R}^n . Dans l'esprit de [6], pour chaque définition, nous nous proposons d'abord de montrer qu'on retrouve la théorie classique des fonctions BV si $k = n$ et si le support du courant est un ouvert de \mathbb{R}^n , puis d'étudier des cas de plus en plus généraux pour obtenir des résultats de compacité.

RÉFÉRENCES

- [1] William K. Allard. On the first variation of a varifold. *Annals of Mathematics*, 95(3) : pp. 417–491, 1972. ISSN 0003486X. URL <http://www.jstor.org/stable/1970868>.
- [2] F. J. Almgren. q valued functions minimizing dirichlet's integral and the regularity of area minimizing rectifiable currents up to codimension

- two. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 8(2) :327–328, 03 1983. URL <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183550129>.
- [3] Frederic Justin Almgren. Plateau’s problem. An invitation to varifold geometry. New York-Amsterdam : W.A. Benjamin, Inc. XII, 74 p, 1966.
- [4] Luigi Ambrosio and Bernd Kirchheim. Currents in metric spaces. *Acta Mathematica*, 185(1) :1–80, 2000. ISSN 0001-5962. doi : 10.1007/BF02392711. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02392711>.
- [5] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 2000. ISBN 9780198502456. URL <http://books.google.fr/books?id=7GUMIh6-5TYC>.
- [6] Gabriele Anzellotti, Silvano Delladio, and Giuseppe Scianna. Bv functions over rectifiable currents. *Annali di Matematica Pura e Applicata*, CLXX(IV) :257–296, 1996.
- [7] Tobias Baumgart, Samuel T Hess, and Watt W Webb. Imaging coexisting fluid domains in biomembrane models coupling curvature and line tension. *Nature*, 425 (6960) :821–824, 2003.
- [8] Enrico Bombieri, Ennio De Giorgi, and Enrico Giusti. Minimal cones and the bernstein problem. *Inventiones mathematicae*, 1969.
- [9] Renato Caccioppoli. Sulle coppie di funzioni a variazione limitata. *Napoli Rend. (3)*, 34 :83–88, 1928.
- [10] P.B. Canham. The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell. *Journal of Theoretical Biology*, 26(1) :61 – 81, 1970. ISSN 0022-5193. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193\(70\)80032-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(70)80032-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022519370800327>.
- [11] Lamberto Cesari. Sulle funzioni a variazione limitata. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 5(3-4) :299–313, 1936. URL <http://eudml.org/doc/82927>.
- [12] Rustum Choksi, Marco Morandotti, and Marco Veneroni. Global minimizers for axisymmetric multiphase membranes. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 19(04) :1014–1029, 2013.
- [13] Guy David and Stephen Semmes. *Uniform rectifiability and quasiminimizing sets of arbitrary codimension*, volume 687. American Mathematical Soc., 2000.
- [14] Camillo De Lellis and Emanuele Spadaro. Regularity of area minimizing currents i : gradient l^p estimates. *Geometric and Functional Analysis*, 24(6) :1831–1884, 2014.
- [15] Camillo De Lellis and Emanuele Nunzio Spadaro. *Q-valued functions revisited*. American Mathematical Soc., 2011.
- [16] Thierry De Pauw and Robert Hardt. Rectifiable and flat g chains in a metric space. *American Journal of Mathematics*, 134(1) :1–69, 2012.
- [17] Evan A Evans. Bending resistance and chemically induced moments in membrane bilayers. *Biophysical Journal*, 14(12) :923, 1974.
- [18] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1969. ISBN 9783540606567. URL <https://books.google.fr/books?id=8uOHQgAACAAJ>.

- [19] Herbert Federer and Wendell H. Fleming. Normal and integral currents. *Ann. Math. (2)*, 72 :458–520, 1960. ISSN 0003-486X ; 1939-8980/e. doi : 10.2307/1970227.
- [20] Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Boston, 1984. ISBN 9780817631536. URL <https://books.google.fr/books?id=dNgsArDoeQC>.
- [21] Wolfgang Helfrich et al. Elastic properties of lipid bilayers : theory and possible experiments. *Z. Naturforsch. c*, 28(11) :693–703, 1973.
- [22] Kota Kasai and Yoshihiro Tonegawa. A general regularity theory for weak mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 50(1-2) : 1–68, 2014.
- [23] Reinhard Lipowsky. Budding of membranes induced by intramembrane domains. *Journal de Physique II*, 2(10) :1825–1840, 1992.
- [24] Fernando C Marques and André Neves. Min-max theory and the willmore conjecture. *arXiv preprint arXiv :1202.6036*, 2012.
- [25] RP Rand and AC Burton. Mechanical properties of the red cell membrane : I. membrane stiffness and intracellular pressure. *Biophysical Journal*, 4(2) :115, 1964.