Introduction au domaine de recherche : Applications des approximants de Padé aux approximations rationnelles des valeurs de G-fonctions

Dimitri Le Meur

septembre 2014 - août 2017

Table des matières

1 Un bref aperçu historique de résultats d'irrationalité

Dans *Tractatus de seriebus infinitis* (1689), Jakob Bernoulli se pose le problème de l'évaluation de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; il y écrit : "Si quelqu'un détermine et nous communique ce qui a jusqu'ici échappé à tous nos efforts, grande sera notre gratitude". En 1735, L. Euler résout ce problème de façon particulièrement astucieuse (voir chapitre 3 de [4] par exemple) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler donne ensuite plusieurs démonstrations de cette égalité, et parvient plus généralement à déterminer explicitement la valeur de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ pour les entiers pairs ; pour $k \geq 1$; on a :

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k},$$

où les nombres rationnels B_{2k} sont les nombres de Bernoulli, qui peuvent être définis par leur série génératrice exponentielle :

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

En revanche, ni Euler, ni personne après lui, n'est parvenu à une expression aussi simple pour les nombres $\zeta(2k+1)$ (où $k \geq 1$). On peut cependant citer une formule, considérée comme l'analogue naturel à celle d'Euler, essentiellement due à Ramanujan (voir [3] pour une preuve de cette formule) :

$$(-\beta)^{-n} \left(\frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\beta k} - 1} \right) =$$

$$\alpha^{-n} \left(\frac{1}{2} \zeta(2n+1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2n-1}}{e^{2\alpha k} - 1} \right) + 2^{2n} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k B_{2k} B_{2n+2-2k}}{(2k)!(2n+2-2k)!} \alpha^{n+1-k} \beta^k,$$

formule valable pour tous α et β tels que $\alpha\beta = \pi^2$. Cette formule Ramanujan ne permet néanmoins pas de décider si les nombres $\zeta(2n+1)$ s'expriment rationnellement à l'aide de π^{2n+1}.

Beaucoup plus tard, Apéry donne en 1978, dans [2], la première information de nature arithmétique des valeurs de zêta aux entiers impairs :

Théorème 1. (Roger Apéry, 1978) *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Voici les points essentiels de la démonstration d'Apéry : il existe une constante $c > 0$ et des rationnels :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{n}^2 \in \mathbb{Z}$$

$$b_n \in d_n^{-3}\mathbb{Z}$$

(où $d_n = ppcm(1, 2, .., n)$) tels que :

$$0 < |a_n \zeta(3) - b_n| \leq c(\sqrt{2} - 1)^{4n}$$

L'estimation élémentaire $d_n \leq 3^n$ suffit pour conclure que $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

A l'heure actuelle, on ne connait l'irrationalité d'aucun $\zeta(2k+1)$ pour $k \geq 2$. On dispose cependant de quelques résultats.

En 2000, Rivoal montre qu'il existe une infinité d'entiers impairs sur laquelle la fonction zêta prend des valeurs irrationnelles. Plus précisément, il a démontré dans son article [7] et dans [6] :

Théorème 2. (Tanguy Rivoal, Keith Ball, 2000) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n > N$,*

$$\dim(\mathit{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \zeta(3), .., \zeta(2n+1)) \geq \frac{1-\epsilon}{1 + log(2)} \log(n)$$

Il expose un autre résultat en ce sens en 2001 :

Théorème 3. (Tanguy Rivoal, 2001)
Au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), .., \zeta(21)$ est irrationnel.

Résultat que Zudilin a amélioré :

Théorème 4. (Wadim Zudilin, 2001)
Au moins un des quatre nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel.

Un point fondamental commun à toutes ces démonstrations est une minoration des combinaisons $\mathbb{Q}$-linéaires des valeurs de $\zeta(2k+1)$.

2 Résultat d'indépendance $\mathbb{Q}$-linéaire entraîné par les G-fonctions, et majoration d'un dénominateur

En 1929, Siegel a défini deux classes de fonctions. La première, la classe des E-fonctions, vis-à-vis desquelles lui et ses poursuivants ont établi des résultats généraux sur la transcendance et l'indépendance algébrique de leurs valeurs, et dont, plus récemment encore, Chudnovsky a présenté des résultats sur la mesure d'approximations rationnelles des valeurs des E-fonctions. La seconde, la classe des G-fonctions, sur laquelle, on ne disposait guère encore, à l'époque, de résultat généraux, quoique Siegel ait donné quelques résultats intéressants sur les fonctions algébriques et leurs intégrales, qui constituent autant de cas particuliers de G-fonctions. Siegel a indiqué sans plus de précision qu'une théorie, semblable à celle des E-fonctions, pouvait être constituée pour les G-fonctions. L'établissement d'une telle théorie est exactement l'objectif de l'article de Chudnovsky [5], démontrant les théorèmes 5 et 6, résultats d'indépendance linéaire et algébrique des valeurs des G-fonctions, sans aucune restriction sur ces fonctions ; ce qui satisfait au programme qu'avait fixé Siegel.

La démonstration de Chudnovsky de ces deux théorèmes repose sur la construction de $n+1$ formes linéaires indépendantes $l_0, \dots, l_n$, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et voisines de la forme linéaire $l = (1, f_1(\xi), \dots, f_n(\xi))$ (où $\xi \in \mathbb{Q}$ est fixé) agissant sur $\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix}$. Puisqu'elles ne peuvent appartenir à un même hyperplan, cela permet d'en extraire une ne s'annulant pas en cette valeur. En multipliant cette valeur par son dénominateur, on obtient alors un entier non nul, et donc de valeur absolue ≥ 1 - élément qui pourrait paraître insignifiant, mais qui, en réalité, et malgré sa simplicité, constitue la pierre d'achoppement de toute démonstration basée sur des approximations rationnelles. Ensuite, des considérations techniques importantes (qui comprennent la majoration de tous les termes, nombreux, apparus en cours de raisonnement, et des astuces calculatoires, utilisant par exemple le lemme de Gauss sur la multiplicativité du contenu des fractions rationnelles, pour majorer certains dénominateurs sur lesquels, de visu, il n'y a aucune information évidente) permettent d'obtenir la minoration de la valeur absolue de l agissant sur $\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix}$. Pour le premier théorème, cette construction provient des approximants de Padé de seconde espèce, approximants simultanés de n séries entières $f_1, .., f_n$ par des fractions rationnelles $\frac{P_i}{Q}$. Comme l'opération de différentiation permet de transformer un système d'approximants de Padé de seconde espèce en un autre système de tels approximants, on parvient en itérant cette opération à obtenir les $n+1$ formes $\mathbb{Q}$-linéaires indépendantes désirées, avec une certaine borne t sur les ordres de différentiation. Pour majorer la taille des coefficients de toutes ces formes linéaires - point technique essentiel pour maintenir la démonstration - on utilise d'abord le lemme de Siegel, nous permettant de majorer la hauteur d'un élément non nul à coefficients entiers du noyau d'une application $\mathbb{Q}$-linéaire, et donc de majorer la hauteur de l'approximation de Padé initialement construite, et ensuite d'exploiter la borne t construite pour en déduire une majoration des hauteurs des autres formes. Pour le second, on exploite le lien entre les approximants de Padé de seconde espèce avec ceux de première espèce, afin de construire autrement, mais toujours à l'aide des dérivations successives d'une approximation de Padé de seconde espèce, $n+1$ formes linéaires linéairement indépendantes.

Une autre condition est la propriété (G, C), portant sur n G-fonctions $f_1, \dots, f_n$ annulées par un système différentiel linéaire du premier ordre, qui donne un contrôle sur les dénominateurs de fractions rationnelles, que nous construirons, naturellement associées à ce système différentiel. Un théorème, démontré dans l'article de Chudnovsky, [5], montre que cette condition s'avère en réalité redondante (autrement dit, toute G-fonction peut se voir comme une (G, C)-fonction pour un bon système S l'annulant).

Définissons à présent les G-fonctions.

Définition 1. *Soit $f \in \mathbb{Q}[[x]]$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. On dit que f est une G-fonction s'il existe*

$C > 1$ tel que $|a_n| \leq C^{n+1}$ et $denom(a_0, .., a_n) \leq C^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f satisfait une équation différentielle linéaire non triviale sur $\mathbb{Q}(x)$.

Remarque. *En réalité, la définition des G-fonctions est plus générale ; on obtient la véritable définition en remplaçant dans la précédente toutes les occurrences de $\mathbb{Q}$ par $\overline{\mathbb{Q}}$. Nous avons néanmoins travaillé dans notre mémoire avec la première définition, pour des considérations de simplicité, sachant qu'en réalité une théorie peut être établie avec cette seconde définition sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Considérons un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$ satisfait par des fonctions $f_1, \dots f_n$:

$$\frac{d}{dx} f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(x) f_j(x) \tag{1}$$

avec $A_{i,j}(x) \in \mathbb{Q}(x), i, j = [\![1, .., n]\!]$. On supposera également les $A_{i,j}$ tels que les solutions f_i de (1) sont toutes des G-fonctions.

On notera dans tous les cas $D(x)$ un dénominateur commun des fractions rationnelles $A_{i,j}$ (c'est à dire ici tel que $D(x)A_{i,j}$ est dans $\mathbb{Z}[x]$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$).

Ecrivons $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Le système (1) peut donc s'écrire également $\frac{d}{dx} f = Af$. En itérant cette égalité, on peut en déduire $\frac{d^m}{dx^m} f = A^{(m)} f$, où $A^{(m)} \in M_n(\mathbb{Q}(x))$, en posant $A^{(0)} = I_n$, et pour $m \in \mathbb{N}$:

$$A^{(m+1)} = A^{(m)} \cdot A + \frac{dA^{(m)}}{dx} \tag{2}$$

Ecrivons $A^{(m)} = (A_{i,j}^{(m)})$. De par (2), il s'ensuit par conséquent :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad A_{i,j}^{(m)} D(x)^m \in \mathbb{Z}[x]$$

Nous pouvons désormais définir la condition (G, C).

Définition 2. *Soit $C \geq 1$. On dit que des G-fonctions $f_1, \dots, f_n$ satisfaisant un système différentiel linéaire du premier ordre (1) vérifient la condition (G, C) si pour tout $N \in \mathbb{N}$, le dénominateur commun $\mathfrak{D}_N$ des coefficients des polynômes $\frac{1}{m!} D(x)^m A_{i,j}^{(m)}(x)$, où i, j parcourent $[\![1, n]\!]$ et m parcourt $[\![1, N]\!]$, est majoré par C^{N+1}.*

Voici les trois théorèmes concernant les G-fonctions démontrés dans [5] :

Théorème 5. *Soient $f_1(x), .., f_n(x)$ des G-fonctions avec des coefficients rationnels dans leur développement de Taylor en 0, satisfaisant un système différentiel linéaire de premier ordre (1) sur $\mathbb{Q}(x)$, et telles que les fonctions $1, f_1(x), .., f_n(x)$ soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}(x)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et tout rationnel $r = \frac{a}{b} > 0$, avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ tels* *que* $|b| \geq c_3|a|^{(n+1)(n+\epsilon)}$*,* $r \neq 0$*, les nombres* $1, f_1(r), .., f_n(r)$ *sont linéairement indépendants sur* $\mathbb{Q}$*. Pour des entiers* $H_0, .., H_n$ *arbitraires on a de plus :*

$$|H_0 + H_1 f_1(\frac{a}{b}) + .. + H_n f_n(\frac{a}{b})| > H^{-n-\epsilon}$$

avec $H = \max(|H_0|, .., |H_n|)$*, où* $H \geq h_0$*. Ici,* $c_3 = c_3(f_1, .., f_n, \epsilon) > 0$ *et* $h_0 = h_0(f_1, .., f_n, \epsilon, r) > 0$ *sont des constantes explicites.*

Plus généralement, si l'on impose seulement $|b| \geq c_4|a|^{n+1}$ *et* $H \geq h_1$ *dans les notations ci-dessus, avec des constantes explicites* $c_4 = c_4(f_1, .., f_n, n) > 0$ *et* $h_1 = h_1(f_1, .., f_n, n, r) > 0$*, on obtient l'inégalité*

$$|H_0 + H_1 f_1(\frac{a}{b}) + .. + H_n f_n(\frac{a}{b})| > H^{\lambda-\epsilon}$$

avec $\lambda = -n\frac{\log|b|}{\log|\frac{b}{a^{n+1}}|}$.

Le second est une condition suffisante d'indépendance $\mathbb{Q}$-algébrique :

Théorème 6. *Soient* $f_1(x), .., f_n(x)$ *des G-fonctions satisfaisant un système différentiel linéaire du premier ordre sur* $\overline{\mathbb{Q}}(x)$*, et telles que les fonctions* $1, f_1(x), .., f_n(x)$ *soient algébriquement indépendantes sur* $\overline{\mathbb{Q}}(x)$*. Alors pour tout* $t \geq 1$ *il existe une constante explicite* $c_5 = c_5(f_1, .., f_n, t) > 0$ *telle que pour tout nombre algébrique* $\xi \neq 0$ *de degré* $\leq t$*, si l'on a*

$$|\xi| < \exp(-c_5(\log H(\xi))^{\frac{4n}{4n+1}})$$

alors les nombres

$$1, f_1(\xi), .., f_n(\xi)$$

ne sont reliés par aucune relation algébrique de degré $\leq t$ *sur* $\mathbb{Q}(\xi)$*.*

On a noté $H(\xi)$ *la hauteur de* ξ*, c'est-à-dire la hauteur (c'est-à-dire, la somme des valeurs absolues des coefficients) d'un polynôme minimal, à coefficients entiers et dont le pgcd des coefficients vaut* 1 *l'annulant.*

Enfin, on a un théorème permettant une majoration des dénominateurs des puissances itérées du système différentiel.

Théorème 7. *Soient* $f_1(x), .., f_n(x)$ *des G-fonctions satisfaisant un système différentiel linéaire du premier ordre sur* $\overline{\mathbb{Q}}(x)$*. Si* $f_1(x), .., f_n(x)$ *sont linéairement indépendants sur* $\overline{\mathbb{Q}}(x)$*, alors les fonctions* $f_1(x), .., f_n(x)$ *sont des* (G, C)*-fonctions pour un certain* $C \geq 1$*.*

3 Approximants de Padé

Les approximants de Padé sont des approximants sur les séries formelles, où la mesure de l'approximation est mesurée par la valuation de la différence. On construit ici les approximations de Padé de seconde espèce de la famille de fonctions $f_1, \ldots f_n$; on ne détaillera pas les approximants de première espèce, dont on pourra lire une définition par exemple dans [5].

Définition 3. *Soient $f_1, \dots f_n$ des éléments de $\mathbb{Q}[[X]]$, et soient M, T, T_0 des entiers positifs. Soit Q un polynôme non nul de degré au plus T_0. Notons pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = [Qf_i]_T$ le polynôme tronqué de Qf_i à l'ordre T (c'est à dire $\sum_{0 \le k \le T} a_k X^k$ si $Qf_i = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$). Si en outre on a*

$$\mathrm{ord}_{x=0}(Q(x)f_i(x) - P_i(x)) \ge T + M + 1$$

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors la famille de polynômes $(Q; P_1, .., P_n)$ est appelée une famille d'approximants de Padé de deuxième espèce avec poids T_0 et T et d'ordre d'approximation M. On dit de façon plus concise que la famille $(Q; P_1, .., P_n)$ d'approximants de Padé de deuxième espèce a pour paramètres (T_0, T, M).

On a alors le théorème de differentiation, aisé à démontrer.

Théorème 8. *Soient $f_1, .., f_n$ des fonctions satisfaisant le système (1). Soit $(Q, P_1, .., P_n)$ une famille d'approximants de Padé de $f_1, .., f_n$ avec pour paramètres (T_0, T, M). Soit $k \ge 0$ et $M \ge k(d + 1)$. On pose :*

$$Q^{\langle k \rangle}(x) = D(x)^k \frac{1}{k!} (\frac{d}{dx})^k Q(x)$$

et $P_i^{\langle k \rangle}(x) = [Q^{\langle k \rangle}(x) f_i(x)]_{T+kd}, i \in [\![1, n]\!]$.

Avec ces notations, les polynômes $(Q^{\langle k \rangle}(x); P_1^{\langle k \rangle}(x), .., P_n^{\langle k \rangle}(x))$ sont des approximants de Padé de $f_1, .., f_n$ avec pour paramètres $(T_0 + kd, T + kd, M - k(d + 1))$.

En notation matricielle, soient $A = (A_{i,j}(x))_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ et $I = (\delta_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. Alors pour $M \ge k(d+1)$, les expressions des polynômes $Q^{\langle k \rangle}(x)$, $P_i^{\langle k \rangle}(x)$ et de $R_i^{\langle k \rangle}(x)$ ($i \in [\![1, n]\!]$) sont

$$\begin{cases} Q^{\langle k \rangle}(x) = D(x)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{d}{dx}\right)^k Q(x) \\ P_i^{\langle k \rangle}(x) = [Q^{\langle k \rangle}(x) f_i(x)]_{T+kd} \\ R_i^{\langle k \rangle}(x) = Q^{\langle k \rangle}(x) f_i(x) - P_i^{\langle k \rangle}(x) \\ \begin{pmatrix} P_1^{\langle k \rangle}(x) \\ \vdots \\ P_n^{\langle k \rangle}(x) \end{pmatrix} = D(x)^k \frac{1}{k!} (\frac{d}{dx} I - A)^k \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \vdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R_1^{\langle k \rangle}(x) \\ \vdots \\ R_n^{\langle k \rangle}(x) \end{pmatrix} = D(x)^k \frac{1}{k!} (\frac{d}{dx} I - A)^k \begin{pmatrix} R_1(x) \\ \vdots \\ R_n(x) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

Avant de démontrer le théorème d'extraction, permettant la construction des $n + 1$ formes linéaires indépendantes à partir des dérivations successives d'une approximation de Padé de seconde espèce, on a besoin de démontrer la non nullité du déterminant. Ce dernier point apparaît dans l'article de Chudnovsky [5], mais la démonstration en est erronée. On peut en trouver une correction dans [1]. Le voici.

Théorème 9. *Soient $f_1(x),..,f_n(x)$ satisfaisant au système d'équations* (1), *et supposons les fonctions $1, f_1(x),..,f_n(x)$ linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(x)$. Soit $(Q(x); P_1(x),..,P_n(x))$ une approximation de Padé non triviale de $f_1(x),..,f_n(x)$ ayant pour paramètres (T,T,M). Soit pour $k \geq 0$, les polynômes $(Q^{\langle k\rangle}(x); P_1^{\langle k\rangle}(x),..,P_n^{\langle k\rangle}(x))$ définis dans le théorème 8 (voir également les relations* (3)*). Soit $\mathfrak{P}(x)$ la matrice dont les lignes sont les $(Q^{\langle k\rangle}(x); P_1^{\langle k\rangle}(x),..,P_n^{\langle k\rangle}(x))$, et soit $\Delta(x)$ son déterminant. Alors pour M assez grand, $M \geq c_{13}$, le déterminant $\Delta(x)$ est non identiquement nul. Ici, c_{13} est une constante dépendant uniquement du système* (1) *et des ordres des zéros de $f_1,..,f_n$ en 0.*

On peut donc désormais démontrer le théorème d'extraction, fondamental dans la preuve du théorème 5.

Théorème 10. *Sous les hypothèses du théorème 9, supposons de plus $x_0 \neq 0$ et $D(x_0) \neq 0$ (autrement dit, x_0 est distinct des singularités du système* (1)*). Alors il existe des entiers $0 \leq k_0 < .. < k_n \leq T - nM + \frac{n(n+1)}{2}(d-1)$ et tels que les $n+1$ formes $\mathbb{Q}$-linéaires*

$$Q^{\langle k_j\rangle}(x_0)y_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i^{\langle k_j\rangle}(x_0)y_i$$

en les variables $y_0,..,y_n$, où $j \in [\![0,n]\!]$, sont linéairement indépendantes.

Démonstration. (ébauche) Ce théorème d'extraction qui pourrait sembler abstrait provient en réalité d'un système d'équations tout à fait concret, de la forme

$$y_i = \sum_{s=0}^{n+t} l^{\langle s\rangle}(x_0,\overline{y})\Delta_i^s(x_0) \tag{4}$$

où $l^{\langle s\rangle}(x,\overline{z}) \stackrel{\text{def}}{=} Q^{\langle s\rangle}(x)z_0 + \sum_{i=1}^n P_i^{\langle s\rangle}(x)z_i$, $0 \leq s \leq n+t \leq T - nM + \frac{n(n+1)}{2}(d-1) - n$, $\Delta_i^s(x) \in \mathbb{Q}(x)$, et x_0 n'est pas une singularité des $\Delta_i^s(x)$.

En effet, si une telle formule est admise, il devient immédiat que l'on peut extraire $n+1$ formes linéairement indépendantes parmi les $l^{\langle s\rangle}(x_0,.)$, puisqu'elles engendrent l'espace complet, de dimension $n+1$, des formes en y_i, $i \in [\![0,n]\!]$.

Il resterait donc à démontrer la validité d'une telle formule. Dans ce résumé, on se contentera simplement d'exposer les idées de la démonstration, sans entrer complètement dans les méandres des calculs qu'elle impose - on pourra néanmoins se référer au mémoire de M2 pour une preuve complète. On dispose déjà d'une formule similaire à celle que l'on veut démontrer

$$\Delta(x)z_i = \sum_{j=0}^{n} l^{\langle j\rangle}(x,\overline{z})\Delta'_{i,j}(x), \tag{5}$$

où i parcourt $[\![0,n]\!]$, et $\Delta'_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} Com(\mathfrak{P})_{i,j}$.

Néanmoins, comme $\Delta(x_0)$ peut être a priori nul, il nous est impossible de diviser par ce dernier. L'évaluation directe en x_0 ne porte donc à rien. Cet obstacle peut être contourné ;

si l'on admet temporairement $\Delta \neq 0$ (théorème 9), on peut toujours l'écrire $(x-x_0)^t\Delta_1(x)$ avec $\Delta_1(x_0) \neq 0$, puis dériver t fois avant d'évaluer en x_0 pour aboutir à une formule qui permettra la division par $\Delta_1(x_0)$, nous permettant d'isoler complètement le terme z_i. Cependant, appliquer cette opération directement ne permet pas de faire apparaître formellement ce que l'on souhaite, à savoir $z \mapsto z_i$ comme combinaison linéaire explicite à coefficients dans $\mathbb{Q}$ des $z \mapsto l^{\langle j \rangle}(x_0, z)$, puisque par exemple le $\mathbb{Q}[x]$-module $E = Vect(z \mapsto l^{\langle j \rangle}(x,z))_{j\in\mathbb{N}}$ n'a aucune raison d'être stable par dérivation par rapport à x (i.e, on ne peut pas écrire a priori les $\frac{d}{dx}l^{\langle j \rangle}(x,z)$ comme combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}[x]$ des $(l^{\langle j \rangle}(x,z))_{j\in\mathbb{N}}$).

On peut s'affranchir de cette difficulté en posant $z = z(x)$ dans la formule précédente. Cela ne change en rien l'effet des t dérivations sur le terme de gauche composée avec l'évaluation en x_0 ; de plus, il sera possible d'assigner n'importe quelle valeur y_i à $z_i(x_0)$. D'autre part, en choisissant soigneusement la fonction z, on peut s'assurer de la stabilité du $\mathbb{Q}[x]$-module $E' = Vect(l^{\langle j \rangle}(x, z(x)))$ sous l'effet de la dérivation par rapport à x. Laissons de côté le calcul ; admettons simplement qu'il suffit que $z(x)$ satisfasse :

$$\begin{cases} \frac{dz_0(x)}{dx} = 0 \\ \frac{dz_i(x)}{dx} = \frac{dD(x)}{dx}\frac{k}{D(x)}z_i(x) - \sum_{j=1}^n A_{j,i}(x)z_j(x), i \in [\![1,n]\!] \end{cases} \tag{6}$$

système auquel on peut rajouter les conditions initiales $z_i(x_0) = y_i$, $i \in [\![0,n]\!]$ (puisque x_0 n'est pas une singularité de (1)).

Ce qui, si l'on vérifiait la borne sur t, permettrait de conclure.

□

4 Théorème d'indépendance linéaire

Donnons enfin les éléments essentiels de la démonstration du théorème 5, évoqué en introduction, sans entrer dans le détail de toutes les majorations, trop nombreuses et techniques pour être exposées simplement. Pour cela, nous avons besoin du lemme de Siegel, fondamental, qui permet de contrôler la hauteur des approximants de Padé de seconde espèce, qui apparaissent naturellement comme éléments du noyau d'une certaine application linéaire.

Lemme 1. Lemme de Siegel. *Soient M et N deux entiers tels que $N > M > 0$ et soient $u_{i,j}$ ($1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$) des entiers de valeur absolue au plus U où $U \geq 1$. Alors il existe des entiers $x_1, .., x_N$ non tous nuls, ayant pour valeur absolue au plus $(NU)^{\frac{M}{N-M}}$, tels que pour tout $i \in [\![1,M]\!]$ on ait $\sum_{j=1}^N u_{i,j}x_j = 0$.*

Donnons donc les grandes lignes de la démonstration du théorème 5.

Démonstration. (ébauche) Sous les hypothèses du théorème 5, notons

$$l = H_0 + H_1 f_1(r) + .. + H_n f_n(r)$$

la quantité à minorer. Si $(Q; P_1, .., P_n)$ constitue un système d'approximants de Padé de seconde espèce de $f_1, .., f_n$ d'ordre (T, T, M), pour le moment quelconque, et $k \in \mathbb{N}^*$, il est naturel de penser que l est proche de $\frac{l'}{Q^{\langle k \rangle}(r)}$ (si $Q^{\langle k \rangle}(r) \neq 0$) où $l' = H_0 Q^{\langle k \rangle}(r) + H_1 P_1^{\langle k \rangle}(r) + .. + H_n P_n^{\langle k \rangle}(r)$. Plus précisément, on a $lQ^{\langle k \rangle}(r) - l' = \sum_{i=1}^n H_i (f_i Q^{\langle k \rangle} - P_i^{\langle k \rangle})(r)$.

Ainsi est-il naturel de chercher à minorer $|l'|$, afin que de pouvoir, en prenant des approximants de Padé sur les fonctions assez fins (qui devraient mener à des approximants sur les valeurs assez fins), en déduire une minoration de $|l|$. Si l'on suppose que $l' \neq 0$, et que l'on écrit $r = \frac{a}{b}$, alors on peut considérer l'entier non nul

$$I = \mathfrak{D}_k b^{T+kd} \left[H_0 Q^{\langle k \rangle}(r) + \sum_{i=1}^n H_i P_i^{\langle k \rangle}(r) \right]$$

qui satisfait donc $|I| \geq 1$; point clé permettant l'établissement d'une telle minoration. On en déduit donc une minoration de $|l'|$:

$$|l'| \geq \frac{1}{\mathfrak{D}_k b^{T+kd}} \tag{7}$$

Posons $(Q; P_1, .., P_n)$ un système d'approximants de Padé donné par le lemme de Siegel, et dont on peut majorer la hauteur (sans rentrer dans les détails d'une majoration explicite). Le théorème 10 nous donne $n+1$ formes linéairement indépendantes

$$Q^{\langle k_j \rangle}(x_0) y_0 + \sum_{i=1}^n P_i^{\langle k_j \rangle} y_i$$

avec $0 \leq k_0 < .. < k_n \leq T - nM + \frac{n(n+1)(d-1)}{2}$ agissant sur $\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix}$, ainsi peut-on en choisir une, indexée par un certain k compris entre ces mêmes bornes, qui ne s'annule pas en cette valeur. Notons que la majoration de k ainsi que la majoration de la hauteur de $(Q; P_1, .., P_n)$ permet d'en déduire une majoration de la hauteur de $(Q^{\langle k \rangle}; P_1^{\langle k \rangle}, .., P_n^{\langle k \rangle})$.

Cette majoration permettrait également d'en déduire une majoration des restes

$$|Q^{\langle k \rangle}(r) f_i(r) - P_i^{\langle k \rangle}(r)|$$

dépendante du poids T et tendant asymptotiquement vers zéro lorsqu'on l'augmente.

On choisit ensuite T minimum de façon à ce que la somme des restes pondérés par les H_i soit plus petite de moitié que la minoration de $|l'|$. On obtient enfin une minoration pour $|l|$.

$\square$

Références

[1] Yves André. *G-functions and Geometry*, chapter 6. Max-Planck-Institut für Mathematik, 1989.

[2] Roger Apéry. *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.* Astérisque, 1979.

[3] B.C. Berndt. *Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan.* Rocky Mountain J. of Maths, 1977.

[4] W. Dunham. *Euler, the master of us all.* The Mathematical Association of America, 1999.

[5] G.V. Chudnovsky D.V. Chudnovsky. *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions.* Colombia University, July 1984.

[6] Tanguy Rivoal Keith Ball. Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs. 146 :193–207, 2001.

[7] Tanguy Rivoal. *La fonction zêta de riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* C.R.A.S. Paris Série I Math., 2000.