La contrôlabilité de KdV

Shengquan Xiang

1 Introduction au contrôle

La théorie du contrôle s'intéresse à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système. Ici on cite l'explication de Jean-Michel Coron [8] "un système de contrôle est un système sur lequel on peut agir à l'aide d'une commande ou contrôle. Comme exemples typiques, on peut citer une voiture sur laquelle on agit grâce aux pédales d'accélérateur et de frein ou en tournant le volant ; un satellite, sur lequel on agit à l'aide de poussées délivrées par des tuyères ; un manche de balai que l'on tient au-dessus de son index, le contrôle étant la force appliquée par l'index sur ce manche ; une poussette ou un chariot de supermarché, le contrôle étant les forces que l'on applique sur les cannes de la poussette ou sur la barre du chariot avec nos deux mains. L'état du système dans ces exemples est la position et la vitesse. Ces systèmes sont modélisés par des équations différentielles ordinaires : l'état du système n'a qu'un nombre fini de composantes. Mais il existe aussi des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles : l'état du système est alors de dimension infinie. Comme exemples, on peut citer un bac avec de l'eau dedans, le contrôle étant la force appliquée au bac ; ou l'eau dans les rivières, le contrôle étant le mouvement des portes aux extrémités des biefs.

Deux problèmes importants se présentent : la contrôlabilité et la stabilisation. Le problème de la contrôlabilité est celui de savoir si, en partant d'un état donné arbitraire, on peut atteindre, à l'aide d'un contrôle dépendant du temps bien choisi, un état désiré, arbitraire aussi.

Le second problème, celui de la stabilisation du système de contrôle, peut être facilement compris à l'aide de l'expérience classique du balai que l'on veut faire tenir sur son doigt. On met le manche du balai à la verticale sur son doigt, la brosse étant en haut. Si on ne bouge pas le doigt, lentement puis plus rapidement, le balai va s'éloigner de la verticale et finira par tomber. Ceci parce que l'équilibre est instable. Pour éviter que le balai ne tombe, on bouge le doigt en fonction de la position et de la vitesse du balai. On applique ainsi au balai une *loi de rétroaction* ou *feedback* (la force appliquée par le doigt sur le balai) de façon à rendre stable un équilibre instable en l'absence du feedback. Ce feedback dépend de l'état du système, comme on le comprend en recommençant l'expérience avec les yeux fermés."

Formellement, un système de contrôle est défini comme :

Définition 1. *Soient un espace d'états H et un espace de contrôle U, un système de contrôle est la système d'évolution du type :*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1}$$

où $x(t) \in H$ est l'état et $u(t) \in U$ le contrôle en temps t .

Différent des EDPs sur lesquels on étude le problème de bien-posé, stabilisation et régularité, ici on s'intéresse aux topologies, par exemple la structure des H et U, et au temps optimal. En revanche, le système devrait toujours bien-posé, et comme on va étudier la contrôlabilité, la stabilisation au sens traditionnel n'existe pas.

Définition 2. *On dit que (1) est exactement contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si, pour tout $x_0 \in H$ et $x_T \in H$, il existe un contrôle $u(t) \in U$ tel que la solution $x(t)$ de (1) avec $x(0) = x_0$ satisfasse $x(T) = x_T$.*

Parfois pour le système en dimension infinie, on ne peut obtenir la contrôlabilité exacte, par exemple pour l'équation de chaleur. On définit également la contrôlabilité approximative :

Définition 3. *On dit que (1) est approximativement contrôlable en temps $T > 0$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $x_0 \in H$ et $x_T \in H$, il existe un contrôle $u(t) \in U$ tel que la solution $x(t)$ de (1) avec $x(0) = x_0$ satisfasse $\mid x(T) - x_T \mid \leq \epsilon$.*

2 La contrôlabilité en dimension finie

Pour $T > 0$, nous nous intéresserons aux systèmes linéaires comme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

où A et B sont deux opérateurs soit bornés soit non bornés, selon que le système est en dimension finie ou non.

Différentes sens des solutions de (2) seront obtenues selon la régularité de la donnée initiale et du contrôle. Parce que le cas pour dimension finie est plus clair, ici on va seulement donner la solution du système en dimension infinie.

Supposons que $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ et $B \in \mathcal{L}(U; \mathcal{D}(A))$, grâce à la formule de Duhamel, (2) admet une unique solution forte

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \tag{3}$$

ici x est dans l'espace $C([0, T]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, T]; H)$.

Si $x_0 \in H$ et $B \in \mathcal{L}(U; H)$, l'unique solution faible est aussi donnée par (3), mais maintenant il est une solution au sens que

$$(x(t), y)_H = (x_0, S(t)^* y)_H + \int_0^t (u(s), B^* S(t-s)^* y)_H ds, \ \ \forall y \in H. \tag{4}$$

Finalement, si $x_0 \in \mathcal{D}(A^*)'$ et $B \in \mathcal{L}(U; \mathcal{D}(A^*)')$, la formule (3) est encore l'unique solution de (2) mais au sens des transpositions qui été introduit par Jacques-Louis Lions, [7, 11]

$$\begin{aligned} (x(t), y)_{\mathcal{D}(A^*)', \mathcal{D}(A^*)} =& (x_0, S(t)^* y)_{\mathcal{D}(A^*)', \mathcal{D}(A^*)} \\ &+ \int_0^t (u(s), B^* S(t-s)^* y)_{\mathcal{D}(A^*)', \mathcal{D}(A^*)} ds, \ \ \forall y \in H. \end{aligned} \tag{5}$$

2.1 Cas linéaire : critère de Kalman

C'est le système de contrôle le plus simple, puisque la solution est déjà bien définie par (3). Du coup on peut étudier le système plus général (instationnaire)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{6}$$

où $A \in L^\infty([0,T], M_n(\mathcal{R}))$ et $B \in L^\infty([0,T], M_{n,m}(\mathcal{R}))$. Dans ce cas, on va directement étudier le contrôle exact sur lequel le premier théorème est donné par

Théorème 1. *Le système (6) est contrôlable si et seulement si sa grammienne*

$$\mathcal{G} = \int_0^T R(T,t)B(t)B(t)^* R(T,t)^* dt \tag{7}$$

est une matrice inversible.

Ici $R(t_1, t_2)$ est la résolvante du système

$$\dot{M} = A(t)M, \tag{8}$$

c'est-à-dire, R vérifie, entre les instants t_1 et t_2,

$$R(t_1, t_1) = Id, \quad \partial_1 R = A(t)R. \tag{9}$$

Malheureusement, c'est toujours un peu difficile de calculer la grammienne. Pour le système (2), il y a un résultat classique donné par Kalman

Théorème 2 (Critère de Kalman)**.** *Soient $H = \mathbb{R}^n$ et $T > 0$. L'équation (2) est contrôlable si et seulement si*

$$rang[B, AB, ..., A^{n-1}B] = n. \tag{10}$$

On remarque ici que la condition de Kalman ne dépend ni du temps T ni de l'état initiale x_0. Alors, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps T avec x_0, il est donc contrôlable en tout temps depuis tout état. Normalement, on ne peut pas trouver quelle proposition pour le système non-linéaire ou le système en dimension infinie ou le système instationnaire. Par exemple, pour le système instationnaire (2), la condition (7) dépend de T mais ne dépend pas du x_0. Autrement dit, si un système linéaire instationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0 , alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.

Pour le cas général (6), il y a le critère de Kalman aussi. Si on définit $B_0(t) = B(t)$ et $B_{k+1}(t) = \dot{B}_k(t) - A(t)B_k(t)$, alors

Théorème 3. *Supposons qu'il existe $t \in [0,T]$ tel que*

$$dim\{B_k(t)v : k \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}^m\} = n, \tag{11}$$

alors le système (6) est contrôlable.

2.2 Cas non-linéaire : les crochets de Lie

Passons à l'étude de l'équation non-linéaire (1), nous nous intéressons à la contrôlabilité à côté du point d'équilibre (x_e, u_e), c'est-à-dire $f(x_e, u_e) = 0$, ou également la contrôlabilité au voisinage de une trajectoire $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$. Introduisons le système linéaire autour de la trajectoire $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}(t), \overline{u}(t))x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\overline{x}(t), \overline{u}(t))u(t) \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{12}$$

Donc toujours par l'idée du test linéaire avec un argument de point fixe, on obtient la contrôlabilité locale de (1).

Théorème 4. *Soit $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ une trajectoire de (1). Si le système linéarisé (12) est contrôlable, alors le système non-linéaire est contrôlable autour de la trajectoire $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$.*

Mais parfois le système linéarisé n'est pas contrôlable, dans ce cas on trouve que le crochet de Lie est utile

$$[X, Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x). \tag{13}$$

En fait, si on regarde d'abord sur le système avec contrôle affine comme

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i. \tag{14}$$

Pour T donné, sur $[0, T]$, on prend $u_1 = 1, u_2 = 0$, sur $[T, 2T]$, on prend $u_1 = 0, u_2 = 1$, sur $[2T, 3T]$, on prendre $u_1 = -1, u_2 = 0$, et sur $[3T, 4T]$, on prendre $u_1 = 0, u_2 = -1$. Quand T tend vers 0, on peut trouver que l'on se déplace dans la direction $[f_1, f_2]$ qui est exactement donné par le crochet de Lie. On a un théorème donné par Chow et Rachevski [5]

Théorème 5. *Supposons que l'équation (14) satisfasse*

$$Vect\{h(0) : h \in \mathcal{L}ie\{f_1, f_2, ..., f_m\}\} = \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

alors le système est localement contrôlable au voisinage de 0 (en temps petit).

3 La contrôlabilité en dimension infinie

Dans cette section on considère la contrôlabilité du système de la forme de EDP. D'abord, on regarde le cas plus simple, la contrôlabilité d'équation du transport

$$\begin{cases} y_t + y_x = 0 & \text{dans } (0, T) \times (0, L), \\ y(t, 0) = u(t) & \text{sur } (0, T). \end{cases} \tag{16}$$

Ce système est bien posé au sens de la transposition (qui est la plus importante définition de la solution du système en théorie de contrôle).

Définition 4. *Soient* $T > 0, y_0 \in L^2(0, L)$ *et* $u \in L^2(0, T)$. *Une solution du problème de Cauchy* (16) *et* $y(0, x) = y_0$, *est une fonction* $y \in C^0([0, T]; L^2(0, L))$ *tel que, pour chaque* $\tau \in [0, T]$ *et pour chaque* $\phi \in C^1([0, \tau] \times [0, L])$ *qui satisfait*

$$\phi(t, L) = 0, \forall t \in [0, \tau],$$

on a

$$\begin{aligned} -\int_0^\tau \int_0^L (\phi_t + \phi_x) y dx dt - \int_0^\tau u(t)\phi(t, 0)dt \\ + \int_0^L y(\tau, x)\phi(\tau, x)dx - \int_0^L y_0(x)\phi(0, x)dx = 0. \end{aligned}$$

Pour ce système on étudie directement le contrôle exact, on a

Théorème 6. *Le système de contrôle* (16) *est contrôlable en temps* T *si et seulement si* $T \geq L$.

En fait, la solution du problème de Cauchy, (16) et $y(0, x) = y_0$, est donné par

$$y(T, x) = y_0(x - T), si x \geq T, \tag{17}$$
$$y(T, x) = u(T - x), si x < T. \tag{18}$$

Donc si $T < L$, on peut choisir $y_0(x) \equiv 0$ et $y_1(x) \equiv 1$, maintenant quelque soit contrôle u, $y(T, x) \neq y_1(x)$. En revanche, si $T \geq L$ on peut obtenir la contrôlabilité facilement.

Mais pour les autres équations, on ne peut pas résoudre les équations. Et puis le opérateurs A devient un opérateur non-borné l'étude sur lequel est pas tellement facile, dans ces cas on souvent utiliser la méthode introduite par Jacques-Louis Lions : Hilbert Uniqueness Method, [7, 11].

3.1 Linéaire : Hilbert Uniqueness Method

Cette méthode est souligne pour la contrôlabilité exacte du système linéaire. Soit $T > 0$ bien choisi, $\mathcal{U}$ est l'espace de contrôle dans temps $[0, T]$, H est l'espace du état.

★ *Transférer le problème de contrôlabilité à un problème d'application*

En fait, pour chaque $y_0 \in H$ on peut définir une application de $\mathcal{U}$ à H

$$\mathcal{F}_{y_0} : \mathcal{U} \longrightarrow H, \tag{19}$$

où $\mathcal{F}_{y_0}(u) = y(T)$, y est la solution de Cauchy avec l'état initial y_0 et le contrôle u.

Alors il faut seulement montrer que pour chaque état initial, l'application $\mathcal{F}_{y_0}$ est surjective.

★ *Exactement contrôlable* $\Leftrightarrow$ *Exactement contrôlable à partir de* 0

Définition 5. *On dit que* (2) *est exactement contrôlable en temps* $T > 0$ *à partir de* 0 *si et seulement si, pour tout* $y_0 \in H$ *et* $y_T \in H$*, il existe un contrôle* $u(t) \in U$ *tel que la solution* $x(t)$ *de* (2) *avec* $y(0) = y_0$ *satisfasse* $y(T) = y_T$

En effet, clairement la contrôlabilité exacte implique trivialement contrôlabilité à partir de zero. L'inverse se trouve en découplant la dynamique issue du contrôle et celle issue de l'état initial, on peut écrire $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ où y_1 est la solution de système avec $y_0 = 0$ et y_2 est la solution avec $u = 0$.

★ *La dualité entre contrôlabilité et observabilité*

On sait déjà que il suffit de montrer que l'application $\mathcal{F}_0$ est surjective, pour les images des opérateurs entre les espaces de Hilbert on rappelle un résultat d'analyse fonctionnelle suivant :

Théorème 7. *Soient* E *et* F *deux espace de Hilbert et* $L : \mathcal{D}(L) \subset E \to F$ *un opérateur fermé et de domaine dense. Alors* L *est surjectif si et seulement s'il existe une constante* c *telle que*

$$\|x\|_F \leq c\|L^*x\|_E, \quad \forall x \in \mathcal{D}(L^*). \tag{20}$$

En appliquant le théorème précédent on obtient :

Corollaire 1. *En temps* $T > 0$*, le système* (1) *est*

- exactement contrôlable *si et seulement s'il existe une constante* $C_T > 0$ *telle que*

$$\|x\|_H \leq C_T\|\mathcal{F}^*x\|_E, \quad \forall x \in H. \tag{21}$$

- approximativement contrôlable *si et seulement si*

$$\mathcal{F}^*x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \forall x \in H. \tag{22}$$

L'inégalité (21) est appelée inégalité d'observabilité sur le théorie de contrôle. La propriété (22) est appelée principe de continuation unique.

Maintenant on regarde les équations de KdV, nous avons en vue le système de contrôle

$$\begin{cases} y_t + y_{xxx} + y_x + yy_x = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y(t, 0) = y(t, L) = 0 & \text{sur } (0, +\infty), \\ y_x(t, L) = u(t) & \text{sur } (0, +\infty), \end{cases} \tag{23}$$

où, pour $t \in [0, +\infty)$, $y(t, \cdot) \in L^2(0, L)$ est l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}$ est le contrôle.

La recherche sur la contrôlabilité du système (23) a commencé en 1997 quand Lionel Rosier a montré dans [12] que les équations de KdV linéarisées sont contrôlables si et seulement si $L \notin \mathcal{N}$ et que les équations de KdV non linéaires sont (localement) contrôlables si $L \in \mathcal{N}$ où

$$\mathcal{N} := \left\{ 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + lk + k^2}{3}}; l, k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Son travail montre aussi que, pour $L \in \mathcal{N}$, la partie non contrôlable pour le linéarisé est un espace vectoriel M de dimension finie (qui peut être arbitrairement grande).

Théorème 8. *Soient $L > 0$ et $T > 0$. Le système contrôle*

$$
\begin{cases}
y_t + y_{xxx} + y_x = 0 & \textit{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\
y(t, 0) = y(t, L) = 0 & \textit{sur } (0, +\infty), \\
y_x(t, L) = u(t) & \textit{sur } (0, +\infty),
\end{cases}
\tag{24}
$$

est contrôlable si et seulement si $L \notin \mathcal{N}$. Si $L \notin \mathcal{N}$, le système contrôle (24) est contrôlable.

La méthode qu'il utilise est exactement Hilbert Uniqueness Method. En fait, dans ce cas il faut montrer l'inégalité d'observabilité suivante

$$
\|y_0\|_{L^2(0,L)} \leq c\|y_x(\cdot, 0)\|_{L^2(0,T)}, \quad \forall y_0 \in L^2(0, L).
\tag{25}
$$

En obtenant un lemme de spectre suivant on trouve Théorème 8.

Lemme 1. *Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et*

$$
\varphi \in H^3((0, L); \mathbb{C}) \backslash \{0\}
$$

tels que

$$
-\varphi_x - \varphi_{xxx} = \lambda\varphi, \varphi(0) = \varphi(L) = \varphi_x(0) = \varphi_x(L) = 0,
$$

si et seulement si

$$
L \in \mathcal{N}.
$$

3.2 Nonlinéaire : Power Series Expansion

Comme on sait, quand $L \in \mathcal{N}$ le système linéairisé n'est pas contrôlable. Toutefois, pour toutes les longueurs critiques (i.e. les longueurs L dans $\mathcal{N}$) il a été montré que les termes non linéaires donnent la contrôlabilité, au moins pour des temps assez grands : cela a d'abord était fait pour $k = l = 1$ par Jean-Michel Coron et Emmanuelle Crépeau dans [9] (dans ce cas la contrôlabilité est en temps petit), puis pour $k = 1$ et $l = 2$ par Eduardo Cerpa dans [4] et toutes les longueurs critiques ont été finalement traitées par Eduardo Cerpa et Emmanuelle Crépeau dans [3]. La méthode qu'ils ont utilisé est Power Series Expansion.

Normalement, on considère la contrôlabilité à côté d'équilibre, puisque on peut l'étudier par perturbation. Mais quand le système linéarisé n'est pas contrôlable, la perturbation ne marche pas. Il faut utiliser le terme non-linéaire pour entrer l'espace qui n'est pas accessible dans le système linéarisé. Pour KdV on peut voir l'échelle (scaling) :

$$
y := \varepsilon y^1 + \varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^3 y^3 + ... \tag{26}
$$

$$
u := \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \varepsilon^3 u^3 + ... \tag{27}
$$

Donc l'ordre 1 est donné par (y^1, u^1), l'ordre 2 est donné par (y^2, u^2) etc. Les dynamiques des ces ordres différents sont donnés par

$$\begin{cases} y_t^1 + y_{xxx}^1 + y_x^1 = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^1(t, 0) = y^1(t, L) = 0 & \text{sur } (0, +\infty), \\ y_x(t, L) = u^1(t) & \text{sur } (0, +\infty), \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} y_t^2 + y_{xxx}^2 + y_x^2 + y^1 y_x^1 = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^2(t, 0) = y^2(t, L) = 0 & \text{sur } (0, +\infty), \\ y_x^2(t, L) = u(t) & \text{sur } (0, +\infty), \end{cases} \tag{29}$$

etc.

Pour le cas dim $M = 1$, où M est l'espace non-contrôlable, Jean-Michel Coron et Emmanuelle Crépeau dans [9] ont montré la contrôlabilité en temps petit par un lemme suivant :

Lemme 2. *Soit $T > 0$. Soit dim $M = 1$. Pour chaque point z de M, il existe (u^1, u^2, u^3) tel que, si (y^1, y^2, y^3) est la solutions de*

$$\begin{cases} y_t^1 + y_{xxx}^1 + y_x^1 = 0 & \textit{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^1(t, 0) = y^1(t, L) = 0 & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y_x^1(t, L) = u^1(t) & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y^1(0) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} y_t^2 + y_{xxx}^2 + y_x^2 + y^1 y_x^1 = 0 & \textit{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^2(t, 0) = y^2(t, L) = 0 & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y_x^2(t, L) = u^2(t) & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y^2(0) = 0, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} y_t^3 + y_{xxx}^3 + y_x^3 + y^1 y_x^2 + y_x^1 y^1 = 0 & \textit{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^3(t, 0) = y^3(t, L) = 0 & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y_x^3(t, L) = u^3(t) & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y^3(0) = 0, \end{cases} \tag{32}$$

alors

$$y^1(T) = 0, \quad y^2(T) = 0, \quad y^3(T) = z. \tag{33}$$

Remarque 1. *C'est plus naturel de considérer l'existence de (u^1, u^2) tel que la solution (y^1, y^2) de*

$$\begin{cases} y_t^1 + y_{xxx}^1 + y_x^1 = 0 & \textit{dans } (0, +\infty) \times (0, L), \\ y^1(t, 0) = y^1(t, L) = 0 & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y_x^1(t, L) = u^1(t) & \textit{sur } (0, +\infty), \\ y^1(0) = 0, \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} y_t^2 + y_{xxx}^2 + y_x^2 + y^1 y_x^1 = 0 & \text{dans } (0,+\infty)\times(0,L), \\ y^2(t,0) = y^2(t,L) = 0 & \text{sur } (0,+\infty), \\ y_x^2(t,L) = u^2(t) & \text{sur } (0,+\infty), \\ y^2(0) = 0, \end{cases} \tag{35}$$

satisfait $y^1(T) = 0$ et $y^2(T) = z$. Malheureusement, il est remarqué dans [9] que il n'existe pas.

Il reste encore un problème important pour la contrôlabilité de KdV, dit la contrôlabilité en temps petit quand dim $M > 1$.

Prolème 1. *Soit dim $M > 1$. Si le système (23) est contrôlable en temps petit ?*

3.3 Les autres méthodes pour le système nonlinéaire

★ *La méthode du retour*

Il est introduit par Jean-Michel Coron pour montrer la contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 2 si le contrôle agit sur chaque composante connexe du bord et la contrôlabilité approchée pour des contrôles distribués ou frontière, même s'ils n'agissent pas sur toutes les composantes connexes du bord. Cette méthode est bien utilisé pour montrer la contrôlabilité des plusieurs modèles : Euler, Navier-Stokes, Saint-Veant, Vlasov Poisson, Isentropic Euler, Quantum modèle, Hyperbolique, Bloch, Parabolique etc.

Il reste encore un problème plus important qui est encore ouvert

Prolème 2 (Jacques-Louis Lions, [7, 11]). *Soit $T > 0$. Soient $y_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^l$ et $y_1 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^l$ deux fonctions telles que*

$$\textit{div } y_0 = 0 \ \textit{ dans } \overline{\Omega}, \tag{36}$$

$$\textit{div } y_1 = 0 \ \textit{ dans } \overline{\Omega}, \tag{37}$$

$$y_0 \ \textit{satisfait les conditions au bord} \ \ \textit{sur } \Gamma\backslash\Gamma_0, \tag{38}$$

$$y_1 \ \textit{satisfait les conditions au bord} \ \ \textit{sur } \Gamma\backslash\Gamma_0. \tag{39}$$

S'il existe une trajectoire de le système de Navier-Stokes ou de Euler tel que

$$y(0,\cdot) = y_0 \ \textit{ dans } \overline{\Omega} \tag{40}$$

et, pour une topologie,

$$y(T,\cdot) \ \textit{est approché } y_1 \ \textit{dans } \overline{\Omega}? \tag{41}$$

★ *La méthode des déformations quasi-statiques*

Introduit par Jean-Michel Coron et Emmanuel Trélat, cette méthode a donné la contrôlabilité entre états stationnaires pour des équations paraboliques 1-D semi-linéaires et pour des équations des ondes 1-D semi-linéaires.

4 Stabilisation avec l'aide d'une loi de feedback

Si on dit que le problème de contrôle est un open-loop, alors le problème de stabilisation est de close-loop, la loi de feedback est juste comme un champ sur H. La définition de stabilité est

Définition 6 (Stabilité asymptotique globale à l'aide d'une loi de feedback)**.** *On dit que le système* (1) *est (localement) asymptotiquement stable (à l'aide d'un feedback) en le point d'équilibre x_e s'il existe un feedback $u(t) = F(x(t))$ tel que* (1) *est (localement) asymptotiquement stable.*

Par la même idée on peut également définir la stabilisation aux autres sens, stabilité exponentielle, stabilité rapide ou stabilisation en temps fini.

Bien que le problème de stabilisation soit plus difficile que le problème de contrôlabilité, il y a un fait qui dit que ces deux problèmes sont proches :

Croyance 1. *Si un système est contrôlable, alors il peut être stabilisé à l'aide d'une loi de feedback.*

En fait, pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, le théorème du placement de pôles nous dit que ceux qui sont contrôlables peuvent être stabilisés exponentiellement à l'aide de lois de feedback linéaires.

Théorème 9. *Supposons que* (1) *est contrôlable, alors il existe une matrice M telle que le feedback $u = Mx$ rende le point d'équilibre* $(0, 0)$ *stable exponentiellement (ou rapidement).*

Dans beaucoup de systèmes de type EDP on peut aussi obtenir la stabilisation avec ce type de transforme, nommé la méthode de backstepping. Ce que est difficile est l'étude du problème de la stabilisation des systèmes non-linéaires contrôlables mais à linéarisé non contrôlable ainsi que la stabilisation rapide. L'accent sera mis sur des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles. Par ailleurs le premier théorème de Lyapunov nous assure qu'un feedback régulier stabilisant exponentiellement le linéarisé au point d'équilibre stabilisera aussi exponentiellement (mais localement seulement bien sûr) le système non linéaire.

Théorème 10. *Soit x_e un point d'équilibre de* (1)*. S'il existe une fonction de Lyapunov point x_e de* (1)*, alors x_e est stable. Si la fonction de Lyapunov est stricte, alors x_e est globalement asymptotiquement stable.*

La situation est significativement plus compliquée pour les systèmes localement contrôlables mais dont le linéarisé n'est pas contrôlable, systèmes pour lesquels la non linéarité joue un rôle crucial. Même dans le cas plus simple de la dimension finie, Héctor Sussmann dans [14] et Roger Brockett dans [2] ont montré que de nombreux systèmes contrôlables ne pouvaient pas être stabilisés asymptotiquement à l'aide de lois de feedback stationnaires continues. Afin de pallier ce problème, une des principales stratégies consiste à utiliser des loi de feedback instationnaires (i.e. qui varient avec le temps), périodiques en temps : il est montré dans [6] que la plupart des systèmes non linéaires localement contrôlables en dimension finie peuvent être stabilisés asymptotiquement et même en temps fini par de tels feedbacks. Des feedbacks périodiques en temps asymptotiquement stabilisants ont été construits pour de nombreux systèmes physiques en dimension finie, mais très peu de ces feedbacks donnent une stabilisation en temps fini et le cas de systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles n'a été traité pour l'instant. Il reste donc beaucoup à faire et la thèse portera sur ces deux thématiques : commandes instationnaires asymptotiquement stabilisantes pour des systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles et stabilisation asymptotique rapide voire en temps fini. C'est un sujet à cheval sur la théorie des systèmes dynamiques, la théorie qualitative des EDOs, la géométrie riemannienne, l'analyse semi-classique, la théorie des équations aux dérivées partielles (caractère bien posé du système bouclé par le feedback, inégalités de Carleman,...).

Dans le cas de la dimension finie (équations différentielles ordinaires avec contrôle), l'objectif dans ce cas est de trouver des méthodes de constructions de feedbacks instationnaires stabilisant en temps fini, méthodes assez générales pour pouvoir s'appliquer à de nombreux systèmes, notamment ceux pour lesquels la stabilisation asymptotique par feedbacks instationnaires a déjà été obtenue.

Pour les systèmes modélisés par des équations aux dérivées partielles, on s'attachera à traiter des équations particulières comme les équations de Korteweg-de Vries (KdV), de Saint-Venant et de Schrödinger. Il s'agit non seulement d'équations importantes en physique mais aussi représentatives d'une assez grande variété de structures dans la théorie du contrôle et dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

Par exemple, pour la stabilisation de KdV, dans le cas où le linéarisé est contrôlable (i.e. quand $M = \{0\}$), la stabilisabilité exponentielle rapide (c'est-à-dire à taux de décroissance exponentielle aussi grand que l'on veut) a été montrée par Jean-Michel Coron et Qi Lü dans [10]. On regardera la stabilisation de (23) par des feedbacks instationnaires $(t, y) \in \mathbb{R} \times L^2(0, L) \mapsto \mathbb{R}$ dans le cas où le linéarisé est non contrôlable. On regardera aussi la stabilisation en temps fini, y compris dans le cas où le linéarisé est contrôlable.

La situation pour les équations de Schrödinger et de Saint-Venant que nous avons en vue est plus compliquée car l'espace vectoriel non contrôlable pour le linéarisé est de dimension infinie. Par exemple, le système de Saint-Venant que nous considérerons est

$$\begin{cases} H_t(t,x) + (Hv)_x(t,x) = 0 & \text{dans} \quad (0,+\infty) \times (0,L), \\ v_t(t,x) + \big(gH + \dfrac{v^2}{2}\big)_x(t,x) = -u(t) & \text{dans} \quad (0,+\infty) \times (0,L), \\ v(t,0) = v(t,L) = 0 & \text{sur} \quad (0,+\infty). \end{cases} \tag{42}$$

Il s'agit d'un système de contrôle où, au temps t, l'état est $Y(t) := \big(H(t,\cdot), v(t,\cdot)\big)$ et le contrôle est $u(t) \in \mathbb{R}$. Ce système modélise le mouvement de l'eau dans un bac dont l'accélération est $u(t)$ (le contrôle). Prenons toutes les constantes physiques égales à 1 (y compris la hauteur d'eau d'équilibre), le linéarisé autour de l'équilibre s'écrit

$$\begin{cases} h_t(t,x) + v_x(t,x) = 0 & \text{dans} \quad (0,+\infty) \times (0,1), \\ v_t(t,x) + h_x(t,x) = -u(t) & \text{dans} \quad (0,+\infty) \times (0,1), \\ v(t,0) = v(t,L) = 0 & \text{sur} \quad (0,+\infty). \end{cases} \tag{43}$$

Ce système linéaire n'est pas contrôlable : sa partie non contrôlable est de dimension infinie, elle est formée des couples (h, v) avec h pair par rapport à $x = 1/2$ et v impair par rapport à $x = 1/2$. Il a été toutefois démontré par Jean-Michel Coron dans [6] que les non linéarités donnent de nouveau la contrôlabilité locale si le temps est assez grand. Par contre on ne sait pas stabiliser asymptotiquement le système de contrôle (42). On se propose de regarder ce problème. Un problème similaire existe aussi pour différents systèmes quantiques, comme une particule dans une boite quantique (voir [1, 13] pour la contrôlabilité). De nouveau on regardera aussi la stabilisation en temps fini.

Références

[1] K. Beauchard, *Local controllability of a 1-D Schrodinger equation*, J. Math. Pures Appl. 84 (2005), 851–956.

[2] R. W. Brockett, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, Differential geometric control theory (Houghton, Mich., 1982) (R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, eds.), Progr.Math. 1983, 181–191.

[3] E. Cerpa, E. Crépeau, *Boundary controllability for the nonlinear Korteweg-de Vries equation on any critical domain*, Ann. I. H. Poincaré - AN. 26 (2009), 457–475.

[4] E. Cerpa, *Exact controllability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation on a critical spatial domain*, SIAM J. Control Optim. 46 (2007), 877–899.

[5] W.-L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math Ann, (1939), 98–105.

[6] J.-M. Coron, *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law*, SIAM J. Control Optim. 33 (1995), 804–833.

[7] J.-M. Coron, *Local controllability of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (2002), 513–554.

[8] J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs Volume 136 (2007).

[9] J.-M. Coron, *Contrôlabilité et stabilisation, cérémonie de réception des nouveaux membres, le 23 juin 2015*, (2015)

[10] J.-M Coron, E. Crépeau, *Exact boundary controllability of a nonlinear KdV equation with critical lengths*, J.Eur.Math.Soc. 6 (2004), 367–398.

[11] J.-M Coron, Q. Lü, *Local rapid stabilization for a Korteweg-de Vries equation with a Neumann boundary control on the right*, J. Math. Pures Appl. 102 (2014), 1080–1120.

[12] J.-L Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Recherches en Mathématiques Appliquées, vol. 8, (1988).

[13] L. Rosier, *Exact boundary controllability for the Korteweg-de Vries equation on a bounded domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2 (1997), 33–55.

[14] P. Rouchon, *Control of a quantum particule in a moving potential well*, 2nd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control, Seville (2003).

[15] H. J. Sussmann, *Subanalytic sets and feedback control*, J. Differential Equations 31 (1979), 31–52.