Introduction au domaine de recherche

Alexandre Jannaud

11 juillet 2017

Résumé

Cette introduction au domaine de recherche porte sur la géométrie symplectique. J'ai travaillé, au cours de mon mémoire de M2, à l'aide d'outils homologiques, sur une question d'orbites périodiques : la conjecture de Conley. Ma thèse portera sur un sujet légérement différent (mais qui pose aussi des questions semblables) : la topologie symplectique $\mathcal{C}^0$. Nous verrons que ce domaine présente de nombreux intérêts, notamment parce que, comme en géométrie symplectique "lisse", il possède à la fois des résultats de rigidité et de flexibilité, souvent plus que dans le cas "lisse".

Cette introduction au domaine de recherche est organisé comme suit : nous commençons par présenter les premières notions, essentielles, de géométrie symplectique, ainsi que certains résultats classiques, puis nous expliquerons la construction de l'un des outils principaux du domaine : l'homologie de Floer. Enfin, nous ferons une introduction à la topologie $\mathcal{C}^0$ en géométrie symplectique, en présentant quelques uns des résultats existants et en posant quelques questions ouvertes.

1 Notions de base de géométrie symplectique

1.1 Variétés symplectiques

Définition 1.1. *Un* espace vectoriel symplectique *est un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée.*

En notant ω une telle forme sur un espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base $(e_1, ...e_n, f_1, ...f_n)$ telle que $\begin{cases} \omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j} \\ \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \end{cases}$. Une telle base est dite *symplectique*, et la dimension d'un espace vectoriel symplectique est donc forcément paire.

Définition 1.2. *Une* variété symplectique (W, ω) *est une variété W munie d'une 2-forme fermée non-dégénérée ω, dite forme symplectique.*

L'exemple canonique de variété symplectique est le fibré cotangent d'une variété M, muni de la forme qui s'écrit en coordonnées locales : $\omega = \sum d\xi_i \wedge dx_i$. Cette variété est connue par les physiciens sous le nom d'*espace des phases*.

Définition 1.3. *Un difféomorphisme $\varphi : (W_1, \omega_1) \to (W_2, \omega_2)$ est un symplectomorphisme si il vérifie $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. On note $Symp(W)$, l'ensemble des symplectomorphismes de W dans W.*

Localement, la structure des variétés symplectiques est unique, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 1.4 (Théorème de Darboux)**.**
Soit (W, ω) *une variété symplectique et* $x \in W$*. Il existe des coordonnées locales centrées en x,* $(q_1, ...q_n, p_1, ...p_n)$*, dans lesquelles* ω *s'écrit comme la 2-forme canonique de* $\mathbb{R}^{2n}$*, i.e.*

$$\omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

1.2 Hamiltoniens

La forme ω étant une 2-forme non dégénérée, elle induit un isomorphisme $TM \to T^*M$. Nous pouvons donc associer à tout hamiltonien H_t son champ de vecteur hamiltonien :

Définition 1.5. *Si* $H : W \to \mathbb{R}$ *est une fonction, le champ hamiltonien* X_H *est le champ de vecteur défini par :*

$$\omega_x(Y, X_H(x)) = (dH)_x(Y), \forall Y \in T_xW,$$

i.e. $i_{X_H}\omega = -dH$.

De cette définition découle directement le fait que la fonction H est constante sur les courbes intégrales du champ de vecteurs X_H

Proposition 1.6. *Le flot d'un champ de vecteurs hamiltoniens sur une variété symplectique* (W, ω) *est un symplectomorphisme de* (W, ω) *dans lui même.*

Les hamiltoniens ici considérés étaient autonomes, mais la plupart du temps, ce n'est pas le cas. On considère donc souvent $H : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et des champs hamiltoniens $X_t = X_{H_t}$.

On s'intéresse alors à l'équation

$$\dot{x}(t) = X_t(x(t)).$$

On en déduit donc des difféomorphismes ψ^t qui comme précédemment sont symplectiques.

Nous pouvons remarquer que si nous considérons la variété symplectique $(\mathbb{R}^2, dp \wedge dx)$, l'équation précédente devient : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$.

En choisissant $H = \frac{y^2}{2}$, on obtient la première loi de Newton.

Nous aurons aussi besoin des définitions suivantes :

Définition 1.7. *Une solution périodique x du flot hamiltonien est dite* non-dégénérée *si la différentielle de* ψ^1 *n'a pas de valeur propre égale à 1, i.e.*

$$\det(\mathrm{Id} - T_{x(0)}\psi^1) \neq 0.$$

Définition 1.8. *Un hamiltonien est dit* non-dégénéré *si toutes les solutions périodiques de son flot sont non-dégénérées.*

1.3 Le groupe symplectique

Le groupe symplectique, que l'on note $Sp(2n)$, est le groupe des transformations linéaires symplectiques de ω.

On se place ici dans $\mathbb{R}^{2n}$, muni de la structure presque complexe J.

Nous avons la caractérisation suivante :

$$A \in Sp(2n) \Leftrightarrow {}^t AJA = J.$$

Nous allons commencer par nous intéresser aux valeurs propres :

Proposition 1.9. *Le polynôme caractéristique d'une matrice symplectique A est symétrique, i.e.*

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \lambda^{2n} \det(A - \frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}).$$

Nous avons donc que $\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}$ ont la même multiplicité en tant que valeur propre.

Notons maintenant une propriété topologique intéressante et très utile pour la suite de $Sp(2n)$:

Proposition 1.10. *Le groupe $Sp(2n)$ se rétracte sur $U(n)$. Il est donc connexe par arcs et son groupe fondamental est isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Nous en déduisons immédiatement que si $A \in Sp(2n)$, alors $\det(A) = 1$.

Enfin, énonçons ce lemme qui nous servira dans la suite :

Lemme 1.11. *Soit $\Phi : V \to V$ une application symplectique sur l'espace vectoriel (V, ω) de dimension finie. On suppose que toutes les valeurs propres de Φ sont égales à 1.*

Alors V peut s'écrire comme la somme directe de deux sous-espaces Lagrangiens L et L' tel que $\Phi(L) = L$. De plus, en choisissant convenablement $\Psi \in Sp(V, \omega)$ préservant L et L', l'application $\Psi\Phi\Psi^{-1}$ peut être rendue aussi proche que l'on veut de l'identité.

1.4 Conjectures d'Arnold et de Conley

La question des points périodiques/fixes est une question assez classique en topologie, nous pouvons par exemple rappeler que, grâce à la théorie de l'indice de Lefschetz, nous savons qu'il existe toujours au moins un point fixe lorsque la caractéristique d'Euler de la variété est non nulle.

En géométrie symplectique, nous avons même l'énoncé suivant, dit conjecture d'Arnold et démontré depuis grâce à l'homologie de Floer, par lui-même, dans le cas de variétés symplectiquement asphériques ([5]) :

Conjecture 1.12 (d'Arnold). *Soit W une variété symplectique compacte et soit :*

$$H : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

un hamiltonien dépendant du temps, non dégénérés. Alors, leur nombre est au moins égal à :

$$\sum_i \dim HM_i(W; \mathbb{Z}/2).$$

Sous des conditions plus fortes concernant la variété considérée, nous avons un résultat encore plus fort, connu sous le nom de *conjecture de Conley*, démontré par N. Hingston pour le tore ([8]) et par V.Ginzburg dans sa forme qui suit ([6]) :

Théorème 1.13. *Soit $\varphi : W \to W$ un difféomorphisme hamiltonien sur W, variété fermée, symplectique, asphérique. On suppose que les points fixes de φ sont isolés. Alors φ a des points périodiques, de période simple et arbitrairement grande.*

Nous allons maintenant introduire les principaux outils dont nous avons besoin en géométrie symplectique : l'homologie de Floer et quelques unes de ses propriétés.

2 Homologie de Floer

2.1 Homologie de Morse

2.1.1 Rappels de théorie de Morse

On s'intéresse ici à M^n, variété compacte.

Définition 2.1. *Une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ est dite de Morse lorsque tous ses points critiques sont non dégénérés, i.e. :*

$$df(x) = 0 \Rightarrow d^2 f_x \quad \textit{non dégénérée.}$$

Les fonctions considérées dans la suite de ce pararaphe seront supposées de Morse.

Lemme 2.2 (Lemme de Morse).
Soit a un point critique de $f : M \to \mathbb{R}$. Il existe un voisinage U de a et une carte locale, appelée carte de Morse $\varphi : (U, a) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *tels que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, ..., x_n) = f(a) - \sum_{j=1}^{i} x_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j^2$$

Définition 2.3. *L'entier i apparaissant dans le lemme de Morse est appelé* l'indice du point critique a. *Il est indépendant de la carte de Morse choisie.*

Définition 2.4. *Soit f fonction de Morse sur M. On appelle* champ de pseudo-gradients *associé à f tout champ de vecteur X sur M tel que :*

(i) *on ait $(df)_x(X_x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si x est un point critique,*

(ii) *il existe une carte de Morse au voisinage d'un point critique telle que, X coïncide avec l'opposé du gradient de f pour la métrique canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Il existe toujours des champs de pseudo-gradients pour toutes les fonctions de Morse sur toutes les variétés.

Définition 2.5. *On dit que le champ de pseudo-gradients associé à la fonction de Morse f satisfait* la condition de Smale *si toutes les variétés stables et instables de ses points critiques sont transverses, i.e. :*

$$\forall a, b \quad \textit{points critiques de f,} \quad W^u(a) \pitchfork W^s(b).$$

Cette condition, pourtant essentielle pour la suite ne pose en fait pas de réel problème, comme le montre le théorème de Smale :

Théorème 2.6 (Théorème de Smale)**.**
Soit M une variété à bord et soit f une fonction de Morse à valeurs critiques distinctes sur M. On fixe des cartes de Morse au voisinage de chaque point critique de f. Soit Ω la réunion de ces cartes et soit X un champ de pseudo-gradients sur M transverse au bord. alors il existe un champ de pseudo-gradients Y qui est $\mathscr{C}^1$-proche de X, égal à X sur Ω et vérifiant la condition de Smale.

2.1.2 Le complexe de Morse

On considère ici une variété compacte M munie d'une fonction de Morse f et d'un champ X de pseudo-gradients vérifiant la condition de Smale.

On note $\mathrm{Crit}_k(f)$ l'ensemble des points critiques d'indice k de f.

Définition 2.7. *On définit l'espace vectoriel $C_k(f)$ par :*

$$C_k(f) = \left\{ \sum_{c \in Crit_k(f)} \lambda_c c \quad , \quad \lambda_c \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

Il s'agit du k-ème groupe du complexe de Morse.
Il reste maintenant à définir $\partial_X : C_k(f) \to C_{k-1}(f)$ pour achever la définition de l'homologie de Morse.

2.1.3 L'espace de module des trajectoires de gradient

Nous nous inspirons ici de M. Audin et M. Damian ([1]).

On va s'intéresser aux solutions de :

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \tag{1}$$

Définition 2.8. *Soient x_-,x_+ deux points critiques distincts de f. On définit alors :*

$$\mathscr{L}(x_-, x_+) = \left\{ x \quad \textit{solution de (1) tq} \lim_{t \to \pm\infty} x(t) = x_\pm \right\}$$

Remarque : $\mathscr{L}(x_-, x_+) = W^u(x_-) \cap W^s(x_+)$. La condition de transversalité de Smale nous dit donc que $\dim(\mathscr{L}(x_-, x_+)) = \mathrm{ind}(x_-) - \mathrm{ind}(x_+)$, si cette intersection est non vide.

De plus $\mathbb{R}$ agissant proprement et librement sur $\mathscr{L}(x_-, x_+)$, nous pouvons donc définir

$$\mathscr{M}(x_-, x_+) = \mathscr{L}(x_-, x_+)/\mathbb{R}$$

qui est donc une variété de dimension $\mathrm{ind}(x_-) - \mathrm{ind}(x_+) - 1$.

On peut alors définir la différentielle pour le complexe de Morse :

Définition 2.9. *On définit $\partial_X : C_*(f) \to C_{*-1}(f)$ par :*
soit $x \in \mathrm{Crit}_k(f)$,

$$\partial_X(x) = \sum_{y \in \mathrm{Crit}_{k-1}(f)} \#\mathscr{M}(x, y) \cdot y,$$

et l'on étend ceci par linéarité.

Il s'agit maintenant de vérifier que cette différentielle possède bien les propriétés souhaitées, à savoir $\partial_X^2 = 0$.

Soit $x \in C_{k+2}(f)$,

$$\partial_X^2 x = \sum_{\substack{y \in C_{k+1}(f) \\ z \in C_k(f)}} \#(\mathscr{M}(x,y) \times \mathscr{M}(y,z)) \cdot z$$

Les deux théorèmes suivants impliquent que

$$\bigcup_{y \in Crit_{k+1}(f)} \mathscr{M}(x,y) \times \mathscr{M}(y,z) = \partial \bar{\mathscr{M}}(x,z) \quad ,$$

où $\bar{\mathscr{M}}(x,z)$ est une variété à bord de dimension 1.

D'où $\partial^2 = 0$.

Théorème 2.10 (Compacité).

Si (x_n) est une suite de $\mathscr{M}(x_-, x_+)$, alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers une trajectoire de gradient brisée.

On dit que $(y_1, ..., y_p)$ est une trajectoire de gradient brisée entre x_- et x_+ si

(i) y_i *solution de (1)*

(ii) $y_{1,-} = x_-$

(iii) $y_{i,+} = y_{i+1} \quad \forall 1 \leq i \leq p-1$

(iv) $y_{p,+} = x_+$

Théorème 2.11 (Recollement).

Soit $(x_-, z, x_+) \in (Crit_{k+1}(f) \times Crit_k(f) \times Crit_{k-1}(f))$. Soient $x \in \mathscr{M}(x_-, z)$ et $y \in \mathscr{L}(z, x_+)$. Il existe un plongement continu ψ différentiable sur $]0, \delta[$ d'un intervalle $[0, \delta[$ sur un voisinage de (x, y) dans $\bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+)$ tel que :

(i) $\psi(0) = (x, y) \in \bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+)$

(ii) $\psi(s) \in \mathscr{M}(x_-, x_+)$

De plus, si (x_n) est une suite dans $\mathscr{M}(x_-, x_+)$ qui tend vers (x, y) alors $x_n \in Im(\psi)$ pour n assez grand.

Nous avons donc construit notre complexe d'homologie de Morse, le théorème suivant montre que ce complexe ne dépend ni de la fonction choisie ni du champ de pseudo-gradients :

Théorème 2.12. *Soit M une variété compacte et soient $f, g : M \to \mathbb{R}$ deux fonctions de Morse et X, Y des champs de pseudo-gradients adaptés à f et g, vérifiant la condition de Smale. Alors il existe un morphisme de complexes :*

$$\Psi_* : (C_*(f), \partial_X) \to (C_*(g), \partial_Y)$$

induisant un isomorphisme en homologie.

2.2 Homologie de Floer

2.2.1 Quelques définitions nécessaires

Nous travaillons désormais avec (W^{2n}, ω) variété symplectique munie d'un hamiltonien $H : W \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ 1-périodique, non-dégénéré.

On demande de plus deux autres hypothèses :

(i) pour toute application $\mathscr{C}^\infty$, $w : S^2 \to W$,

$$\int_{S^2} w^*\omega = 0.$$

i.e. $\langle \omega, \pi_2(W) \rangle = 0$

(ii) pour toute application $\mathscr{C}^\infty$, $w : S^2 \to W$, il existe une trivialisation symplectique du fibré w^*TW
i.e. $\langle c_1(TW), \pi_2(W) \rangle = 0$ où $c_1(TW)$ est la première classe de Chern.

La question que nous nous posons alors est celle de l'existence d'orbites 1-périodiques pour le flot hamiltonien.

Définition 2.13. *Soit x un lacet contractile et $u : D^2 \to W$ tel que $u_{|S^1} = x$. On définit alors l'intégrale d'action, qui va de l'ensemble des lacets sur W dans $\mathbb{R}$ par*

$$\mathscr{A}_H(x) = -\int_{D^2} u^*\omega + \int_{S^1} H_t(x(t))dt.$$

Remarque : $\mathscr{A}_H$ ne dépend pas de u grâce à la première hypothèse.

Lemme 2.14. $d\mathscr{A}_H(x) \cdot \xi = \int_0^1 \omega(\dot{x}(t) - X_{H_t}(x(t)), \xi)dt$

Corollaire 2.15. *Les points critiques de $\mathscr{A}_H$ sont les orbites 1-périodiques contractiles de X_H.*

Définition 2.16. *On dit qu'un point x est un point critique non dégénéré pour $\mathcal{A}_H$ si c'est une trajectoire non dégénérée, i.e. la différentielle de ψ^1 n'a pas de valeur propre 1, où ψ est le flot associé au champ de vecteurs hamiltonien.*

Définition 2.17. *On dit que x est* faiblement dégénéré *lorsqu'au moins une des valeurs propres est égale à 1.*

On dit que x est fortement dégénéré *lorsque toutes les valeurs propres sont égales à 1.*

2.2.2 L'indice de Conley-Zehnder

Nous nous inspirons ici de D. Salamon et E. Zehnder ([12]).

De même que pour l'homologie de Morse, on associe un indice aux points critiques, appelé *indice de Conley-Zehnder*, noté $\mu_{cz}(x)$. Intuitivement, cet indice compte le nombre de tours que fait le flot linéarisé autour de l'orbite.

Soit $H : W \times S^1 \to \mathbb{R}$, $x(t) = \varphi^t(x(0))$ orbite 1-périodique, non-dégénérée, contractile. On note $Z(0)$ une base symplectique de $T_{x(0)}W$, permettant d'identifier $T_{x_0}W$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

On a $d\varphi^1_{x(0)} = A(1) \quad \in Sp(2n)$, $1 \notin Spec(A(1))$ car x non dégénérée.

Le lemme suivant nous permet de constuire un chemin dans $Sp(2n)$ de Id à $A(1)$:

Lemme 2.18. *Pour toute application continue $\psi : D^2 \to W$, le fibré symplectique $\psi^* TW$ est trivialisable et toutes ses trivialisations sont homotopes.*

Ainsi, lorsque l'on prend un capping pour une orbite, nous pouvons trivialiser, et le résultat ne dépendera pas du capping choisi.

Nous en déduisons donc un repère symplectique $Z(t)$ en tout point de $x(t)$. La matrice $A(t)$ de l'application $d\varphi^t_{x(0)} : (T_{x(0)}W, Z(0)) \to (T_{x(t)}W, Z(t))$ est donc un chemin dans $Sp(2n)$ associé de manière unique, à homotopie près, à l'orbite x.

Nous associons alors à ce chemin un indice, appelé indice de Maslov.

Proposition 2.19. *L'indice de Maslov est entier, et deux chemins sont homotopes à extrémités fixées dans $Sp(2n)^*$ si et seulement si ils ont le même indice de Maslov.*

En associant à notre chemin $A(t) \in Sp(2n)$ (lui même associé à notree point critique x) son indice de Maslov, nous avons donc associé à toute orbite 1-périodique contractile non-dégénérée son *indice de Conley-Zehnder.*

2.2.3 Le complexe de Floer

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à des espaces de lacets. Par souci de simplicité, nous ne nous intéresserons pas à leur régularité.

Définition 2.20. *On définit l'espace vectoriel $CF_k(H)$ par :*

$$CF_k(H) = \left\{ \sum_{\substack{x \text{orbite 1-pér.} \\ \mu_{CZ}(x)=k}} \lambda_x x \quad , \quad \lambda_x \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

Il s'agit du k-ème groupe du complexe de Floer.

Il reste maintenant à définir la différentielle $\partial : CF_k(H) \to CF_{k-1}(H)$ pour achever la définition de l'homologie de Floer.

2.2.4 La différentielle

La différentielle se construit dans le même esprit que ce qui a été fait pour Morse : on s'intéresse maintenant aux trajectoires de gradient. Nous avons besoin d'une métrique sur l'espace $\mathcal{L}W$pour définir ce gradient.

Une métrique sur $\mathcal{L}W$ est donnée par une structure presque complexe $J : TW \to TW$ calibrée par ω, i.e. :

- $J^2 = -Id_{TW}$
- $\omega(\cdot, J\cdot)$ est une métrique

La métrique sur $\mathcal{L}W$ s'écrit donc, avec ξ_1, ξ_2 champs de vecteurs définis le long d'un lacet x :

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_0^1 \omega_{x(t)} \left(\xi_1(t), J\xi_2(t) \right) dt.$$

On a alors $\nabla \mathscr{A}_H(x) = J(\dot{x}(t) - X_{H_t}(x))$.

On s'intéresse donc aux solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J \left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t}(u) \right) = 0 \tag{2}$$

pour $u : \mathbb{R} \times S^1 \to W$.

De même que dans le cas de Morse, on définit alors l'espace des modules :

$$\mathscr{L}(x_-, x_+, H, J) = \left\{ u \text{ solution de (2) tq } \lim_{s \to \pm\infty} u(s) = x_\pm \right\}$$

et

$$\mathscr{M}(x_-, x_+, H, J) = \mathscr{L}(x_-, x_+, H, J)/\mathbb{R}$$

Comme précédemment, les trois théorèmes suivants, que nous admettons, concernant la structure des espaces de modules nous permettent alors de définir la différentielle :

Théorème 2.21 (Transversalité).
L'ensemble des J tels que, pour tout $x_\pm \in Crit(\mathscr{A}_H)$, $\mathscr{M}(x_-, x_+, H, J)$ est une variété de dimension $\mu_{cz}(x_-) - \mu_{cz}(x_+) - 1$, est un G_δ-dense.

Théorème 2.22 (Compacité).
Soit $(u_n) \in \mathscr{L}(x_-, x_+, H, J)$ alors il existe :

(i) *une sous-suite (u_n),*

(ii) *des points critiques $(x_- = x_0, x_1, ...x_l, x_{l+1} = x_+)$,*

(iii) *des suites (s_n^k), pour $0 \leq k \leq l$,*

(iv) *des éléments $u^k \in \mathscr{L}(x_k, x_{k+1}, H, J)$*

tels que, pour tout $k = 0, ..., l$, $\lim_{n \to \infty} u_n \cdot s_n^k = u^k$.

On en déduit donc que l'espace $\bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+, H, J)$, qui est $\mathscr{M}(x_-, x_+, H, J)$ auquel on a rajouté les trajectoires brisées, est compact.

Théorème 2.23 (Recollement).
Soient $(x_-, y, x_+) \in (Crit_{k+1}(\mathscr{A}_H) \times Crit_k(\mathscr{A}_H) \times Crit_{k-1}(\mathscr{A}_H))$ et soient $(u, v) \in \mathscr{L}(x_-, y, H, J) \times \mathscr{L}(y, x_+, H, J)$. On note $\hat{u}$ et $\hat{v}$ leur classe dans $\mathscr{M}(\cdot, \cdot, H, J)$. Alors,

(i) *il existe une application différentiable $\psi : [\delta, +\infty[\to \mathscr{L}(x_-, x_+, H, J)$ tel que $\hat{\psi} : [\delta, +\infty[\to \mathscr{M}(x_-, x_+, H, J)$ soit un plongement vérifiant*

$$\lim_{\rho \to \infty} \hat{\psi}(\rho) = (\hat{u}, \hat{v}) \in \bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+, H, J)$$

(ii) *si $l_n \in \mathscr{M}(x_-, x_+, H, J)$ est une suite tendant vers $(\hat{u}, \hat{v})$, alors $l_n \in Im(\hat{\psi})$ pour n assez grand.*

On peut alors enfin définir la différentielle :

Définition 2.24. *On définit $\partial : CF_*(H) \to CF_{*-1}(H)$ par :
soit $x \in CF_k(H)$,*

$$\partial x = \sum_{y \in Crit_{k-1}(\mathscr{A}_H)} \#\mathscr{M}(x, y, H, J) \cdot y$$

Expliquons maintenant pourquoi $\partial \circ \partial = 0$.

Soit $x_- \in Crit_{k+2}(\mathscr{A}_H)$,

$$\partial x_- = \sum_{\substack{x_+ \in Crit_{k-2}\mathscr{A}_H)) \\ y \in Crit_{k-1}(\mathscr{A}_H)}} \# \left(\mathscr{M}(x_-, y, H, J) \times \mathscr{M}(y, x_+, H, J) \right) \cdot x_+.$$

Or, d'après les théorèmes précédents,

$$\bigcup_{y \in Crit_{k+1}(\mathscr{A}_H)} \mathscr{M}(x_-, y, H, J) \times \mathscr{M}(y, x_+, H, J) = \partial \bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+, H, J) \quad ,$$

où $\bar{\mathscr{M}}(x_-, x_+, H, J)$ est une variété à bord de dimension 1.

D'où $\partial^2 = 0$.

Le complexe d'homologie étant indépendant des choix de H et J, nous avons donc construit un invariant symplectique.

Remarque 2.25. *Lorsque l'on travaille avec des fonctions de Morse ou des Hamiltoniens qui ne sont pas non-dégénérés, il est possible de les perturber au voisinage d'un point critique et d'en calculer l'homologie de Morse ou de Floer sur ce voisinage. On parle alors d'homologie de Morse ou de Floer locale.*

2.3 Quelques propiétés utiles

2.3.1 Homologie de Floer filtrée

Soient $a < b$ deux valeurs régulières de $\mathscr{A}_H$.

Définition 2.26. *On définit l'espace vectoriel $CF_k^{(a,b)}(H)$ par :*

$$CF_k^{(a,b)}(H) = \left\{ \sum_{\substack{\mu_{cz}(x)=k \\ x \text{orbite 1-pér.} \\ a<\mathscr{A}_H(x)<b}} \lambda_x x \quad , \quad \lambda_x \in \mathbb{Z}/2 \right\}$$

La différentielle est définie de la même manière que précédemment, en ne gardant dans la somme que les orbites y telles que $a < \mathscr{A}_H(y) < b$.

L'homologie $HF_*^{(a,b)}(H)$ est appelée *homologie de Floer filtrée de H* pour l'intervalle (a, b).

Soient $a < b < c$ trois valeurs régulières de $\mathscr{A}_H$. Alors $CF_*^{(a,b)}(H)$ est un sous-complexe de $CF_*^{(a,c)}(H)$ et $CF_*^{(b,c)}(H)$ est isomorphe à $CF_*^{(a,c)}(H)/CF_*^{(a,b)}(H)$.

Nous avons donc la suite exacte longue

$$\cdots \to HF_*^{(a,b)}(H) \to HF_*^{(a,c)}(H) \to HF_*^{(b,c)}(H) \to HF_{*-1}^{(a,b)}(H) \to \cdots$$

2.3.2 Applications d'homotopie

Soient H^0 et H^1 deux hamiltoniens non-dégénérés, et soit H^s une homotopie de H^0 à H^1, que l'on suppose décroissante, à $t \in S^1$ et $p \in W$ fixés.

Alors, pour $a < b$ deux valeurs régulières de $\mathscr{A}_{H^0}$ et de $\mathscr{A}_{H^1}$, cette homotopie induit un homomorphisme de complexes $\psi_{H^0,H^1} : CF_*^{(a,b)}(H^0) \to CF_*^{(a,b)}(H^1)$.

Plus précisément, soit x une orbite 1-périodique de H^0 et y de H^1, et on note $\mathscr{L}(x,y,J)$ l'espace des solutions de

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_{H_t^s}(u)\right) = 0$$

asymptotiques à x et y en $\pm\infty$.

L'énergie d'une telle solution est alors :

$$E(u) = \mathcal{A}_{H^0}(x) - \mathcal{A}_{H^1}(y) + \int \frac{\partial H^s}{\partial s}(u)dsdt. \tag{3}$$

Quand $\mu_{cz}(x) = \mu_{cz}(y)$, il s'agit d'un nombre fini de points, et l'application ψ_{H^0,H^1} est définie par :

$$\psi_{H^0,H^1}(x) = \sum_{\substack{\mu_{cz}(y)=\mu_{cz}(x)\\ a<\mathscr{A}_H(y)<b}} \#\left(\mathscr{L}(x,y,J)\right)\cdot y.$$

Cette application est indépendante de l'homotopie H^s choisie et commute avec la suite exacte longue du paragraphe précédent.

De plus, une homotopie (pas forcément monotone), avec $a < b$ valeurs régulières de H^s pour tout s nous donne un isomorphisme entre les groupes $HF_*^{(a,b)}(H^s)$, et donc nous avons :

$$HF_*^{(a,b)}(H^0) \cong HF_*^{(a,b)}(H^1).$$

Mais revenons à l'application ψ_{H^0,H^1}, le lemme suivant nous donne un critère pour la non trivialité de cette application.

Lemme 2.27. *Soit H^s une homotopie monotone décroissante telle que le point p soit une orbite constante non dégénérée 1-périodique de H^s et $H_t^s(p) = c$ pour tous s et t. Alors si c est la seule valeur critique de H^0 et H^1 dans l'intervalle (a,b), alors*

$$\psi_{H^0,H^1} : HF_*^{(a,b)}(H^0) \to HF_*^{(a,b)}(H^1)$$

est non triviale.

2.3.3 Lacets de difféomorphismes hamiltoniens

On s'intéresse ici à des lacets de difféomorphismes hamiltoniens sur W, paramétrés par S^1 et tels que si $\psi = \psi^t$ est un tel lacet, alors $\psi^0 = \psi^1 = Id$.

Soit G un hamiltonien 1-périodique et on note $\psi^t = \varphi_G^t$ le lacet qu'il engendre. Les orbites qu'il engendre sont toutes dans la même classe d'homotopie. Nous pouvons alors associer à l'une de ces orbites son indice de Maslov, que l'on pourrait appeler indice de Maslov du lacet, noté $\mu(\psi)$, dont on va prouver la nullité. Il s'avère toutefois que le fait que ces orbites sont homotopes assure la bonne définition de ce lacet.

On considère maintenant l'hamiltonien $G\#H$, engendrant le flot $\varphi_G^t\varphi_H^t$, 1-périodique et dont la carte au temps 1 est φ_H. La composition par ψ^t envoie les orbites 1-périodiques de H sur les orbites 1-périodiques de $G\#H$, avec une augmentation de l'action et un décallage d'indice de Conley-Zehnder de $-2\mu(\psi)$. De plus, cette composition commute avec la différentielle, nous avons donc un isomorphisme entre les groupes d'homologie de H et de $G\#H$, à un décallage d'indice près. Finalement, comme

$$HF_*(H) = H_{*+n}(W) = H_*(G\#H),$$

on a $\mu(\psi) = 0$.

Nous allons maintenant considérer ψ^t qui est un lacet de germes de difféomorphismes hamiltoniens en $p \in W$ et engendré par G. Nous pouvons alors considérer l'action de ce lacet, ainsi que son indice de Maslov $\mu(\psi)$.

Nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.28. *Soit ψ^t, $t \in S^1$ un lacet de germes de difféomorphismes hamiltoniens en $p \in W$. Il y a équivalence entre :*

(i) *le lacet ψ s'étend en un lacet de difféomorphismes hamiltoniens sur W,*

(ii) *le lacet ψ s'étend en un lacet de difféomorphismes hamiltoniens sur W, contractile dans la classe de lacets fixant p,*

(iii) *le lacet ψ est contractile dans le groupe des germes de difféomorphismes hamiltoniens en p,*

(iv) $\mu(\psi) = 0$.

3 Topologie symplectique $\mathcal{C}^0$

Le premier résultat ayant amené avec lui beaucoup de questions est le suivant, démontré en deux temps par Eliashberg ([4]) et Gromov ([7]) :

Théorème 3.1 (Eliashberg, Gromov). *Soit $(\varphi_i) \in \mathrm{Symp}(W)^{\mathbb{N}}$ telle que $\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \varphi$. Si $\varphi \in \mathrm{Diff(W)}$, alors $\varphi \in \mathrm{Symp}(W)$.*

Il apparaît dès lors naturel de définir des ensembles $\mathrm{Sympeo}(W)$ et $\mathrm{Hameo}(W)$ comme ci-dessous et de s'interroger quant à leurs propriétés, notamment celles que l'on sait vérifiées par les symplectomorphismes et difféomorpismes hamiltoniens.

Définition 3.2. *Soit $\varphi \in \mathrm{Homeo}(W)$, on dit que φ est* symplectique *si il existe une suite $(\varphi_i) \in \mathrm{Symp}(W)^{\mathbb{N}}$ qui converge de manière $\mathcal{C}^0$ vers φ.*

On note alors

$$\mathrm{Sympeo}(W) := \overline{\mathrm{Symp}(W)}^{\mathcal{C}^0} \subset \mathrm{Homeo}(W).$$

Définition 3.3. *Soit L^n une sous variété de W. On dit que L est* lagrangienne *si $\omega_{|L} = 0$.*

Il a déjà été démontré certains résultats de rigidité, comme ceux retrouvés habituellement en géométrie symplectique :

Théorème 3.4 (Humilière, Leclercq, Seyfaddini [9]). *Soit L une sous-variété lagrangienne de W, et soit $\varphi \in \mathrm{Sympeo}(W)$ tel que $\varphi(L)$ soit lisse. Alors $\varphi(L)$ est lagrangien.*

D'autres résultats apportent de la souplesse :

Théorème 3.5 (Buhovsky, Opshtein [3])**.** *Soient deux chemins plongés* γ_1 *et* $\gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^{2n}$*, avec* $n > 1$*. Il existe* $\varphi \in \mathrm{Sympeo}(\mathbb{R}^{2n})$ *tel que* $\varphi \circ \gamma_1 = \gamma_2$*.*

(Le résultat est énoncé sous cette forme dans [2].)

Définition 3.6 (Oh,Müller [11])**.** *Soit* B *un ouvert de* W*, et soit* (φ^t) *une isotopie de* W*, à support compact dans* B*. On dit que* φ^t *est une hameotopie, ou un flot hamiltonien continu de* B *si il existe une suite d'hamiltoniens* (H_i) *lisses à support compact tels que :*

1. *la suite de flots* $\varphi^t_{H_i}$ *converge de manière* $\mathcal{C}^0$ *vers* φ^t*, uniformément en temps,*
2. *la suite d'hamiltoniens converge uniformément vers un hamiltonien continu* H*.*

On dit que H *engendre* φ^t *et on parle alors d'hamiltonien continu.*

Un homéomorphisme est appelé un homeomorphisme hamiltonien si il s'agit de l'application au temps 1 d'une hameotopie. On note cet ensemble $\mathrm{Hameo}(B, \omega)$*.*

Cet aspect rigidité/flexibilité apparaît aussi lorsque l'on s'intéresse à la conjeture d'Arnold :

Théorème 3.7 (Matsumoto [10])**.** *Si* W *est une surface, alors la conjecture d'Arnold est encore vraie pour* $\varphi \in \overline{\mathrm{Ham}(W)}^{\mathcal{C}^0}$*.*

Tandis que le théorème suivant nous donne, en grande dimension un contre exemple à la conjecture d'Arnold.

Théorème 3.8 (Buhovsky, Humilière, Seyfaddini [2])**.** *Si la dimension de* W *est supérieure à* 4*, alors il existe* $\varphi \in \mathrm{Hameo}(W)$ *tel que* $\#Fix(\varphi) = 1$*.*

Les questions suivantes sont ouvertes :

La conjecture de Conley est-elle toujours vérifiée pour un $\varphi \in Hameo(W)$?

$\mathrm{Hameo}(W) \overset{?}{=} \overline{\mathrm{Ham}(W)}^{\mathcal{C}^0}$.

La conjecture du flux $\mathcal{C}^0$: $\overline{\mathrm{Ham}(W)}^{\mathcal{C}^0} \bigcap \mathrm{Symp}_0(W) \overset{?}{=} \mathrm{Ham}(W)$.

Références

[1] Michèle Audin and Mihai Damian. *Théorie de Morse et homologie de Floer.* Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2010.

[2] Lev Buhovsky, Vincent Humilière, and Sobhan Seyfaddini. Acˆ 0 counterexample to the arnold conjecture. *arXiv preprint arXiv :1609.09192*, 2016.

[3] Lev Buhovsky and Emmanuel Opshtein. Some quantitative results in $\mathcal{C}^0$ symplectic geometry. *Invent. Math.*, 205(1) :1–56, 2016.

[4] Ya Eliashberg. Estimates on the number of fixed points of area preserving transformations. *Syktyvkar University*, 1979.

[5] Andreas Floer. Proof of the Arnol′d conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds. *Duke Math. J.*, 53(1) :1–32, 1986.

[6] Viktor L. Ginzburg. The Conley conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 172(2) :1127–1180, 2010.

[7] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.

[8] Nancy Hingston. Subharmonic solutions of Hamiltonian equations on tori. *Ann. of Math. (2)*, 170(2) :529–560, 2009.

[9] Vincent Humilière, Rémi Leclercq, and Sobhan Seyfaddini. Coisotropic rigidity and C^0-symplectic geometry. *Duke Math. J.*, 164(4) :767–799, 2015.

[10] S. Matsumoto. Arnold conjecture for surface homeomorphisms. In *Proceedings of the French-Japanese Conference "Hyperspace Topologies and Applications" (La Bussière, 1997)*, volume 104, pages 191–214, 2000.

[11] Yong-Geun Oh and Stefan Müller. The group of Hamiltonian homeomorphisms and C^0-symplectic topology. *J. Symplectic Geom.*, 5(2) :167–219, 2007.

[12] Dietmar Salamon and Eduard Zehnder. Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45(10) :1303–1360, 1992.