Introduction au domaine de recherche

Frédéric Marbach

Octobre 2012

1 Introduction au contrôle

En mathématiques, le contrôle désigne la théorie qui vise à comprendre la façon dont une commande permet aux humains d'agir sur un système qu'ils souhaitent maîtriser. Cette définition recouvre naturellement de très nombreux champs d'applications ; un ingénieur pourra vouloir contrôler un système mécanique en lui appliquant des forces, un économiste pourra vouloir agir sur un équilibre financier en modifiant un taux, un chimiste pourra vouloir améliorer son procédé en régulant la température, etc. Nous donnerons dans la suite des exemples précis de systèmes de contrôle.

Il est intéressant de noter que, malgré la diversité des situations concrètes qui peuvent être appréhendées ainsi, la « théorie du contrôle » fournit un cadre commun à tous ces univers. Il est donc remarquable que l'on parvienne à obtenir des résultats généraux, qui pourront s'appliquer dans de nombreux domaines.

Pour un panorama très complet et récent sur la théorie du contrôle, lire [5].

1.1 Qu'est-ce qu'un système de contrôle ?

Commençons par définir ce que nous entendons par l'expression « système de contrôle » :

Définition 1. *De manière abstraite, un système de contrôle est la donnée d'un espace d'états X, d'un espace de contrôles U et d'une loi d'évolution du type :*

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \tag{1}$$

où $x(t) \in X$ est l'état du système à l'instant $t \in [0, T]$ et $u(t) \in U$ le contrôle choisi.

Évidemment, toute la complexité de l'étude d'un système de contrôle dépendra de la complexité des espaces X et U, et surtout de la nature de l'équation d'évolution (1). En particulier, la distinction majeure est de savoir si X et U sont des espaces de dimension finie ou infinie. Intuitivement, on sent déjà que si l'état $x(t)$ n'est caractérisé que par un nombre finis de paramètres, il sera beaucoup plus facile de les maîtriser que s'ils sont en nombre infinis ! Quant à l'équation d'évolution, la principale simplification possible sera de supposer que la valeur de la fonction $f(t, x, u)$ dépend linéairement du couple (x, u). Cette approche sera justifiée, comme souvent, par le fait qu'elle décrira bien un système au voisinage d'un point d'équilibre.

Exemple 1. *Donnons l'exemple d'une locomotive circulant sur une voie rectiligne. Notons $x_1(t) \in \mathbb{R}$ sa position sur la voie à l'instant t, et $x_2(t) \in \mathbb{R}$ sa vitesse. Notons $u(t) \in \mathbb{R}$ la commande caractérisant la force développée par les roues motrices sur les rails. Si l'on suppose qu'il y a des frottements dynamiques dans l'air (par exemple quadratiques en la vitesse), on peut écrire, après adimensionnement :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1}(t) & = & x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) & = & u(t) - x_2(t) \left| x_2(t) \right|. \end{array} \right.$$

Le moteur étant limité, la puissance $u(t)$ doit être comprise entre $-u_{max}$ et u_{max}.

1.2 Les questions typiques de contrôlabilité

Une fois que l'on s'est fixé un système et sa modélisation en termes mathématiques au sens de la définition 1, il existe une multitude de questions mathématiques auxquelles il est possible de s'intéresser. Bien sûr, celles-ci doivent être guidées par des considérations sur la réalité que l'on décrit.

En premier lieu, on trouve des questions dites d'accessibilité, qui se formulent ainsi : étant donnés deux états x_i et x_f de X, est-il possible de guider un système initialement en x_i jusqu'à l'état x_f ? Ou bien, depuis un état initial particulier x_i, quels sont tous les états qu'il est possible d'atteindre ? L'existence d'un chemin entre deux états est une question de nature assez géométrique.

Lorsqu'il n'est pas possible d'atteindre l'état final souhaité x_f, une question naturelle est de savoir si l'on peut s'en rapprocher aussi près que l'on souhaite. En dimension infinie, cette notion de contrôlabilité approchée sera souvent fructueuse.

Le temps est un paramètre essentiel dans un problème de contrôle. En effet, la plupart des résultats dépendent *a priori* du temps que l'on s'est fixé pour réaliser un objectif. Cette idée somme toute assez intuitive est cruciale pour la suite. On pourra s'intéresser à savoir s'il est possible de relier x_i et x_f en un temps quelconque fini, ou bien en un temps aussi petit que l'on souhaite, ou bien encore en un temps commun à tous les couples (x_i, x_f).

Exemple 2. *Considérons le système de contrôle :*

$$\dot{x}(t) = \sin u(t).$$

L'état est $x(t) \in \mathbb{R}$ et le contrôle $u(t) \in \mathbb{R}$. Il est assez facile de voir que ce système est contrôlable, mais pas en temps aussi petit que l'on souhaite. En effet, $|\dot{x}| \leq 1$. Le temps minimal pour relier deux états x_i et x_f est donc :

$$T^* = |x_i - x_f|.$$

Un autre pan de la théorie du contrôle est celui de la stabilisation. Étant donné un état d'équilibre instable d'un système dynamique, est-il possible de rendre celui-ci stable en appliquant un contrôle adéquat ? L'ingénieur aura ensuite envie de calculer le contrôle à appliquer pour avoir un système en boucle fermée, en écrivant $u(t) = K(x(t))$. Mais, est-il toujours possible d'exprimer le contrôle stabilisateur directement en fonction de l'état ? S'il est difficile de savoir à quand dater le début de la théorie du contrôle, le régulateur de Watt fait partie des objets fondateurs ; en effet, celui-ci permet de stabiliser un moteur à vapeur à partir d'un retour d'état.

Exemple 3. *Le roi des systèmes de contrôle de dimension finie est le pendule inversé, monté sur un chariot. Notons $x_1(t)$ l'angle entre le pendule et la verticale, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ et ω la pulsation du pendule. Pour simplifier, supposons que l'on contrôle directement l'accélération du chariot $a(t)$ (et non pas la force qui lui est appliquée). On obtient le système :*

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) &= x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) &= \omega^2 \sin x_1(t) + a(t) \cos x_1(t). \end{cases}$$

Il est possible de stabiliser ce système autour de la position d'équilibre instable $x_1 = 0$.

Une dernière famille de questions est celle de l'optimalité des choix effectués. En effet, une fois que l'on sait qu'il est possible d'amener un système d'un état à un autre, il va être possible d'affiner le résultat ; par exemple en cherchant à le faire en un temps minimal, en dépensant le minimum d'énergie, etc. Ceci mènera à deux questions : le temps optimal de contrôlabilité et le coût de la contrôlabilité (que l'on mesurera par la norme du contrôle choisi).

Mentionnons enfin le domaine du contrôle dit stochastique, qui s'intéresse aux situations où la dynamique du système considéré est aléatoire. Il devient alors évidemment beaucoup plus difficile d'établir des résultats. Néanmoins, ce type de modélisation prend par exemple tout son sens en finance.

2 Premiers résultats en dimension finie

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, les systèmes de contrôle les plus simples sont ceux pour lesquels l'état $x(t)$ et le contrôle $u(t)$ vivent dans des espaces vectoriels de dimension finie, disons par exemple $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ (même si on pourrait travailler dans des variétés de dimension finie). Une simplification supplémentaire est de supposer que l'équation d'évolution régissant le mouvement du système est une équation différentielle ordinaire linéaire (en l'état et en le contrôle).

Définition 2. *Soit $A \in L^\infty([0,T], \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in L^\infty([0,T], \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R}))$. Fixons un état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un contrôle $u(t) \in L^1([0,T], \mathbb{R}^m)$. Introduisons le système de contrôle :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Nous dirons que $x \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^n)$ est une trajectoire solution du système de contrôle (2) lorsque :

$$\forall \tau \leq T, \quad x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau A(t)x(t) + B(t)u(t)dt.$$

Il est bien connu que le problème de Cauchy (2) est bien posé et que le système de contrôle a par conséquent une unique solution au sens de la définition 2. Nous parlerons donc dans la suite de « la solution du système (2) » sans plus de précautions. Nous dirons qu'il est **contrôlable** en temps T lorsque, pour tout couple d'état initial x_0 et final x_1, il existe un contrôle $u(\cdot)$ telle que la solution correspondante vérifie $x(T) = x_1$.

2.1 Grammienne de contrôlabilité

La première façon de caractériser la contrôlabilité du système (2) a été décrite dès 1963 par Kalman, Ho et Narendra dans [8]. Elle fait intervenir une matrice dite « grammienne » .

Théorème 1. *Le système (2) est contrôlable si et seulement si sa grammienne*

$$\mathfrak{G} = \int_0^T R(T,t)B(t)B(t)^* R(T,t)^* dt$$

est une matrice inversible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, où l'on a noté $R(t_1, t_2)$ la résolvante du système $\dot{M} = A(t)M$, entre les instants t_2 et t_1, c'est-à-dire la solution matricielle de $R(t_2, t_2) = Id_n$ et $\partial_1 R = A(t)R$.

Démonstration. Ce résultat se démontre à l'aide de la formule de Duhamel pour les équations différentielles ordinaires. La preuve permet même d'expliciter un contrôle convenable :

$$u(t) = B(t)^* R(T,t)^* \mathfrak{G}^{-1} (x_1 - R(T,0)x_0).$$

Le sens direct s'obtient par contraposée en raisonnant sur le noyau de $\mathfrak{G}$. □

Le calcul explicite de la résolvante $R(t_1, t_2)$ étant rarement possible (à moins que la famille de matrices $A(t)$ commute entièrement), le calcul de $\mathfrak{G}$ est tout aussi peu souvent possible.

2.2 Systèmes autonomes et condition de Kalman

Un cas particulier important est celui où les matrices A et B ne dépendent pas du temps. On parle de système invariant dans le temps. Dans ce cadre simplifié, il existe un critère plus facile à vérifier ne faisant intervenir que des calculs algébriques. Il s'agit du critère dit « de Kalman », mais remontant au moins aux travaux de LaSalle en 1960 (lire [9]).

Théorème 2. *Supposons que* $A(t) \equiv A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B(t) \equiv B \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{R})$*. Le système (2) est contrôlable si et seulement si :*

$$\mathit{Vect}\left\{A^k Bv, \quad k \in \{0, \dots n-1\} \quad v \in \mathbb{R}^m\right\} = \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Démonstration. Tout d'abord, il faut remarquer que, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, on peut très bien prendre $k \in \mathbb{N}$ dans la condition (3). De plus, à un instant donné, l'ensemble

$$\mathrm{Vect}\,\{Bv, \quad v \in \mathbb{R}^m\}$$

est précisément l'ensemble des directions vers lesquelles on peut se déplacer. La condition (3) n'est donc pas très étonnante. La preuve utilise la notion de grammienne et l'analyticité $t \mapsto e^{tA}$. □

Ce théorème est très important car il permet de voir que, pour un système linéaire, de dimension finie et invariant en temps, la contrôlabilité ne dépend pas du temps $T > 0$. Ce ne sera plus le cas pour les systèmes de dimension infinie ou les systèmes non linéaires.

2.3 Conditions analogues plus générales

Dans le cas des systèmes linéaires de dimension finie dépendant du temps, il existe des critères analogues à la condition de Kalman. Introduisons $B_0(t) = B(t)$ et $B_{k+1}(t) = \dot{B}_k(t) - A(t)B_k(t)$.

Théorème 3. *Supposons qu'il existe* $t \in [0, T]$ *tel que :*

$$\mathit{Vect}\{B_k(t)v, \quad k \in \mathbb{N} \quad v \in \mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

alors le système (2) est contrôlable sur $[0, T]$.

La réciproque n'est pas vraie. Cependant, on a le théorème suivant, dû à Chow et Rashevski.

Théorème 4. *Si les fonctions* $A(\cdot)$ *et* $B(\cdot)$ *sont analytiques sur* $[0, T]$ *et que le système (2) est contrôlable, alors la condition (4) est vérifiée pour tout* $t \in [0, T]$*, et l'on peut même se contenter de* $k \in \{0, \dots n-1\}$ *sauf pour un nombre fini de valeurs de* t*.*

2.4 Stabilisation par retour d'états

Pour un système linéaire autonome, l'origine $(0, 0)$ est toujours un état d'équilibre. Selon la matrice A considérée, celui-ci peut-être stable ou instable. Le critère est celui de Hurwitz et tient compte de la partie réelle des valeurs propres de A. Lorsque celles-ci sont négatives, le système est naturellement stable. Lorsque cela n'est pas le cas, on aimerait rendre l'origine stable au moyen d'un contrôle de la forme $u(t) = Kx(t)$ où K est une matrice de $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Théorème 5. *Si la paire* (A, B) *vérifie la condition de Kalman, alors il est possible de trouver* K *telle que* $A + BK$ *vérifie le critère de Hurwitz. En realité, il est même possible de choisir toutes les valeurs propres de* $A + BK$*. C'est un théorème de placement de pôles.*

Démonstration. Ce résultat se démontre en se ramenant au cas $m = 1$ et en prenant le système sous sa forme de Brunovski (c'est-à-dire lorsque A est une matrice compagnon et que $B = {}^{\mathrm{tr}}(0, \dots, 1)$). Dans ce cas, on voit que l'on peut choisir tous les coefficients du polynôme caractéristique de $A + BK$, et par conséquent les valeurs propres. □

3 Passage à l'univers du non linéaire

L'étude des systèmes linéaires est essentielle pour la compréhension des systèmes non linéaires. Cependant, ces derniers sont beaucoup plus riches. Leur étude nécessite l'introduction de nouvelles notions et techniques. Pour simplifier la présentation, nous considérons dans cette section uniquement des systèmes autonomes en dimension finie.

3.1 Points d'équilibres, trajectoires et définitions

Définition 3. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ et $u(t) \in L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m)$. Nous dirons que $x \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^n)$ est solution du système de contrôle :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t)), \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right.$$

lorsque :

$$\forall \tau \leq T, \quad x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(x(t), u(t)) dt.$$

Les points d'équilibre sont les couples (x_e, u_e) tels que $f(x_e, u_e) = 0$. Les trajectoires sont les couples $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ où $\bar{x}(t)$ est la solution pour le contrôle $\bar{u}(t)$. Étant donné un point d'équilibre, on peut se demander si le système est contrôlable au voisinage de ce point. De même, étant donnée une trajectoire, on peut étudier la contrôlabilité du système au voisinage de cette trajectoire.

3.2 Le test linéaire

Comme souvent lors de l'étude de petites perturbations en mathématiques, la linéarisation d'un système complexe peut s'avérer fructueuse. Le théorème suivant en est une bonne illustration.

Définition 4. *Considérons une trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$. Introduisons le système linéaire suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}(t) & = & \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) y(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) v(t), \\ y(t=0) & = & y_0, \end{array} \right. \tag{5}$$

où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ et $v(t) \in \mathbb{R}^m$. Le système (5) est appelé système linéarisé autour de la trajectoire.

Bien entendu, on peut linéariser un système au voisinage d'un point d'équilibre en considérant la trajectoire constante (x_e, u_e). Ceci aboutira à un système linéaire autonome du type $\dot{y} = Ay + Bv$, alors que l'on obtient un système linéaire non autonome si l'on linéarise autour d'une véritable trajectoire mouvante.

Théorème 6. *Si le système linéarisé (5) est contrôlable, alors le système non linéaire $\dot{x} = f(x, u)$ est contrôlable au voisinage de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$. C'est-à-dire qu'il existe $r > 0$, tel que pour tout $x_i, x_f \in X$ avec $|x_i - \bar{x}(0)| \leq r$ et $|x_f - \bar{x}(T)| \leq r$, il existe un contrôle $u(t)$ permettant de ralier x_i à x_f. De plus, u est proche de $\bar{u}$ dans U.*

Démonstration. Ce théorème peut se démontrer, par exemple, à l'aide de la notion d'application entrée-sortie. Notons $\mathcal{U} \subset L^\infty((0,T), \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des contrôles admissibles (c'est-à-dire pour lesquels la solution de l'équation différentielle existe sur $[0,T]$). Notons E_T l'application de $\mathcal{U}$ dans X qui à un contrôle $u(t)$ associe $x(T)$ où x est la trajectoire correspondante. On peut montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert et que la différentielle (au sens de Fréchet) de l'application E_T se calcule à partir du système linéarisé. □

Exemple 4. *Revenons au cas du pendule inversé et linéarisons le système au voisinage de son équilibre instable. On obtient :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a(t).$$

La condition de Kalman étant vérifiée, le linéarisé est contrôlable. Donc le système non linéaire est contrôlable au voisinage du point d'équilibre $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

3.3 Les crochets de Lie

Dans cette section, nous allons considérer des systèmes dits « affines en le contrôle ». C'est-à-dire que nous allons supposer que la dynamique s'écrit :

$$\dot{x}(t) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i \tag{6}$$

Ce cas particulier de dépendance affine en le contrôle recouvre dans la pratique de très nombreux systèmes mécaniques. En effet, le contrôle étant en règle générale un terme de force, il intervient linéairement dans la dynamique. Le terme f_0 correspond à la dérive du système en l'absence de contrôle. Afin de simplifier l'exposé, nous allons ici supposer que $f_0 \equiv 0$. Cependant, des résultats analogues à celui que nous allons donner existent sous réserve que $f_0(x_e) = 0$, où x_e est le point d'équilibre considéré.

Considérons sans restriction un système initialement en l'état $x_e = 0$. Par simple lecture de l'équation (6), il est clair que les contrôles u_i permettent de se déplacer dans les m directions $f_i(0)$. Il est peu probable que celles-ci engendrent $\mathbb{R}^n$ (notamment car, bien souvent, $m < n$). Cependant, il existe d'autres directions dans lesquelles on peut se déplacer, comme l'illustre ce théorème dû à Chow et Rachevski (1938 - 1939), voir par exemple l'article de Chow [2].

Théorème 7. *Supposons que la condition :*

$$\mathit{Vect}\{h(0); \quad h \in \mathcal{L}ie\,\{f_1, \dots f_m\}\} = \mathbb{R}^n$$

est vérifiée. Alors le système régi par la dynamique (6) avec $f_0 \equiv 0$ est localement contrôlable au voisinage de 0 en temps petit.

Démonstration. Nous avons noté $\mathcal{L}ie\,\{f_1, \dots f_m\}$ l'algèbre de Lie engendrée par les fonctions $f_1, \dots f_m$. Rappelons la définition du crochet de Lie :

$$[X, Y](x) = Y'(x)X(x) - X'(x)Y(x)$$

Une manière intuitive de voir ce théorème est de calculer par un développement de Taylor l'effet de la manipulation suivante : sur $[0, \tau]$, prendre $u_1 = \eta$, $u_2 = 0$; sur $[\tau, 2\tau]$, prendre $u_1 = 0$, $u_2 = \eta$; sur $[2\tau, 3\tau]$, prendre $u_1 = -\eta$, $u_2 = 0$, et enfin $u_1 = 0$, $u_2 = -\eta$ sur $[3\tau, 4\tau]$. Lorsque τ tend vers 0, on montre que l'on se déplace dans la direction $[f_1, f_2]$ (à l'ordre $\eta^2\tau^2$). C'est un créneau ! $\square$

Exemple 5. *Soit une poussette pour bébé. Notons x_1, x_2 sa position dans le plan, et x_3 sa direction angulaire. Supposons que les parents contrôlent la vitesse et la vitesse angulaire. Le système est donc :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x_1}(t) & = & u_1(t) \cos x_3(t), \\ \dot{x_2}(t) & = & u_1(t) \sin x_3(t), \\ \dot{x_3}(t) & = & u_2(t). \end{array} \right. \tag{7}$$

Il est aisé de vérifier que le linéarisé en $(0, 0, 0)$ n'est pas contrôlable. Il s'agit d'un système affine avec $f_1 = (\cos x_3, \sin x_3, 0)$ et $f_2 = (0, 0, 1)$. Ainsi $[f_1, f_2] = (\sin x_3, -\cos x_3, 0)$. Par conséquent, le système est globalement contrôlable en temps petit (car en tout point l'algèbre de Lie engendre $\mathbb{R}^3$).

3.4 La méthode du retour

L'utilisation des crochets de Lie est une des méthodes les plus puissantes pour obtenir des résultats de contrôlabilité en dimension finie. On peut aussi les utiliser pour formuler des conditions nécessaires de contrôlabilité. Cependant, cette notion passe très mal en dimension infinie. C'est pourquoi la méthode du retour est aussi intéressante.

La stratégie utilisée est *a priori* similaire à celle des crochets de Lie : en partant d'une situation où le linéarisé n'est pas contrôlable, on cherche un mouvement qui le rend contrôlable. L'idée de la méthode du retour est de choisir une trajectoire $\bar{x}(t)$, partant de x_0 et revenant à x_0 au temps T. Si celle-ci est bien choisie, on peut espérer que le linéarisé autour de cette trajectoire soit contrôlable (puisqu'on s'est éloignés du point singulier x_0) et pouvoir conclure.

Cette méthode a été introduite en 1992 par Jean-Michel Coron dans [3] pour résoudre un problème de stabilisation de systèmes affines sans dérive.

Exemple 6. *Revenons à l'exemple de la poussette. Considérons $\bar{u} : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ tel que $\bar{u}(T-t) = -\bar{u}(t)$ et $\bar{x}(0) = 0$. Alors $\bar{x}(T) = 0$. De plus, le linéarisé autour de cette trajectoire :*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x_1} & = & u_1 \cos \bar{x_3} - \bar{u_1} x_3 \sin \bar{x_3}, \\ \dot{x_2} & = & u_1 \sin \bar{x_3} + \bar{u_1} x_3 \cos \bar{x_3}, \\ \dot{x_3} & = & u_2, \end{array} \right.$$

est contrôlable dès que $\bar{u} \neq 0$.

La difficulté de cette méthode est souvent d'exhiber une trajectoire revenant à son point de départ. Elle permet d'obtenir des résultats pour des systèmes non linéaires en dimension infinie.

4 Lien avec l'optimisation dynamique

Une branche importante du contrôle est celle du contrôle optimal. Il s'agit de réaliser une tâche tout en optimisant un critère d'évaluation (par exemple : déplacer un objet en minimisant la dépense énergétique, ou exploiter un gisement en maximisant le profit total). Les questions de contrôle optimal sont *a priori* plus difficiles que celles de contrôlabilité, puisqu'il faut non seulement réaliser un objectif, mais en plus le faire de manière optimale. Cependant, le caractère optimal du contrôle recherché induit une rigidité qu'il va être possible d'exploiter.

Le contrôle optimal est à rapprocher de « l'optimisation dynamique ». Ces deux domaines se recoupent très largement. On pourrait dire que le contrôle optimal concerne plutôt les situations pour lesquelles la contrôlabilité du système n'est pas évidente, et l'on recherche tout de même l'optimalité ; alors que l'optimisation dynamique se concentre sur des situations où c'est l'optimalité qui prime, et où la contrôlabilité est gratuite.

Le contrôle optimal est la branche la plus ancienne du contrôle. En effet, on pourrait dire qu'elle remonte aux premières interrogations de Bernouli au sujet de la brachistochrone. De manière plus récente, elle a connu une forte expansion pendant la guerre froide lorsque les deux écoles (russe et américaine) s'intéressaient à la balistique.

Exemple 7. *Considérons le gestionnaire d'un barrage hydraulique. Grâce aux données hydrométriques historiques, il connaît les apports en eau $a(t)$ sur lesquels il peut compter. Par ailleurs, grâce à sa connaissance du marché de l'électricité, il connaît à l'avance le prix de gros de l'électricité $\pi(t)$. Enfin, il dispose de tables permettant de calculer la puissance électrique P délivrée par ses turbines en fonction du débit $u(t)$ qu'il choisit et de la hauteur d'eau H dans le barrage. En notant $x(t)$ le volume d'eau présent dans son réservoir, on obtient le système de contrôle avec contrainte sur l'état suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = a(t) - u(t), \\ 0 \leq x(t) \leq x_{\max}, \\ 0 \leq u(t) \leq u_{\max}. \end{array} \right.$$

Supposons que le gestionnaire souhaite avoir vidé son barrage en $t = T$ afin de réaliser une maintenance. Il doit donc imposer $x(T) = 0$. Enfin, il cherche à maximiser la quantité :

$$\int_0^T \pi(t) P(u(t), H(x(t))) dt.$$

4.1 Principe du maximum de Pontryagin

Énonçons une version « forte » du principe du maximum de Pontryagin, c'est-à-dire dans le cas avec contraintes sur le contrôle. Il existe de nombreuses variantes de ce principe, selon que le temps final est fixé ou libre, que les points de départ sont fixés ou doivent satisfaire une contrainte, etc. Les premiers énoncés ont été démontrés en 1957-1958. Cependant, les idées sous-jacentes au principe du maximum sont bien plus anciennes. En effet, celui-ci s'inscrit dans la lignée du principe de Huygens (et des sources intermédiaires) pour l'optique, ainsi que des équations d'Euler-Lagrange pour le calcul des variations en mécanique. Donnons ici une version où le départ et l'arrivée sont fixés, et l'on cherche à minimiser un coût de trajet.

Théorème 8. *Soit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$:*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ et où les contrôles sont dans $L^\infty([0,T];\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des contrôles admissibles pour lesquels la trajectoire correspondante relie $x(0) = x_0$ à $x(T) = x_1$. Définissons le coût d'un contrôle :

$$C(u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s))ds + g(x(T)),$$

où f_0 et g sont $\mathcal{C}^1$. Si le contrôle $u^* \in \mathcal{U}$ est optimal sur $[0,T]$, alors, il existe une application $p(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$ tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)), \end{aligned}$$

où $H(t,x,p,p^0,u) = \langle p, f(t,x,u)\rangle + p^0 f^0(t,x,u)$ est le hamiltonien du système. Enfin, on a la condition de maximisation presque partout sur $[0,T]$:

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)) = \max_{v\in\Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v)$$

Démonstration. La preuve de cette version forte est assez technique, et repose par-exemple sur la technique des variations en aiguille, qui consiste à modifier très légèrement le contrôle optimal d'une manière bien particulière, pour obtenir des conditions nécessaires d'optimalité. Par ailleurs, l'existence du couple $(p(\cdot), p^0)$ est à mettre en correspondance avec celle des multiplicateurs de Lagrange pour les problèmes d'optimisation classiques. Les conditions obtenues dans ce théorème traduisent le parallélisme entre le gradient des contraintes et celui de la fonction objectif. Les travaux actuels sur le sujet cherchent à affaiblir les hypothèses de régularité en utilisant des techniques d'analyse non lisse telles que les conditions de Clarke. Pour une preuve complète et actuelle, consulter [10]. □

La force du principe du maximum est de ramener un problème initialement complexe (maximiser une fonctionnelle) à un problème d'optimisation ponctuelle *a priori* bien plus simple (celui de maximiser $H(v)$ pour $v \in \Omega$). Cependant, il souffre de deux défauts. Le premier est la difficulté de sa mise en oeuvre numérique, car, bien qu'il repose sur la résolution d'une équation différentielle ordinaire (facile), les conditions aux limites sont dites « aux deux bouts » (une en $t = 0$ et une en $t = T$). On est souvent amené à utiliser une méthode de tir, parfois subtile à initialiser de manière automatique.

Le second défaut est l'impossibilité de prendre en compte des contraintes sur l'état (même simples). Or cet aspect est souvent essentiel dans la pratique. Il existe des versions adaptées aux contraintes, mais celles-ci font apparaître des discontinuités dans le vecteur adjoint qu'il est subtil de calculer.

4.2 Fonction valeur et équations de Hamilton-Jacobi-Belman

Une toute autre approche a été développée par l'école américaine ; elle repose sur l'exploitation de la « fonction valeur ». Évidemment, les connexions entre les deux approches sont nombreuses. Cette méthode sera idéale pour prendre en compte des contraintes, et facile à initialiser numériquement. Cependant, les algorithmes l'utilisant souffrent d'un manque de précision important, et d'un temps de calcul très important (car il faut résoudre une EDP).

Introduisons la fonction valeur sur un exemple.

Exemple 8. *Reprenons l'exemple de la gestion du barrage hydraulique. Notons $V(t_1, x_1)$ le profit maximum qu'il est possible de faire sur la période $t \in [t_1, T]$ avec la condition initiale $x(t_1) = x_1$. De manière évidente, $V(T, x_1) = 0$ pour tout $x_1 \in [0, 1]$. De plus, V satisfait l'EDP suivante :*

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \max_{0 \leq u \leq u_{\max}} \left((a(t) - u) \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - \pi(t) P\left(u, H(x)\right) \right) = 0.$$

Une fois cette EDP résolue, il est possible de reconstituer le chemin optimal en suivant l'extremum de la fonction valeur.

Cette approche est fondée sur la programmation dynamique. Imaginons que le temps soit discret $t \in \{t_1, \ldots t_k\}$, et qu'il faille à chaque pas de temps choisir la valeur du contrôle parmi m différentes. Au lieu de tester brutalement les m^k possibilités, on adopte une approche à rebours qui ne nécessitera que mkn opérations (où n est le nombre d'états discrets possibles).

5 Le grand saut de la dimension infinie

Pour de nombreux systèmes aussi bien physiques que biologiques, la bonne modélisation fait intervenir des équations aux dérivées partielles ; par exemple pour décrire un écoulement aérodynamique, la propagation d'une onde sonore, ou bien encore la diffusion de bactéries. Dès lors, le système de contrôle correspondant est un système dit de dimension infinie, car l'espace des états Y (dans cette section, nous garderons x pour la variable spatiale, l'état sera donc $y(t) \in Y$) est un espace de dimension infinie. L'analyse devient beaucoup plus difficile, essentiellement pour des raisons techniques liées à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le contrôle des EDP démarre véritablement avec les travaux de Jacques-Louis Lions, tels que [11].

5.1 Difficultés théoriques

En dimension infinie, la première difficulté est de démontrer l'existence des objets que l'on manipule, à savoir les solutions d'une équation aux dérivées partielles (linéaire ou non linéaire). En dimension finie, la théorie pour l'existence des solutions aux problèmes de Cauchy est désormais bien connue, de même que les hypothèses à faire sur la dynamique pour garantir existence et unicité de la solution. Ceci n'est pas le cas en dimension infinie, surtout dans le domaine non linéaire. De plus, il existe même des systèmes pour lesquels la question de l'existence de solutions est encore un problème ouvert important (notamment pour les solutions régulières d'Euler ou Navier-Stokes).

Une formalisation agréable dans le cadre d'EDP linéaires est de pouvoir écrire :

$$\dot{y} + Ay = Bu,$$

où A est un opérateur linéaire, générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions (nous n'entrerons pas dans les détails, mais penser à $A = -\Delta$) et B est un opérateur linéaire. Cette formulation pourra s'étendre à des cas semi-linéaires en ajoutant un terme $F(y)$ au second membre. Ces opérateurs n'étant pas définis partout sur Y, on sent que les ennuis commencent. Une bonne référence pour ce type d'approche et de système est le livre de Tucsnak et Weiss [12]

Par ailleurs, de manière assez récurrente, les contrôles interviendront en tant que données au bord pour l'EDP considérée. Or, il n'est pas toujours facile de donner un sens à ce que l'on entend par condition au bord pour des solutions plus ou moins régulières. Il faut attacher beaucoup de soin à ces détails techniques, qui ont des répercussions importantes en termes de contrôlabilité.

Exemple 9. *En dimension 1 d'espace, $x \in [0,1]$, et pour $t \in [0,T]$, donnons l'exemble de l'équation de Burgers visqueuse, contrôlée au bord :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_t + yy_x - y_{xx} = 0 & sur & [0,T] \times [0,1], \\ y(t,0) = v_0(t) & sur & [0,T], \\ y(t,1) = v_1(t) & sur & [0,T]. \end{array} \right. \tag{8}$$

Les contrôles sont v_0, v_1. Ici, un bon cadre de régularité est de prendre des contrôles dans $H^{3/4}(0,T)$ et de voir y comme une fonction de $Y = L^2((0,T);H^2(0,1)) \cap H^1((0,T);L^2(0,1))$. Ceci permet de donner un sens fort L^2 à l'EDP, et un sens fort $H^{3/4}$ aux conditions au bord. La donnée initiale sera $y_0 \in H^1(0,1)$, et on pourra lui donner un sens fort puisque les fonctions de Y sont continues en temps à valeur $H^1(0,1)$.

5.2 Quelques nouveaux concepts essentiels

De très nombreux résultats ont déjà été obtenus pour beaucoup d'équations classiques (transport, chaleur [6], Burgers [1], Euler [4], Navier-Stokes, Korteweg-de-Vries, lois de conservations, diffusion-réaction, etc.) Dans chaque cas, les résultats sont évidemment très variables selon les contrôles choisis, les objectifs de contrôle, le temps imparti, etc.

Par ailleurs, la dimension infinie exige l'introduction de nouveaux concepts. En effet, si l'on considère une équation parabolique par exemple, la dynamique fait intervenir des processus de régularisation importants. Ainsi, même en partant d'une donnée initiale sauvage, celle-ci sera instantannément lissée. Par conséquent, on ne peut pas espérer atteindre tous les états finaux (puisqu'ils doivent en particulier admettre une certaine régularité). Comme il est très difficile de décrire la régularité exacte obtenue, on introduit les deux concepts suivants. Tout d'abord, la contrôlabilité approchée, c'est-à-dire le fait de pouvoir se rapprocher aussi près que l'on souhaite de tout état final (sans toutefois espérer l'atteindre en temps fini). L'autre idée essentielle est celle de la contrôlabilité dite « aux trajectoires », c'est-à-dire lorsque, pour toute trajectoire $\bar{y}$ du système considéré, pour tout état initial y_0, il existe une trajectoire reliant y_0 à $\bar{y}(T)$. Lorsque le résultat n'est vrai que pour des y_0 proches de $\bar{y}(0)$, on dit qu'il y a contrôlabilité locale aux trajectoires.

Théorème 9. *Pour le système (8), Fursikov et Imanuvilov ont démontré dans [7] un résultat de contrôlabilité locale aux trajectoires. Notamment, pour tout $T > 0$, il existe $r > 0$ tel que, lorsque $|y_0| \leq r$ dans $H^1(0,1)$, on peut le ramener à 0 en temps T.*

5.3 Des problèmes ouverts

De nombreux problèmes ouverts ponctuels subsistent naturellement. Il faut ajouter à ceux-ci deux lacunes majeures de la théorie actuelle du contrôle des EDP. Premièrement, il existe très peu de méthodes générales pour les EDP non linéaires (la méthode du retour est une des seules fréquemment applicables). Deuxièmement, il est très rare que l'on dispose de schémas numériques permettant le calcul des contrôles dont on a démontré l'existence. Ceci est extrêmement problématique dans un domaine qui a vocation à être aux services des applications.

Citons, à titre d'exemple, le problème ouvert suivant, sur lequel nous avons travaillé :

Probléme ouvert 1. *En dimension 1 d'espace, $x \in [0,1]$, et pour $t \in [0,T]$, donnons l'exemble de l'équation de Burgers visqueuse, contrôlée à un bord et au milieu :*

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_t + yy_x - y_{xx} = u(t) & sur & [0,T] \times [0,1], \\ y(t,0) = v_0(t) & sur & [0,T], \\ y(t,1) = 0 & sur & [0,T]. \end{array} \right.$$

Les contrôles sont u, v_0. On se place dans le même cadre de régularité que pour (8). Ce système est-il contrôlable à 0 en temps petit ?

Différentes approches peuvent être envisagées : utiliser la transformation de Hopf-Cole pour se ramener à un système du type équation de la chaleur avec contrôle multiplicatif, étudier la contrôlabilité du système hyperbolique limite lorsque la viscosité tend vers 0, trouver une trajectoire pour appliquer la méthode du retour, ou encore exhiber un contrôle particulier en passant par un état d'équilibre rapidement atteignable, etc.

Références

[1] Marianne Chapouly : Global controllability of nonviscous and viscous Burgers-type equations. *SIAM J. Control Optim.*, 48(3):1567–1599, 2009.

[2] Wei-Liang Chow : Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. *Math. Ann.*, 117:98–105, 1939.

[3] Jean-Michel Coron : Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift. *Math. Control Signals Systems*, 5(3):295–312, 1992.

[4] Jean-Michel Coron : Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 317(3):271–276, 1993.

[5] Jean-Michel Coron : Controllability and nonlinearity. *In CANUM 2006—Congrès National d'Analyse Numérique*, volume 22 de *ESAIM Proc.*, pages 21–39. EDP Sci., Les Ulis, 2008.

[6] H. O. Fattorini et D. L. Russell : Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43:272–292, 1971.

[7] Andrei V. Fursikov et Oleg Yu. Imanuvilov : On controllability of certain systems simulating a fluid flow. *In Flow control (Minneapolis, MN, 1992)*, volume 68 de *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 149–184. Springer, New York, 1995.

[8] R. E. Kalman, Y. C. Ho et K. S. Narendra : Controllability of linear dynamical systems. *Contributions to Differential Equations*, 1:189–213, 1963.

[9] J. P. LaSalle : The time optimal control problem. *In Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. V*, pages 1–24. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1960.

[10] E. B. Lee et L. Markus : *Foundations of optimal control theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1967.

[11] J.-L. Lions : *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.

[12] Marius Tucsnak et George Weiss : *Observation and control for operator semigroups.* Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts : Basel Textbooks]. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.