Groupes de Galois et représentations automorphes : une introduction au programme de Langlands

Arthur-César Le Bras

Juin 2013

Ce court texte est une introduction au programme de Langlands, un ensemble formidable de conjectures et de résultats à l'intersection de la théorie des représentations et de la théorie des nombres. Il est difficile d'expliquer brièvement un programme aussi riche, et le ton de ce texte est donc assez inégal. J'ai essayé d'écrire un texte introductif, à mi-chemin entre les introductions classiques au sujet (où l'accent est mis en général sur la théorie du corps de classes et les formes modulaires) et les références spécialisées. Faute de place, certains aspects importants du programme de Langlands ne sont pas évoqués : séries d'Eisenstein, théorèmes de modularité, correspondance de Langlands p-adique, ou encore programme de Langlands géométrique et lien avec la physique.

La première partie est un panorama rapide du développement de la théorie, qui aboutit aux conjectures de fonctorialité et de réciprocité. La présentation des notions suit un ordre mathématique en même temps qu'historique : j'espère que chaque point de vue éclaire l'autre. La deuxième partie est centrée sur l'étude de la cohomologie des variétés de Shimura en lien avec la théorie automorphe. L'outil essentiel est la formule des traces. La troisième partie explique les liens conjecturaux entre représentations automorphes et motifs et les résultats obtenus dans cette direction [1].

1 De la réciprocité d'Artin à la fonctorialité de Langlands

Pour toute cette partie, le lecteur est invité à consulter [Ge], qui est une présentation remarquable de la théorie pour GL_1 et GL_2, [BGe], [Co] (une référence standard), la page web de Casselman (en particulier [Cal]) et bien sûr les travaux de Langlands lui-même.

1.1 Théorie du corps de classes et fonctions L abéliennes

Un *caractère de Dirichlet* est un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ dans $\mathbf{C}^*$, étendu à $\mathbf{Z}$ de façon naturelle. Dirichlet a montré comment associer à ces caractères des fonctions L, qui jouent un rôle fondamental dans la démonstration du théorème des nombres premiers. Hecke a compris comment généraliser cette notion, de façon à traiter tous les corps de nombres. Soit F un tel corps de nombres. Un *caractère de Hecke* χ (ou *grossencharacter*) de F est une famille de morphismes $\chi = (\chi_v)_v$ indexée par les places de F, $\chi_v : F_v^* \to \mathbf{C}^*$, telle que pour tout $x \in F^*$, $\prod_v \chi_v(x) = 1$. Il est implicite dans cette définition que χ_v est non ramifié pour presque toute place v, c'est-à-dire que $\chi_v(x) = 1$ si $x \in F_v^*$ est de norme 1. On pose alors

$$L(s,\chi) = \sum \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod (1-\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Ici, la somme porte sur les idéaux $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_F$ et ses idéaux premiers $\mathfrak{p}$, et χ est défini multiplicativement sur les idéaux par $\chi(\mathfrak{p}) = 0$ si χ est ramifié en la place v correspondant $\mathfrak{p}$, par la valeur en χ_v d'une uniformisante sinon. La fonction zêta de Dedekind est obtenue en prenant χ trivial ; les fonctions L de Dirichlet en prenant les caractères de Hecke d'ordre fini, qui sont les caractères de Dirichlet [2]. Voici le résultat principal de Hecke.

Théorème 1 (Hecke)**.** *La fonction $L(s,\chi)$ se prolonge analytiquement en une fonction méromorphe de la variable s et c'est même une fonction entière si χ est non trivial (dans le cas contraire, elle a simplement un pôle simple en $s = 1$). De plus, il existe une constante A et un facteur ne dépendant que des places archimédiennes $\Gamma(s,\chi)$, tels que la fonction $s(s-1)A^s\Gamma(s,\chi)L(s,\chi)$ soit entière et vérifie une équation fonctionnelle liant sa valeur en s et $1-s$.*

1. Je remercie Peter Scholze pour ses explications sur la dernière partie de ce texte.
2. En vertu du théorème d'approximation forte pour GL_1, que l'on verra plus loin.

La preuve de Hecke, en 1916, est un tour de force mais est obscure du point de vue de la théorie des groupes. Tate, en 1950, donne une autre démonstration, par une méthode qui aura une grande influence. La grande originalité de la thèse de Tate ([T1]) est l'utilisation des *méthodes adéliques*. L'anneau des *adèles* $\mathbf{A}_F$ d'un corps de nombres F est défini comme le sous-anneau du produit direct de tous les complétés F_v du corps F (places finies et infinies) formé des familles $(x_v)_v$ d'éléments vérifiant $x_v \in \mathcal{O}_v$ pour presque tout v (ce qu'on appelle un produit restreint). Le groupe des *idèles* $\mathbf{A}_F^*$ est défini comme le sous-groupe du produit des F_v^* formé des $(x_v)_v$ tels que $x_v \in \mathcal{O}_v^*$ pour presque tout v. La topologie de $\mathbf{A}_F$ (resp. de $\mathbf{A}_F^*$) est définie de façon à ce que tout caractère continu χ de $\mathbf{A}_F$ se factorise $\chi = \prod_v \chi_v$, avec χ_v caractère continu de F_v, trivial sur $\mathcal{O}_v$ pour presque tout v. De même pour les caractères continus de $\mathbf{A}_F^*$, avec χ_v non ramifié pour presque tout v. Dans la théorie classique à la Hecke, on est obligé de découper la somme définissant la fonction L suivant les classes d'idéaux pour pouvoir décrire chacun des termes comme transformée de Mellin de fonctions thêta, que l'on étudie à l'aide de la formule de Poisson. Les méthodes analytiques (formule de Poisson, qui relève de la théorie de Fourier additive) se marient mal avec les aspects multiplicatifs de la théorie (produits eulériens). Chez Tate, ce problème disparaît : l'équation fonctionnelle est une conséquence directe de la formule de Poisson adélique.

1.2 Des formes modulaires aux formes automorphes sur GL_2

Notons $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, $k > 0$ un entier et, Γ un sous-groupe de $SL_2(\mathbf{Z})$ contenant, pour un certain N entier positif,

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}.$$

On peut prendre par exemple $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$, ou

$$\Gamma = \Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}), c = 0 \mod N \right\}.$$

Définition 1. Une *forme modulaire de poids k pour* Γ est une fonction f définie sur $\mathcal{H}$, à valeurs complexes, vérifiant les conditions suivantes :

- (i) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$f|_{[\gamma]_k}(z) = f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z).$$

- (ii) f est holomorphe sur $\mathcal{H}$.
- (iii) f est holomorphe aux pointes de Γ (un élément $s \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ fixé par un élément parabolique de Γ).

On note $M_k(\Gamma)$ leur ensemble. Si $\Gamma = \Gamma(N)$, on dit que f est une *forme modulaire de poids k et de niveau N*.

Si ψ est un caractère modulo N, si $\Gamma = \Gamma_0(N)$ et si f satisfait non à (i) mais à l'équation

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \psi(a)^{-1}(cz+d)^k f(z),$$

on dira que f est de poids k et de caractère ψ et on notera $f \in M_k(N, \psi)$.

La condition (iii) demande quelques précisions : on se ramène en conjuguant par un élément convenable de $SL_2(\mathbf{Z})$ au cas de la pointe à l'infini et on fait le changement de variable $q = e^{2i\pi z/h}$, h entier dépendant du groupe Γ. On peut alors voir f comme une fonction sur le disque unité épointé, à qui l'on demande de se prolonger holomorphiquement à tout le disque. Cet argument donne du même coup la notion de *développement de Fourier* d'une forme modulaire en une pointe de Γ et mène à la

Définition 2. Une forme modulaire f pour Γ est dite *cuspidale* si le terme constant de son développement de Fourier en toute pointe est nul. Cela revient à dire que $|f(z)|$ est un $O(y^{k/2})$, $z = x + iy$, quand $y \to +\infty$. On note $S_k(\Gamma)$ (ou $S_k(N, \psi)$ dans le cas particulier précédent) leur ensemble.

Les formes modulaires sont des objets fascinants étudiés par les mathématiciens depuis le dix-neuvième siècle. On en connaît de nombreux exemples étroitement liés à la théorie des nombres : fonction τ de Ramanujan, fonctions thêta, séries d'Eisenstein ou de Poincaré, ... La théorie classique des formes modulaires est très bien présentée par exemple dans [Se1] ou [DSh].

Une avancée majeure dans la théorie des formes modulaires est constituée par les travaux de Hecke - encore lui. Contentons-nous de l'expliquer pour les groupes $\Gamma_0(N)$. Si p est un nombre premier, on décompose

$$\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}\Gamma_0(N)=\bigcup_j \Gamma_0(N)\gamma_j,$$

et on définit un opérateur $T_k(p)$ sur $S_k(N,\psi)$ par la formule

$$T_k(p)f=p^{k/2-1}\sum_j f|_{[\gamma_j]_k}.$$

Ces opérateurs $T_k(p)$, p variant dans l'ensemble des entiers premiers ne divisant pas N, sont appelés *opérateurs de Hecke* et forment une algèbre commutative d'opérateurs normaux (pour l'adjonction relative au produit scalaire de Petersson). C'est ce qui explique leur intérêt : l'espace $S_k(N,\psi)$ admet une base de vecteurs propres simultanés pour tous ces opérateurs. L'action d'un opérateur de Hecke se lit facilement sur le développement de Fourier de la forme à l'infini ; si celle-ci est vecteur propre de tous ces opérateurs (p est toujours supposé premier à N) et normalisée, le coefficient de Fourier d'ordre p est la valeur propre correspondant à $T_k(p)$.

Soit $f\in S_k(N,\psi)$. Si f a pour développement de Fourier

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2i\pi nz}$$

et χ est un caractère primitif modulo r, r premier à N, posons

$$L(s,f,\chi)=(r^2N)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)a_n n^{-s}=:(r^2N)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)D(s,f,\chi).$$

Théorème 2 (Hecke, Weil)**.** *Chacune des fonctions L $L(s,f,\chi)$ associée à $f\in S_k(N,\psi)$ converge dans un demi-plan, peut-être analytiquement prolongée en une fonction entière sur tout le plan complexe satisfaisant à une équation fonctionnelle reliant les valeurs $L(s,f,\chi)$ et $L(k-s,f_{[\gamma]_k},\bar{\chi})$. En outre, $D(s,f,1)$ s'écrit comme produit eulérien si et seulement si f est fonction propre de tous les opérateurs de Hecke $T_k(p)$. Plus précisément, sous l'hypothèse $a_1=1$, on a $T_k(p)f=c_pf$ pour tout p si et seulement si*

$$D(s,f,1)=\prod_p(1-c_pp^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Réciproquement, une fonction L avec ces propriétés provient d'une forme $f\in S_k(N,\psi)$.

Ce théorème a pour conséquence immédiate le théorème de Mordell sur la fonction τ de Ramanujan. Surtout, il montre *qu'une forme modulaire cuspidale propre normalisée de poids k est indistinguable d'un produit eulérien de degré 2, avec comportement analytique prescrit et équation fonctionnelle liant les valeurs en s et $k-s$*. Les formes modulaires cuspidales donnent des fonctions L avec de bonnes propriétés. Comme la suite de ce texte le démontrera, il s'agit là d'un point fondamental : d'une part, parce que de telles fonctions L abondent (conjecturalement) dans la nature - par exemple, la fonction zêta de Hasse-Weil d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ devrait ressembler à la fonction L d'une forme dans $S_2(\Gamma_0(N))$, et c'est ainsi que Weil a été amené à préciser la conjecture de Taniyama [3] ; d'autre part, car il suggère une similitude, encore vague, entre la théorie des formes modulaires et des caractères de Dirichlet.

Pour préciser cette dernière intuition, il faut un changement de point de vue conséquent sur les formes modulaires, que l'on doit à Gelfand et ses collaborateurs (voir [GF]). Il s'agit de ramener la théorie des formes modulaires

3. On reviendra plus loin sur ce raisonnement.

à la théorie des représentations. Notons provisoirement pour simplifier $G = SL_2(\mathbf{R})$, $\Gamma = \Gamma_0(N)$ et supposons k pair. Soit $f \in S_k(\Gamma)$. On définit une fonction φ_f sur G par la formule

$$\varphi_f(g) = f(g(i))(ci+d)^{-k}.$$

On vérifie facilement que cette fonction vérifie $\varphi_f(\gamma g) = \varphi_f(g)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\varphi_f(gr(\theta)) = e^{-ik\theta}\varphi_f(g)$ si $r(\theta) \in K := SO_2(\mathbf{R})$ est la rotation d'angle θ, et que φ_f est bornée et qu'en particulier,

$$\int_{\Gamma\backslash G} |\varphi_f(g)|^2 dg < +\infty.$$

Enfin, φ_f est cuspidale au sens où, pour $g \in G$, $\sigma \in SL_2(\mathbf{Z})$,

$$\int_0^1 \varphi_f(\sigma \begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g)dx = 0,$$

h étant associé à la pointe $\sigma(\infty)$ comme ci-dessus.

L'image de $S_k(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ par $f \mapsto \varphi_f$ est exactement constituée des éléments de $\varphi \in L^2(\Gamma\backslash G)$ vérifiant ces propriétés, et la propriété aditionnelle que :

$$\Delta\varphi = -\frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)\varphi,$$

qui traduit l'holomorphie de f, Δ désignant le laplacien non euclidien. En particulier, les formes modulaires fournissent des exemples de formes automorphes sur G pour Γ, au sens de la définition suivante.

Définition 3. Une *forme automorphe* sur G pour le groupe Γ est une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur G, vérifiant les conditions suivantes :
- (i) Pour $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$, $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$.
- (ii) φ est K-finie à droite.
- (iii) φ est vecteur propre du laplacien Δ.
- (iv) φ est à croissance modérée : il existe des constantes C et N, telles que

$$|\varphi(z,\theta)| \leq Cy^N.$$

Une forme automorphe est dite *cuspidale* si elle vérifie la condition d'annulation vue précédemment.

On considère donc une classe de fonctions plus large que celle provenant des formes modulaires, mais plus naturelle, comme on le verra dans la suite. Les *formes de Maass* donnent des exemples de formes automorphes provenant de fonctions analytiques réelles non holomorphes.

Exprimer l'holomorphie d'une forme modulaire f en disant que φ_f est fonction propre de Δ est en réalité un gain conceptuel considérable. En effet, le laplacien sur $L^2(\Gamma\backslash G)$ provient de l'action de l'opérateur différentiel donné par l'élément de Casimir qui engendre l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En conséquence, Δ est auto-adjoint et commute à la représentation unitaire R de G sur $L^2(\Gamma\backslash G)$ définie par :

$$R(g)\varphi(h) = \varphi(hg).$$

Le lemme de Schur prouve donc que la restriction de Δ à tout sous-espace G-invariant irréductible de $L^2(\Gamma\backslash G)$ est scalaire. Les espaces propres de Δ permettent d'analyser la décomposition de la représentation R. Comme K est compact, la restriction de R à K est complètement réductible et on peut donc supposer sans perte de généralité les fonctions propres K-finies. En définitive, *le problème de la construction de représentations automorphes est initimement lié à celui de la décomposition de la représentation régulière R sur $L^2(\Gamma\backslash G)$*, pour lequel on dispose de l'arsenal de la théorie des représentations du groupe de Lie réel $SL_2(\mathbf{R})$. Bien mieux, ce point de vue se prête à la généralisation en dimension supérieure et aux autres groupes réductifs ; on y reviendra plus tard.

Toutefois, la reformulation obtenue n'est pas encore satisfaisante. L'information arithmétique s'exprime difficilement dans ce langage, par exemple la définition des opérateurs de Hecke, qui expliquaient la décomposition des fonctions L comme produits eulériens. Ce n'est pas très surprenant : on a fait la théorie sur $SL_2(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}$ est une complétion de $\mathbf{Q}$ parmi bien d'autres. Ici encore, le point de vue adélique s'impose naturellement. Notons G le groupe

GL_2 sur $\mathbf{Q}$. Le principe d'approximation forte va nous permettre de définir une fonction sur $G(\mathbf{A})$ associée à toute forme modulaire. Ce principe dit que, si $N > 0$ est un entier,

$$G(\mathbf{A}) = G(\mathbf{Q})GL_2^+(\mathbf{R})K_0^N,$$

où $K_0(N) = \prod_p K_p(N)$ est un sous-groupe compact de $G(\mathbf{A}_f)$, avec

$$K_p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K_p := G(\mathbf{Z}_p), c = 0 \bmod N \right\}.$$

Soit $f \in S_k(N, \psi)$. Le caractère ψ détermine un caractère de Hecke de $K_0(N)$. On pose

$$\varphi_f(g) = f(g_\infty(i))j(g_\infty, i)^{-k}\psi(k_0),$$

si $g = \gamma g_\infty k_0$. Cette fonction est bien définie, puisque $G(\mathbf{Q}) \cap GL_2^+(\mathbf{R})K_0^N = \Gamma_0(N)$. Cela fournit une fonction $\varphi_f \in L_0^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}), \psi)$, avec plein de propriétés faciles à vérifier qui en font une *forme automorphe cuspidale* sur le groupe adélique $G(\mathbf{A})$. On est donc amené une fois de plus à étudier la décomposition de la représentation régulière par translation à droite R de $G(\mathbf{A})$ sur $L_0^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}))$. Cette formulation adélique du problème est avantageuse : elle remplace le groupe arithmétique $\Gamma_0(N)$ par le groupe discret $G(\mathbf{Q})$, elle permet de traiter simultanément tous les poids et les niveaux et enfin elle met clairement en valeur la structure supplémentaire donnée par l'action à droite de $G(\mathbf{A}_f)$. Enfin, elle montre que l'on traite ici pour le groupe $G = GL_2$ l'exact analogue du problème pour GL_1 qui constitue le coeur de la théorie du corps de classes.

On peut démontrer les faits suivants (pour tout ceci, voir [Ge]). Tout d'abord, toute représentation unitaire π de $G(\mathbf{A})$ se décompose comme produit $\otimes_p \pi_p$, avec π_p une représentation unitaire irréductible de $G(\mathbf{Q}_p)$, non ramifiée (i.e. ayant des vecteurs invariants non nuls sous K_p) pour presque tout p. Ce résultat, analogue de la décomposition en produit des caractères de Hecke, illustre le fait que le langage adélique permet de séparer les contributions des différentes places. En particulier, une bonne connaissance de la théorie des représentations des corps locaux, archimédiens et non archimédiens, est un outil précieux. On prouve ensuite, comme espéré, que les opérateurs de Hecke classiques $T(p)$ se réalisent de façon *purement locale* comme opérateurs de convolution sur la $G(\mathbf{Q}_p)$-composante de φ_f (en particulier, on a désormais une définition des opérateurs de Hecke indépendante du niveau). Enfin, soit $f \in S_k(N, \psi)$ propre pour les opérateurs de Hecke, $T_p(f) = a_p(f)$. La sous-représentation de $L_0^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}))$ engendrée par φ_f et ses translatées à droite est irréductible, et peut être décrite localement en termes du poids k et des valeurs propres a_p. Réciproquement, à toute représentation irréductible unitaire de $G(\mathbf{A})$ apparaissant dans la représentation régulière L_0^2, de conducteur N, de type série discrète à l'infini, correspond une unique forme cuspidale (nouvelle) f.

Résumons. L'étude des formes modulaires est ramenée à celle de la décomposition de la représentation R du groupe adélique $G(\mathbf{A})$ sur $L_0^2(G(\mathbf{Q})\backslash G(\mathbf{A}))$, qui peut être analysée localement. Ce problème très général *garde un sens pour tout groupe réductif* G sur $\mathbf{Q}$ (ou sur un corps de nombres) ! Historiquement, cela n'avait rien d'une évidence ; mais le point de vue adélique (qui illumine les relations entre le local et le global) et surtout l'oeuvre monumentale d'Harish-Chandra [4], qui élucide la théorie des représentations des corps locaux, suivant les principes selon lesquels ce qui peut être fait pour un groupe réductif particulier peut l'être pour n'importe quel groupe réductif et selon lesquels toutes les places du corps de nombres doivent être traitées sur un pied d'égalité, ont donné la confiance nécessaire à Langlands à la fin des années soixante pour s'attaquer à ce problème.

1.3 Formes et représentations automorphes

Soit F un corps de nombres. Naïvement, un *groupe algébrique linéaire* G sur F est un sous-groupe du groupe des matrices de taille n défini par des équations polynomiales à coefficients dans F, ou même dans $\mathcal{O}_F$, si l'on chasse les dénominateurs. Le groupe G est dit *unipotent* si $G(\mathbf{C})$ ne contient que des matrices unipotentes ; il est dit *réductif* si $\{1\}$ est le seul-sous groupe connexe distingué unipotent de $G(\mathbf{C})$ (cf. l'article de Springer dans [Co]). Les groupes GL_n et SL_n sont des exemples de groupes réductifs.

Notons $\mathbf{A} = \mathbf{A}_F$ l'anneau des adèles de F, G un groupe réductif sur F avec $G(\mathbf{C})$ connexe. Soit Z un tore déployé sur F maximal dans le centre de G. On note $G_\infty = G(F_\infty)$, c'est un groupe de Lie qui contient le sous-groupe compact

4. Ce point est important. Les conjectures de Langlands n'auraient sûrement jamais vu le jour sans les concepts développés par Weyl, Gelfand, Chevalley et surtout Harish-Chandra. La généralisation à GL_n est probablement naturelle, mais le fait même que la notion de groupe réductif soit la généralisation correcte que l'on puisse espérer - et qui fait tout le charme du programme de Langlands, est une conséquence des travaux d'Harish-Chandra. Une excellente introduction à ces derniers est [V].

maximal K_∞. La complexifiée de l'algèbre de Lie réelle de G est désignée par $\mathfrak{g}$. Son algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ a pour centre $Z(\mathfrak{g})$.

Une fonction f sur $G(\mathbf{A}) = G_\infty \times G(\mathbf{A}_f)$ est dite *lisse* si elle est $\mathcal{C}^\infty$ en la première composante, localement constante à support compact en la seconde. Soient ρ une représentation de dimension finie de K_∞, $J \subset Z(\mathfrak{g})$ un idéal de codimension finie, K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$. Une fonction lisse f sur $G(\mathbf{A})$ est dite *automorphe pour* (ρ, J, K) si

- (i) Pour tout $\gamma \in G(F)$, $f(\gamma g) = f(g)$.
- (ii) Pour tout $k \in K$, $f(gk) = f(g)$.
- (iii) L'espace des translatées à droite de f par K_∞ est de dimension finie ; cette représentation de dimension finie de K_∞ se décompose comme somme de constituants irréductibles isomorphes à ρ.
- (iv) L'idéal J annule f.
- (v) Pour tout $y \in G(\mathbf{A}_f)$, la fonction $x \mapsto f(xy)$ sur G_∞ satisfait une condition de croissance modérée.

La condition (v) est un peu vague mais la préciser demanderait d'expliquer en détail la théorie de la réduction de Borel et Harish-Chandra. L'ensemble des fonctions automorphes relativement à (ρ, J, K) est noté $\mathcal{A}(\rho, J, K)$. Le point suivant est essentiel.

Théorème 3 (Harish-Chandra)**.** *L'espace vectoriel $\mathcal{A}(\rho, J, K)$ est de dimension finie.*

Supposons en outre que f lisse vérifie

$$f(zx) = \chi(z) f(x),$$

pour $z \in Z(\mathbf{A})$, χ caractère unitaire de $Z(F)\backslash Z(\mathbf{A})$. Supposons que f vérifie les conditions (i)-(iv). On peut donc voir $|f|$ comme une fonction sur $(Z(\mathbf{A})G(F))\backslash G(\mathbf{A})$. Alors dès que $|f| \in L^p((Z(\mathbf{A})G(F))\backslash G(\mathbf{A})$ avec $p \geq 1$, f satisfait la condition (v) et est donc une forme automorphe. Mieux : si f vérifie (i)-(iv), la condition relative à χ, et la condition de cuspidalité :

$$\int_{N(F)\backslash N(\mathbf{A})} f(ng)dn = 0,$$

pour le radical unipotent N de tout sous-groupe parabolique propre de G, et tout $g \in G(\mathbf{A})$ (cette condition est vide pour GL_1 et redonne pour GL_2 la notion de cuspidalité classique), alors il est équivalent de dire que f satisfait (v) ou de dire que $|f| \in L^2((Z(\mathbf{A})G(F))\backslash G(\mathbf{A}))$, ou encore de dire que f est bornée (et même à décroissance rapide). On dira alors que f est une *forme automorphe cuspidale*, et on notera $f \in \mathcal{A}_0(\rho, J, K)$. L'introduction de ce caractère χ, un peu pénible mais indolore, est expliquée par le fait que $(Z(\mathbf{A})G(F))\backslash G(\mathbf{A})$, à la différence de $G(F)\backslash G(\mathbf{A})$, est de volume fini [5].

On aimerait définir une représentation automorphe de $G(\mathbf{A})$ comme un sous-quotient irréductible de $\mathcal{A} = \bigcup_K \mathcal{A}(\rho, J, K)$, pour un certain (ρ, J, K), pour l'action par translation à droite de $G(\mathbf{A})$. Cela ne fonctionne pas directement, car cette dernière ne préserve pas la condition de K_∞-finitude. On définit donc l'algèbre de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\infty \otimes \mathcal{H}_f$. L'algèbre $\mathcal{H}_f$ est définie comme produit tensoriel restreint (relativement à des idempotents) des algèbres de Hecke $\mathcal{H}_v$ aux places finies. L'algèbre $\mathcal{H}_\infty$ est l'algèbre de convolution des distributions K_∞-finies sur G_∞, supportées sur K_∞. Rappelons que si v est une place finie, la donnée d'une représentation lisse de $G(F_v)$ revient exactement à celle d'un $\mathcal{H}_v$-module non dégénéré. A l'infini, les $\mathcal{H}_\infty$-modules convenables correspondent exactement aux $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-modules, dont Harish-Chandra a montré qu'ils étaient les bons objets algébriques à étudier pour comprendre les représentations irréductibles unitaires d'un groupe de Lie réel. Par conséquent, la donnée d'un $\mathcal{H}$-module à droite est un ersatz très satisfaisant de la donnée d'une $G(\mathbf{A})$-représentation. On peut montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathcal{H}$-module à droite lisse. Une représentation automorphe de $\mathcal{H}$ est un sous-quotient irréductible de $\mathcal{A}$. Si $f \in \mathcal{A}$, $f \star \mathcal{H}$ est une représentation automorphe, qui est même admissible en vertu du théorème 3 (en particulier, il en est de même de toute représentation automorphe). Plus généralement, un $G(\mathbf{A})$-module topologiquement irréductible est dit *automorphe* si le sous-espace de ses vecteurs lisses est une représentation automorphe de $\mathcal{H}$. Pour tout ceci, voir [Co].

Soit χ un caractère unitaire de $Z(F)\backslash Z(\mathbf{A})$, on peut prouver que tout sous-espace fermé $G(\mathbf{A})$-invariant irréductible de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}))_\chi$ est automorphe. Cela ne surprendra pas le lecteur : on a expliqué dans le cas de GL_2 ce qui se passait et on voit bien que la théorie construite pour G quelconque est définie exactement de façon à ce que tout le panorama se généralise convenablement. Mieux, si l'on se restreint aux formes automorphes cuspidales, ce que l'on fera

5. On pourrait imaginer de faire la théorie avec les groupes semi-simples pour éviter ce genre de petits problèmes. Mais cela créérait d'autres difficultés. Par exemple, il est pratique de travailler avec GL_2 plutôt que SL_2, pour traiter le cas des formes modulaires de conducteur non trivial et surtout pour pouvoir définir les opérateurs de Hecke dans le langage de la théorie des représentations du groupe : la matrice $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $SL_2(\mathbf{Q}_p)$!

maintenant, on sait réciproquement (voir plus haut) qu'une telle forme est dans $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}))$. Or, on a le théorème suivant.

Théorème 4 (Gelfand, Piatetski-Shapiro). *La représentation R_0 de $G(\mathbf{A})$ sur $L^2_0(G(F)\backslash G(\mathbf{A}))_\chi$ se décompose comme somme discrète de $G(\mathbf{A})$-représentations irréductibles (automorphes cuspidales donc), avec multiplicités finies.*

Une représentation cuspidale apparaît donc bien comme sous-espace de $L^2(G(F)\backslash G(\mathbf{A}))$. En outre, le théorème implique qu'une représentation cuspidale est unitarisable (ce sont les représentations lisses sous-jacentes à des représentations irréductibles unitaires de $G(\mathbf{A})$). On peut donc donner une nouvelle définition de la notion de représentation automorphe cuspidale.

Définition 4. Une *représentation automorphe cuspidale* de $G(\mathbf{A})$ est une représentation de $G(\mathbf{A})$ unitaire admissible qui apparaît dans la représentation régulière R_0.

Pour une explication lumineuse dans un cas particulier du contenu de ce paragraphe, voir [Ge]. En général, l'étude des représentations automorphes se ramène à l'étude de la décomposition de la représentation régulière R, mais la théorie est un peu compliquée par l'existence d'un *spectre continu*. Il se trouve que celui-ci est bien compris (on peut le décrire en termes de séries d'Eisenstein, [L3]) et que l'essentiel des phénomènes intéressants vient de l'étude des représentations automorphes cuspidales.

Les travaux d'Artin et Tate pour GL_1, de Hecke pour GL_2 montrent l'importance des fonctions L. Le problème que se pose Langlands en 1967, au moment où il rédige sa célèbre lettre à Weil ([L1]), est le suivant : *comment associer à une représentation automorphe π d'un groupe réductif une fonction L*, en généralisant les cas déjà connus ? La solution merveilleuse qu'il donne à ce problème débouche sur l'ensemble du programme qui porte son nom.

1.4 L-groupe et fonctorialité de Langlands

Comme on a déjà vu, dans le cas $F = \mathbf{Q}$, qu'une représentation cuspidale pour $GL_2(\mathbf{A})$ correspond en gros à une forme modulaire cuspidale propre pour les opérateurs de Hecke, il est logique de chercher nos fonctions L sous forme de produits eulériens. Dans cette optique, la démarche de Langlands est fidèle à la philosophie adélique initiée par Tate : il faut tirer parti de la décomposition de π en produit de représentations locales. Or, pour presque toute place finie v, G est non ramifié (quasi-déployé et déployé sur une extension non ramifiée de F_v) et la représentation π_v de $G(F_v)$ est *non ramifiée*, i.e. admet des vecteurs invariants non nuls sous le compact maximal K_v. La situation semble donc assez simple : comment dans ce cas définir un facteur local de la fonction L globale, correspondant à π_v ? Uniquement dans la suite de ce paragraphe, afin de simplifier les écritures, on suppose fixée une telle place v et on supprime les indices v de la notation (ainsi, F désigne F_v) ; les groupes sont identifiés à leurs F_v-points, sauf mention du contraire. Je développe en détail le raisonnement qui suit (expliqué par exemple dans [Cal]), car il est essentiel.

Il est classique que la donnée de la représentation non ramifiée π équivaut à la donnée d'un morphisme d'algèbres de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G, K)$ dans $\mathbf{C}$. Or, soit B un Borel de G défini sur F, A un tore déployé (sur F) maximal de G. Le morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres, appelé *transformée de Satake*,

$$S : \mathcal{H}(G, K) \to \mathcal{H}(A, A \cap K),$$

défini par

$$S(f)(a) = \delta_B^{1/2}(a) \int_N f(an)dn$$

est injectif d'image $\mathcal{H}(A, A \cap K)^W$. Mais tout morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}(A, A \cap K)$ dans $\mathbf{C}$ correspond à une représentation irréductible de A non ramifiée, c'est-à-dire, comme A est un tore, à un caractère non ramifié de A. C'est le moment d'utiliser l'hypothèse que A est déployé. Ceci permet d'identifier

$$\mathrm{Hom}(A/A \cap K, \mathbf{C}^*) = \mathrm{Hom}(X_*(A), \mathbf{C}^*).$$

Définissons alors un tore complexe $\widehat{A}$ par la formule

$$\widehat{A}(\mathbf{C}) = \mathrm{Hom}(X_*(A), \mathbf{C}^*).$$

Comme on a toujours

$$\widehat{A}(\mathbf{C}) = \mathrm{Hom}(X^*(\widehat{A}), \mathbf{C}^*),$$

les points complexes du tore complexe $\widehat{A}$ s'identifient à l'ensemble des caractères non ramifiés de $A(F)$ et les éléments de $A/A \cap K$ s'identifient aux caractères rationnels du tore $\widehat{A}$. Cette sorte de *dualité* s'étend en fait à tout groupe réductif. Soit G un tel groupe, T un tore maximal de G. Le quadruplet $\Psi(G) = (X^*(T), \Sigma, X_*(T), \Sigma^\vee)$ (Σ et $\Sigma^\vee$ désignant respectivement les racines et coracines de $\mathfrak{g}$ relativement à T) est appelé *donnée radicielle relative à la paire* (G,T). Réciproquement, la donnée de tout tel quadruplet détermine sur tout corps un groupe réductif défini et déployé sur ce corps, de donnée radicielle ce quadruplet.

Faisons l'hypothèse additionnelle que notre groupe G de départ est déployé sur F. Alors on peut prendre $T = A$ tore maximal déployé (et non déployé maximal...). A la donnée radicielle $\Psi(G) = (X^*(T), \Sigma, X_*(T), \Sigma^\vee)$, on peut associer la donnée "duale" :

$$(X_*(T), \Sigma^\vee, X^*(T), \Sigma) = (X^*(\widehat{T}), \Sigma^\vee, X_*(\widehat{T}), \Sigma).$$

Soit $\widehat{G}$ le groupe réductif sur $\mathbf{C}$ associé à cette donnée : c'est le *groupe dual* de G. Par exemple, le groupe dual de GL_n est GL_n, celui de SL_n est PGL_n, celui de $Sp(2n)$ est SO_{2n+1}. L'introduction de $\widehat{G}$ permet à Langlands d'aboutir à la reformulation suivante de l'isomorphisme de Satake :

Proposition 1. *Soit G un groupe réductif déployé sur le corps p-adique F. Il existe une bijection naturelle entre représentations lisses irréductibles non ramifiées de $G(F)$ et W-orbites dans $\widehat{A}(\mathbf{C})$ (pour dire cela l'hypothèse G déployé est superflue) ou de façon équivalente les $\widehat{G}(\mathbf{C})$-classes de conjugaison semi-simples dans $\widehat{T}(\mathbf{C})$.*

Prenons l'exemple de GL_2. Soit $f = \sum_n a_n e^{2i\pi nz} \in S_k(SL_2(\mathbf{Z}))$ normalisée propre pour les opérateurs de Hecke, $\pi_f = \otimes \pi_p$ la représentation automorphe correspondante. Alors le paramètre de Satake de π_p est la classe de conjugaison de

$$A_p := \begin{pmatrix} \alpha_p & 0 \\ 0 & \beta_p \end{pmatrix},$$

α_p et β_p vérifiant $\alpha_p + \beta_p = a_p$, $\alpha_p \beta_p = p^{k-1}$.

Malheureusement, la description des représentations non ramifiées en termes de $\widehat{G}(\mathbf{C})$-classes de conjugaison du tore dual n'est plus valable pour G non déployé. Il faut donc introduire un objet plus fin que $\widehat{G}$, en incorporant une action du groupe de Galois (ce qui est naturel, puisque le groupe se déploie sur une extension finie de F). Voyons comment cela fonctionne dans le cas plus général d'un groupe réductif connexe G non ramifié sur le corps p-adique F (c'est-à-dire quasi-déployé sur F et déployé sur une extension finie non ramifiée de F). Soit B un sous-groupe de Borel défini sur F, T un tore maximal inclus dans B, A le sous-tore déployé maximal de T. Soit W le groupe de Weyl restreint, i.e. le sous-groupe du groupe de Weyl de la paire (G,T) qui stabilise A. Ce qu'on a dit plus haut montre que les représentations non ramifiées de G sont en correspondance bijective naturelle avec les W-orbites de $\widehat{A}(\mathbf{C})$. L'inclusion $A \to T$ donne une surjection duale $\widehat{T}(\mathbf{C}) \to \widehat{A}(\mathbf{C})$; il s'agit de comprendre ce que donne dans $\widehat{T}(\mathbf{C})$ la $\widehat{G}(\mathbf{C})$-conjugaison dans $\widehat{A}(\mathbf{C})$.

Le groupe G se déploie sur une extension non ramifiée E de F. Comme le Borel B de G est défini sur F, le groupe de Galois de E sur F permute les racines positives de G sur E, et donne donc un morphisme de $\mathrm{Gal}(E/F)$ dans $\mathrm{Aut}(\widehat{G})$. On définit le *$L$-groupe*[6] comme le produit semi-direct ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$. La $\widehat{G}(\mathbf{C})$-conjugaison dans ${}^LG(\mathbf{C})$ correspond à la conjugaison tordue par l'élément de Frobenius qui engendre $\mathrm{Gal}(E/F)$. Voici l'observation cruciale de Langlands.

Lemme 1. *Les $\widehat{G}(\mathbf{C})$-classes de conjugaison semi-simples dans ${}^LG(\mathbf{C})$ correspondent naturellement aux W-orbites dans $\widehat{A}(\mathbf{C})$.*

On en déduit facilement le

Théorème 5 (Langlands)**.** *Il existe une bijection naturelle entre représentations non ramifiées de G sur F et $\widehat{G}(\mathbf{C})$-classes de conjugaison (ou ${}^LG(\mathbf{C})$-classes, on voit sans peine que c'est la même chose) dans ${}^LG(\mathbf{C})$. En d'autres termes, l'ensemble des représentations non ramifiées de G sur F est en bijection naturelle avec l'ensemble des L-*paramètres non ramifiés de G*, i.e. des morphismes*

$$\phi : \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F) \to {}^LG$$

dont la composée avec la projection naturelle ${}^LG \to \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$ soit l'identité, et telle que l'image par ϕ de tout élément soit semi-simple.

6. Cette construction du L-groupe dépend du choix de E. Je ne tiens pas compte de ce problème, que l'on peut par exemple résoudre en prenant au lieu de E l'extension maximale non ramifiée de F.

Voici donc comment le L-groupe, historiquement et conceptuellement, fait son apparition. On va voir tout de suite et tout au long de ce texte que son introduction illumine la théorie et permet de formuler et d'expliquer un grand nombre de phénomènes. La définition semble assez simple, mais c'est en réalité un objet extrêmement mystérieux ! D'après Langlands lui-même, cité par Casselman, le point subtil dans la définition du L-groupe n'est pas l'introduction du groupe de Galois mais le fait que la définition comme produit semi-direct (et non comme extension non scindée, ce qui est par exemple le cas quand on définit le groupe de Weil de $\mathbf{R}$, voir plus bas) de $\widehat{G}$ par le groupe de Galois fonctionne si bien...

Revenons au problème de la construction des fonctions L, forts du théorème précédent. On reprend les notations normales, en indiquant la dépendance en chaque place. On commence par définir le L-groupe de G globalement. On a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{Int}(\widehat{G}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G}) \to \mathrm{Aut}(\Psi(\widehat{G})) \to 1,$$

et le choix d'un triplet $\Sigma = (\widehat{B}, \widehat{T}, \{X_\alpha\})$, avec X_α un vecteur de valeur propre α, pour chaque racine positive α, détermine un scindage de la suite exacte précédente. L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ sur $\Psi(\widehat{G})$ (déduite de l'action du groupe de Galois sur G) fixe un certai triplet Σ et donc se relève en une action sur $\widehat{G}$. Le L-groupe de G est par définition le produit semi-direct

$${}^L G = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{F}/F).$$

En fait comme on le verra plus tard, on préfère en général remplacer $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ par le groupe de Weil W_F. Si $f : G^* \to G$ est un $\bar{F}$-isomorphisme de groupes algébriques sur F, f induit un isomorphisme de données radicielles $\bar{f} : \Psi(G^*) \to \Psi(G)$. On dit que f est un isomorphisme intérieur si pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, $f(\sigma(g)) = \mathrm{ad}(g_\sigma)\sigma(f(g))$, pour un certain $g_\sigma \in G(\bar{F})$, ce qui revient exactement à dire que $\bar{f}$ commute avec l'action du groupe de Galois. Le L-groupe de G dépend seulement de la classe de formes intérieures à laquelle appartient G et détermine la classe d'isomorphisme sur F de la forme intérieure quasi-déployée de G. Voici quelques exemples de L-groupes :

1. Si $G = GL_n$, comme G est déployé, ${}^L G = GL_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.
2. Soient E/F une extension quadratique imaginaire, σ la conjugaison de E sur F, $\Phi \in GL_n(E)$ une matrice hermitienne. Soit G le groupe unitaire associé à l'extension E/F et à Φ. En particulier,

$$G(F) = \{g \in GL_n(E), \Phi^t \bar{g}^{-1} \Phi^{-1} = g\}.$$

   Sur E, G est isomorphe à GL_n/E, donc $\widehat{G} = GL_n(\mathbf{C})$ et l'action du groupe de Galois sur $\widehat{G}$ se factorise par $\mathrm{Gal}(E/F)$. Il existe un épinglage standard pour $\widehat{G}$, obtenu en prenant pour $\widehat{T}$ le tore diagonal, pour $\widehat{B}$ le groupe des matrices triangulaires supérieures et $\{X_\alpha\}$ l'ensemble des matrices $(a_{i,j}) = (\delta_{i,k}\delta_{j,k+1})$, pour $1 \leq k < n$. Soit Φ_n la matrice définie par $(\Phi_n)_{i,j} = (-1)^{i-1}\delta_{i,n-j+1}$. Le morphisme $g \mapsto \Phi_n{}^t g^{-1} \Phi_n^{-1}$ est l'unique automorphisme non intérieur de $\widehat{G}$ préservant cet épinglage. Donc σ agit sur $\widehat{G}$ par cet automorphisme et ${}^L G = GL_n(\mathbf{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(E/F)$ pour cette action.

Pour chaque v place finie de F hors d'un ensemble fini S correspondant aux places de ramification pour G et π, on veut associer un facteur local à π_v, à qui l'on pense désormais comme une classe de conjugaison dans ${}^L G(\mathbf{C})$. Or, on l'a dit, c'est une chose qu'Artin savait déjà faire, dans le cas des classes de conjugaison de Frobenius dans un groupe de Galois (on va voir très bientôt que ce n'est pas une coïncidence) ! Guidé par cet exemple, on fixe une représentation complexe irréductible de dimension finie ρ du L-groupe. On pose alors :

$$L(s, \rho, \pi) = \prod_{v \notin S} \det\left(1 - \frac{\rho(\Phi_v)}{(Nv)^s}\right)^{-1}.$$

La description des paramètres de Satake pour les formes modulaires explicitée plus haut montre que l'on retrouve dans ce cas précis les fonctions L de Hecke, et il en va bien sûr de même pour GL_1. On conjecture que ces fonctions L vérifient les bonnes propriétés analytiques attendues : continuation méromorphe, équation fonctionelle, etc. Pour GL_n, cela a été prouvé par Jacquet-Langlands et Godement-Jacquet, en utilisant des méthodes inspirées de la thèse de Tate ([JL], [GJ]).

La fonction L d'une représentation automorphe doit nous apprendre beaucoup de choses sur celle-ci, si l'on garde à l'esprit les résultats de Hecke et Weil pour GL_2. Cela revient à dire qu'*une représentation automorphe est très fortement contrainte par les classes de conjugaison locales qu'elle détermine dans le L-groupe*. Ce slogan peut être pris comme credo. En particulier, soient G et G' deux groupes réductifs sur F, et supposons qu'il existe un morphisme

$r : {}^LG \to {}^LG'$ entre les L-groupes (compatible aux projections sur le groupe de Galois). Alors une famille de classes de conjugaison semi-simples dans ${}^LG(\mathbf{C})$ en détermine une dans ${}^LG'(\mathbf{C})$, *via* r. Si l'on croit à la philosophie précédente [7], on est donc amené avec Langlands à la merveilleuse conjecture suivante, dite *conjecture de fonctorialité de Langlands.*

Conjecture 1 (Langlands)**.** *Soient F un corps de nombres, G et G' deux groupes réductifs sur F, $r : {}^LG \to {}^LG'$ un L-morphisme. Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbf{A}_F)$. Il existe une représentation automorphe π' de $G'(\mathbf{A}_F)$, telle que*

$$L(s, \pi', \rho') = L(s, \pi, \rho' \circ r),$$

pour toute représentation irréductible de dimension finie ρ' de ${}^LG'$.

Prenons par exemple $G = \{1\}$, et $G' = GL_n$. Cet exemple apparemment simple donne une idée de la profondeur de la conjecture. Alors π est triviale et le choix de r est simplement le choix d'un morphisme continu :

$$r : \mathrm{Gal}(E/F) \to GL_n(\mathbf{C}),$$

pour une certaine extension galoisienne finie E de F. Alors la conjecture de fonctorialité affirme qu'il existe une représentation automorphe π de GL_n telle que pour tout place v de F non ramifiée dans E, π est non ramifiée en v et le paramètre de Satake de π en v coïncide avec la classe de conjugaison $r(\mathrm{Frob}_v)$. Dans le cas $n = 1$, $F = \mathbf{Q}$, cela redonne exactement le théorème de Kronecker-Weber et, si F est un corps de nombres quelconque, la loi de réciprocité d'Artin déjà évoquée identifiant caractères du groupe de Galois et caractères de Hecke triviaux sur la composante connexe à l'infini (caractères de Dirichlet). Au passage, on obtient aussi une caractérisation analytique (en termes de π) de l'ensemble des nombres premiers décomposés dans E, qui détermine E à isomorphisme près ([A1]).

On est très loin à l'heure actuelle d'une démonstration de la conjecture de fonctorialité. On en connaît toutefois quelques exemples. Un premier exemple est la fameuse *correspondance de Jacquet-Langlands* ([JL]). Soit F un corps de nombres, D une algèbre de quaternions définie sur F. C'est une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F ; le groupe G' sur F défini par

$$G'(A) = (D \otimes_F A)^*$$

est un groupe algébrique réductif, *forme intérieure* de $G = GL_2$. En particulier leurs L-groupes sont les mêmes. La correspondance de Jacquet-Langlands concerne le cas du morphisme trivial de ${}^LG'$ dans ${}^LG$. Elle donne une bijection $\pi' \mapsto \pi$ identifiant les fonctions L de l'ensemble des représentations automorphes de $G'(\mathbf{A})$ sur l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbf{A}) = GL_2(\mathbf{A})$ dont la composante locale en une place de S est dans la série discrète, S désignant l'ensemble des places finies où D se ramifie. Cet énoncé plus précis que ce que prédit la conjecture de fonctorialité se devine à l'aide des paramètres de Langlands et se prouve à l'aide de la formule des traces, comme on le verra plus loin. C'est un énoncé remarquable : introduire les algèbres à division revient à étudier les formes automorphes relativement à des groupes arithmétiques à domaine fondamental *compact* dans $SL_2(\mathbf{R})$ et l'absence de pointes et donc de développements de Fourier empêche une analyse explicite de ces formes...

Un autre exemple, qui rappelle l'astuce unitaire de Weyl, est donné par le *changement de base* et *l'induction automorphe* résolubles pour GL_n. On fixe une extension finie E du corps de nombres F de degré d. Notons $G = G_n = GL_n$ sur F et H le groupe sur F obtenu par restriction des scalaires à F du groupe GL_n sur E. Alors ${}^LG = GL_n(\mathbf{C}) \times \mathrm{Gal}(E/F)$, et

$${}^LH = (GL_n(\mathbf{C}) \times \cdots \times GL_n(\mathbf{C})) \rtimes \mathrm{Gal}(\bar{F}/F).$$

On a une copie de $GL_n(\mathbf{C})$ pour chaque plongement de E dans $\bar{F}$ sur F et $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ agit par permutation des plongements. On a deux L-morphismes naturels : le plongement diagonal $r : {}^LG \to {}^LH$ et la flèche $i : {}^LH \to {}^LG_{dn}$ envoyant un d-uplet de $(GL_n(\mathbf{C}) \times \cdots \times GL_n(\mathbf{C}))$ sur la matrice diagonale par blocs évidente, dont on fait un L-morphisme en faisant agir un élément de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ par permutation des blocs. Par le principe de fonctorialité, ces morphismes doivent correspondre à des morphismes r et i, dits de restriction et d'induction pour des raisons que l'on expliquera plus tard, des représentations automorphes de GL_n sur F vers les représentations automorphes de GL_n sur E et des représentations automorphes de GL_n sur E vers les représentations automorphes de GL_{nd} sur F, respectivement. Cela a été démontré dans le cas d'une extension résoluble par Arthur et Clozel, en faisant un usage intensif de la formule des traces ([AC]).

Ces deux instances du principe de fonctorialité donnent une idée de la difficulté. Bien que modestes, elles sont très utiles dans la pratique : voir par exemple les simplifications considérables qui en découlent dans la mise en oeuvre de la méthode de Taylor-Wiles pour GL_2 sur $\mathbf{Q}$ ([Con]), ou la suite de ce texte.

7. On ne peut pas vraiment procéder autrement... A l'exception de certains travaux d'Eichler et Shimizu, très peu d'exemples de fonctorialité étaient connus à la fin des années soixante.

1.5 Réciprocité

La définition des fonctions L automorphes est inspirée par les travaux d'Artin et bâtie de façon à englober les fonctions L d'Artin. Mais Artin ne s'est pas contenté de définir les fonctions L des représentations galoisiennes. Sa loi de réciprocité donne, comme on l'a dit, une correspondance bijective entre caractères du groupe de Galois et caractères de Dirichlet préservant les fonctions L. La fonctorialité suggère une généralisation possible dans un sens (Galois vers automorphe), mais que dire de la réciproque ? Peut-on paramétrer les représentations automorphes d'un groupe réductif par des L-morphismes du groupe de Galois vers le L-groupe ? Revenons sur le cas de GL_1. La formulation classique de la loi de réciprocité n'est pas complètement satisfaisante car elle met en correspondance les caractères continus du groupe de Galois et les caratères de Dirichlet. Or, on a vu que les objets naturels (automorphes) étaient les caractères de Hecke. Ce problème a été résolu par Weil. Soit K un corps local. On va définir le groupe de Weil de K, noté W_K, un objet un peu *ad hoc* plus adapté que le groupe de Galois. Si $K = \mathbf{C}$, $W_K = \mathbf{C}^*$. Si $K = \mathbf{R}$, W_K est engendré par $\mathbf{C}^*$ et un élément j tel que $j^2 = -1$ et $jzj^{-1} = \bar{z}$, pour tout $z \in \mathbf{C}^*$ (c'est donc une extension non scindée de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{C}^*$). Si K est non archimédien, W_K est la pré-image de $\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, pour le morphisme donné par :

$$1 \to I_K \to \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) = \widehat{\mathbf{Z}} \to 1.$$

On munit W_K d'une topologie en demandant que la projection $W_K \to \mathbf{Z}$ soit continue et que la topologie induite sur I_K soit la topologie profinie ; ce n'est pas la topologie induite par l'inclusion $W_k \subset \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$! Les groupes de Weil sont définis de sorte que l'on ait un isomorphisme de réciprocité :

$$\mathrm{rec} : K^* \simeq W_K^{\mathrm{ab}}.$$

En particulier, on a désormais une bijection entre caractères de Hecke pour K et caractères complexes continus du groupe de Weil W_K, respectant les fonctions L. Il existe aussi une version globale du groupe de Weil, W_F pour tout corps de nombres F. Le L-groupe est défini dorénavant en utilisant le groupe de Weil plutôt que le groupe de Galois.

Que se passe-t-il en dimension supérieure ? On peut imaginer que la fonction L d'une représentation automorphe π de G est toujours la fonction L d'un L-morphisme du groupe de Weil dans ${}^LG$ et que réciproquement celui-ci détermine π. On va voir tout de suite que cet espoir un peu naïf demande à être précisé et corrigé. Un obstacle évident est que les fonctions L automorphes complètes ne sont définies que pour GL_n, comme on l'a mentionné ci-dessus. Cependant, en sens inverse, on peut essayer de relier représentations automorphes et représentations du groupe de Weil, en espérant aboutir à une classification qui permette de définir les fonctions L dans tous les cas. Il est logique de se concentrer dans un premier temps sur le cas local. On cherche donc à classifier les représentations admissibles irréductibles de $G(F)$, F corps local.

Alors que la théorie p-adique n'en est qu'à ses balbutiements au moment où Langlands envisage ces questions, la théorie archimédienne est bien comprise. Supposons pour simplifier le groupe de Lie semi-simple. L'étude des représentations irréductibles admissibles se ramène à l'étude des représentations irréductibles *tempérées*, qui se déduit elle-même de l'étude des représentations de la *série discrète* de G. Celles-ci sont paramétrées par les caractères d'un sous-groupe de Cartan compact T. Plus précisément, il correspond à tout $\lambda \in \rho + X^*(T)$ régulier un ensemble fini de représentations de la série discrète, de cardinal $|W(G,T)/W(K,T)|$. On associe à cet ensemble fini un morphisme $\phi : W_{\mathbf{R}} \to {}^LG$, dont la restriction à $\mathbf{C}^*$ est donné par $\lambda - \rho \in X_*(\widehat{T})$. Langlands mène cette étude dans [L7].

Le cas non archimédien est différent. Même pour GL_n avec $n > 1$, les représentations complexes de dimension n du groupe de Weil ne suffisent pas à décrire toutes les représentations admissibles irréductibles de $GL_n(F)$. Supposons $G = GL_n$. La nouveauté majeure est l'existence de représentations *supercuspidales*, c'est-à-dire de représentations lisses irréductibles qu'on ne peut pas obtenir à partir d'induites paraboliques. Ces représentations supercuspidales ont des coefficients matriciels à support compact modulo le centre, donc sont en particulier de carré intégrable, et forment les blocs de base de la théorie. Si tout se passe bien, il est donc raisonnable d'imaginer que les supercuspidales correspondent aux représentations irréductibles du groupe de Weil. Notons $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ une hypothétique telle correspondance. Supposons que $n = mr$. Si π est une représentation supercuspidale de GL_m, la représentation $I_P^G(\Delta)$, avec $\Delta = [\pi, \pi(r-1)]$, a un unique quotient irréductible $Q(\Delta)$ (qui est essentiellement de carré intégrable). Bernstein et Zelevinsky ont prouvé que toute représentation admissible irréductible π de $GL_n(F)$ s'écrit de façon unique sous la forme $Q(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ (à permutation près des Δ_i), avec $Q(\Delta_1, \dots, \Delta_r)$ l'unique quotient irréductible de $I_P^G(Q(\Delta_1) \otimes \cdots \otimes Q(\Delta_r))$, si Δ_i ne précède pas Δ_j pour $i < j$. On aimerait associer à π la représentation

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=0}^{r_i - 1} \sigma(\pi_i)(j),$$

si $\Delta_i = [\pi_i, \ldots, \pi_i(r_i - 1)]$. Mais on voit bien qu'il y a un problème : si par exemple $r = 2$, $n = 2m$ et π est une supercuspidale de GL_m, $\Delta_1 = [\pi(1)]$, $\Delta_2 = [\pi]$ (rappelons que Δ_1 ne doit pas précéder Δ_2 !) et $\Delta = [\pi, \pi(1)]$, les représentations attachées à $Q(\Delta_1, \Delta_2)$ et $Q(\Delta)$ sont les mêmes... Pour s'en sortir, on choisit plutôt de faire correspondre aux représentations admissibles irréductibles de $GL_n(F)$ des représentations complexes du *groupe de Weil-Deligne* W'_F. Un tel objet est un triplet (ρ, V, N) constitué d'une représentation complexe continue $\rho : W_F \to GL(V)$, V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension n, et $N \in \mathrm{End}(V)$ un endomorphisme nilpotent qui vérifie $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = ||w||$ pour tout $w \in W_F$. Une représentation complexe de W'_F est en fait la même chose qu'une représentation complexe continue semi-simple du groupe $W_F \times SL_2(\mathbf{C})$ et c'est ce point de vue qu'on retiendra plus tard. On associe alors à $Q(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ la représentation

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=0}^{r_i-1} \sigma(\pi_i)(j) \otimes Sp(m_i)$$

avec $m_i = \dim \pi_i$, et $Sp(m_i)$ la représentation donnée par $V = \mathbf{C}e_0 \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}e_{m_i-1}$, $\rho(w)e_j = ||w||^j e_j$ et $Ne_j = e_{j+1}$ si $0 \leq i < m_i$, $Ne_{m_i-1} = 0$. La définition des représentations de Weil-Deligne n'est pas si miraculeuse qu'elle en a l'air : le théorème de monodromie ℓ-adique de Grothendieck (ℓ premier distinct de la caractéristique de F) montre que la donnée d'une représentation complexe du groupe de Weil-Deligne revient exactement à la donnée d'une représentation ℓ-adique continue du groupe de Weil. Les représentations ℓ-adiques sont un outil plus sensible et donc plus approprié pour capturer la structure profinie de l'inertie.

Notons $\mathcal{L}_F = W_F$ si F est un corps local archimédien, $\mathcal{L}_F = W_F \times SL_2(\mathbf{C})$ si F est non archimédien.

Conjecture 2. *A tout morphisme continu $\phi : \mathcal{L}_F \to {}^L G$ compatible à la deuxième projection (ce que l'on appelle un paramètre de Langlands ou L-paramètre) et semi-simple* [8]*, vu à $\widehat{G}$-conjugaison près, correspond naturellement un paquet Π_ϕ de représentations admissibles irréductibles de $G(F)$, qui est un ensemble fini. Les paquets Π_ϕ forment une partition de l'ensemble des représentations admissibles irréductibles de $G(F)$. Si $G = GL_n$, les paquets sont des singletons et la construction préserve les facteurs locaux des fonctions L.*

Cette conjecture a été démontrée pour le groupe linéaire dans le cas non archimédien par Harris-Taylor et Henniart et pour certains groupes classiques par Arthur [9]. La conjecture de Langlands locale non-archimédienne et sa preuve sont exposées de façon limpide dans [Ca1] et [We]. On en dira quelques mots plus loin. Pour les travaux d'Arthur, voir l'introduction de [A6] ou [Moe].

La conjecture précédente n'est qu'une première étape. *Elle ne dit absolument rien sur la structure des L-paquets* Π_ϕ, qui a à voir avec le fait que certaines représentations ont la même fonction L. Cette structure sera élucidée à la fin de la partie 2. La conjecture ne dit rien non plus du cas global. On ne dispose pas à l'heure actuelle d'une description autre que très conjecturale de la situation (ébauchée notamment dans [A4]), dont on dira aussi quelques mots dans la partie 2. On peut quand même relier de façon précise et spectaculaire certaines représentations automorphes à des représentations galoisiennes (et même à des "motifs"), comme on le verra dans la troisième partie de ce texte.

2 Variétés de Shimura, formule des traces et spectre cuspidal

2.1 Variétés de Shimura et leurs fonctions zêta

La définition des fonctions L des formes automorphes pose une autre question. Il existe de nombreuses fonctions L dans la nature : les fonctions L des représentations galoisiennes et les fonctions zêta de Hasse-Weil des variétés algébriques, dont le développement de la géométrie algébrique moderne sous l'impulsion de Grothendieck a éclairé la signification. Soit X une variété projective lisse de dimension d sur $\mathbf{Q}$, qui s'étende en un schéma projectif et lisse sur $\mathbf{Z}[1/N]$. Si p est premier à N, on peut donc considérer la réduction X_p de X modulo p ; c'est une variété projective et lisse. Sa fonction zêta locale est définie par

$$Z_p(T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X_p(\mathbf{F}_{p^n})|}{n} T^n\right)$$

8. Cela signifie que la projection de $\phi(w)$ dans $\widehat{G}$ est semi-simple, pour tout $w \in \mathbf{C}^*$ dans le cas archimédien et tout $w \in W_F$ dans le cas non-archimédien.

9. Les résultats qu'obtient Arthur concernant la correspondance de Langlands locale sont beaucoup plus riches et précis que l'énoncé de la conjecture 2.

et on sait que

$$Z_p(T) = \prod_{i=0}^{2d} Z_{p,i}(T)^{(-1)^{i+1}},$$

$Z_{p,i}(T) = (1-\alpha_{i,1}T)\dots(1-\alpha_{i,b_i}T) \in \mathbf{Z}[T]$ l'inverse du polynôme caractéristique du Frobenius sur le i-ème groupe de cohomologie étale ℓ-adique ($\ell \neq p$) de X_p, avec b_i i-ème nombre de Betti et $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$. On peut former le produit eulérien :

$$Z^N(s) = \prod_{p \nmid N} Z_p(p^{-s}).$$

On conjecture que cette fonction admet une extension méromorphe à tout le plan complexe, et, une fois convenablement complétée aux places archimédiennes et divisant N, que la fonction zêta totale admet une équation fonctionnelle. Tout cela peut aussi bien être fait en remplaçant le faisceau constant $\mathbf{Q}_\ell$ par un faisceau lisse ℓ-adique. Ces propriétés conjecturales ressemblent à celles des fonctions L des formes automorphes : motivé par le théorème réciproque de Weil, Langlands cherche à préciser cette analogie. En fait, réciproquement, écrire la fonction zêta de Hasse-Weil en termes de fonctions L automorphes donne un moyen de prouver la continuation méromorphe et l'équation fonctionnelle.

Langlands était conforté dans cette direction par les travaux d'Eichler, Shimura et Deligne qui menaient à bien ce programme dans le cas des courbes modulaires [10] (cf. [Sh2] et [D1]). Dans un langage différent, Eichler et Shimura avaient en gros prouvé le fait suivant. La courbe complexe $Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}$ classifie les courbes elliptiques E sur $\mathbf{C}$ avec un sous-groupe cyclique d'ordre N. Cette courbe a naturellement un modèle affine et lisse sur $\mathbf{Z}[1/N]$, que l'on peut compactifier en un schéma projectif et lisse sur $\mathbf{Z}[1/N]$. La fonction zêta de ce dernier s'écrit comme le produit des fonctions L de Hecke des f_i, $i = 1, \dots, g$, avec $(f_i)_{i=1,\dots,g}$ une base de $S_2(\Gamma_0(N))$ formée de formes propres pour les opérateurs de Hecke $T(p)$, $p \nmid N$. La démonstration d'Eichler et Shimura repose sur les congruences qui portent désormais leur nom. Pour cette raison notamment, il est très difficile de déduire du cas de GL_2 l'allure que peut avoir la théorie pour des groupes réductifs plus généraux. La première étape dans cette direction est d'identifier la généralisation naturelle des courbes modulaires : les variétés de Shimura, dont la théorie a été développée par Shimura dans les années 60 ([Sh1]), puis simplifiée et enrichie par Deligne ([D2]).

Les courbes modulaires sont associées à GL_2 sur $\mathbf{Q}$, les variétés de Shimura sont associées à des groupes réductifs G sur $\mathbf{Q}$ plus généraux. Il est hors de question de tenter ici une introduction à la vaste théorie des variétés de Shimura. Des références classiques sont [D2] ou encore [Mi]. On définit tout d'abord les variétés de Shimura comme des variétés complexes, uniformisées par des espaces hermitiens symétriques. Soit G un groupe algébrique linéaire réductif connexe sur $\mathbf{Q}$. On note X l'espace symétrique de $G(\mathbf{R})$. On *suppose* que X est hermitien symétrique, c'est-à-dire admet une structure kählerienne invariante par $G(\mathbf{R})$. Si Γ est un sous-groupe de congruences de $G(\mathbf{Q})$, on sait alors que $S(G,X)(\mathbf{C}) := \Gamma\backslash X$ est une variété algébrique complexe, lisse si Γ est suffisamment petit (Baily-Borel). La théorie des modèles canoniques donne l'existence de modèles naturels de ces variétés $S(G,X)(\mathbf{C})$ sur des corps de nombres, appelés corps réflexes. Cette théorie est due à Shimura lui-même et est un point fondamental pour la suite de ce texte, il vaut donc la peine d'en dire quelques mots. A tout $h \in X$ correspond $\mu = \mu_h : \mathbf{G}_m \to G_{\mathbf{C}}$, dont la classe de $G(\mathbf{C})$-conjugaison ne dépend que de X. Soit T un tore maximal de G. Ceux-ci étant tous conjugués sous $G(\mathbf{C})$, on peut supposer que T est défini sur $\mathbf{Q}$ (il existe toujours un tel tore) et que μ est à valeurs dans $T_{\mathbf{C}}$, i.e. que $\mu \in X_*(T)_{\mathbf{C}}$. Comme T est défini sur $\mathbf{Q}$, tout élément de $X_*(T)_{\mathbf{C}}$ est défini sur $\bar{\mathbf{Q}}$: d'où l'existence d'un corps de nombres $E(G,X)$ sur lequel est définie la $G(\mathbf{C})$-classe de conjugaison de μ. Il faut alors démontrer l'existence d'un modèle canonique de la variété de Shimura sur $E(G,X)$, en un sens à préciser. Commençons par le cas des tores. Alors la classe de conjugaison de μ est juste l'élément $\mu \in X_*(T)_{\bar{\mathbf{Q}}}$ et $E = E(T,h)$ le sous-corps de $\bar{\mathbf{Q}}$ fixé par le stabilisateur Γ_μ de μ dans $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Par définition, on a donc un cocaractère $\mu : \mathbf{G}_{m,E} \to T_E$. D'où une application

$$r(T,h) := N_{E/\mathbf{Q}} \circ \mathrm{Res}_{E/\mathbf{Q}}(\mu) : \mathbf{G}_{m,E} \to T,$$

qui induit une application

$$r(T,h) : \mathbf{A}_E^*/E^*(E_\infty^*)^\circ \to T(\mathbf{A})/T(\mathbf{Q})T(\mathbf{R}) = S(T,h)(\mathbf{C}).$$

10. Ces travaux s'inscrivent dans une tradition qui a plus à voir avec la théorie des nombres qu'avec la théorie des représentations. En effet, Weil avait déjà noté que la célèbre conjecture de Ramanujan qui affirme que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ ressemble étrangement aux bornes des valeurs propres du Frobenius sur la cohomologie étale et certaines congruences de la fonction τ suggéraient à Serre l'existence pour tout ℓ, d'une représentation ℓ-adique associée à τ.

Pour définir le modèle canonique de $S(T,h)$ sur E, c'est-à-dire un schéma profini sur E avec pour $\bar{\mathbf{Q}}$-points $S(T,h)(\mathbf{C})$, il suffit de définir l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)$ sur $S(T,h)(\mathbf{C})$. On décrète que celle-ci se factorise par l'abélianisé du groupe de Galois et on choisit la définition suivante.

Définition 5. Le *modèle canonique* de $S(T,h)(\mathbf{C})$ est le modèle sur $E = E(T,h)$ tel que tous les points de $S(T,h)(\mathbf{C})$ sont définis sur E^{ab} et tel que

$$\forall \gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/E)^{\mathrm{ab}}, \forall x \in S(T,h)(\mathbf{C}), \quad \gamma(x) = (r(T,h) \circ \mathrm{rec}(\gamma))(x),$$

rec désignant l'isomorphisme de réciprocité d'Artin.

Soit (G,X) une donnée de Shimura, $E \subset \mathbf{C}$ une extension de $E(G,X)$.

Définition 6. Un *modèle* de $S(G,X)$ est un pro-schéma Z sur E avec action E-rationnelle continue de $G(\mathbf{A}_f)$ et un isomorphisme $G(\mathbf{A}_f)$-équivariant $Z \times_E \mathbf{C} \simeq S(G,X)$. Un tel modèle est dit *faiblement canonique* si pour tout morphisme injectif $(T,h) \to (G,X)$ de données de Shimura, le morphisme correspondant $S(T,h) \to S(G,X)$ est défini sur $E.E(T,h)$, et *canonique* si en outre $E = E(G,X)$.

On montre qu'en faisant varier le tore H, on obtient suffisamment de contraintes pour garantir *l'unicité* du modèle canonique. Shimura a montré *l'existence* pour les variétés de Shimura paramétrant des variétés abéliennes avec données additionnelles en utilisant la *formule de Shimura-Taniyama* (dont Tate a donné une belle preuve, voir [T2]).

2.2 Fonctions zêta des variétés de Shimura et fonctions L automorphes

Pour simplifier, *je néglige le centre de G dans la suite*. Toute représentation algébrique ξ du groupe G sur $\mathbf{Q}$ définit sur la variété de Shimura un système local $F(\xi)$. Désormais la représentation ξ est fixée, et les choix que l'on fera en dépendront évidemment. On veut écrire la fonction zêta du faisceau $F(\xi)$ sur $S(K)$ comme produit de fonctions L de formes automorphes. Pour obtenir une telle factorisation, même si l'on y croit très fort, encore faut-il savoir avec quel exposant (éventuellement nul) apparaîtra la fonction L d'une représentation automorphe π de G donnée, et quelle représentation de ${}^LG$ choisir pour définir ces fonctions L... Commençons par énoncer une première version du résultat final, hélas fausse pour des raisons subtiles que l'on expliquera plus loin, mais qui permet de se faire une idée des choix nécessaires. Si π est une représentation automorphe de G, posons $m(\pi_\infty) = 0$ si le caractère infinitésimal de π_∞ est différent de celui de $\xi^\vee$. Sinon, la définition de $m(\pi_\infty)$ est dictée par des considérations d'analyse harmonique que l'on passe sous silence. On définit par ailleurs $m(\pi_f)$ comme la multiplicité de la représentation triviale de K dans π_f. Soit r^0 la représentation de $\widehat{G}$ de plus haut poids μ. Les poids de r^0 sont donc les $\omega\mu$ avec $\omega \in W(\widehat{T},\widehat{G})$. Le stabilisateur de μ est $W(\widehat{T},\widehat{M})$, $\widehat{M}$ étant le groupe engendré par $\widehat{T}$ et les coracines orthogonales à μ, et la dimension de r^0 est donc $[W(\widehat{T},\widehat{G}) : W(\widehat{T},\widehat{M})]$. Si x est un vecteur non nul se transformant selon μ, il existe une unique façon d'étendre r^0 en une représentation r^0 de $\widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(L/E)$, L extension finie suffisamment grande de E, de sorte que $r^0(\sigma)x = x$, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$. On pose enfin

$$r = \mathrm{Ind}_{{}^LG}^{\widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(L/E)} r^0$$

(rappelons que ${}^LG$ est juste $\widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$). Si $G = GL_2$ sur $\mathbf{Q}$, r est l'extension de la représentation standard à ${}^lG$ triviale sur $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Autre exemple : soit $G = GU(\Phi)$ pour une certaine forme hermitienne Φ relative à une extension quadratique imaginaire E/F. Supposons Φ diagonale, de type (p,q) à l'infini. On identifie $G(\mathbf{C})$ à $GL_n(\mathbf{C}) \times GL_1(\mathbf{C})$. Alors

$$h : (z,w) \mapsto h(z,w) = \begin{pmatrix} zI_p & 0 \\ 0 & wI_q \end{pmatrix} \times zw$$

et relativement aux paires de Borel standard et à l'identification $\widehat{G} = GL_n(\mathbf{C}) \times GL_1(\mathbf{C})$,

$$\widehat{\mu}\left(\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \times s\right) = t_1 \dots t_n s.$$

C'est le plus haut poids de la représentation de $\widehat{G}$, $\bigwedge^p(r_{\mathrm{st}})$ où r_{st} est la représentation standard de $GL_n(\mathbf{C})$ et $s \in GL_1(\mathbf{C})$ agit par multiplication par s. Enfin, le corps réflexe de la variété de Shimura est E si $p \neq q$, F si $p = q$. La représentation r^0 est donc la représentation de ${}^LG_E$ sur $\bigwedge^p(r_{\mathrm{st}})$, avec action triviale de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/E)$.

Enfin, notons $q = \dim S(K)$. Alors, *en première approximation*,

$$Z(s, S(K), F(\xi)) = \prod_{\pi} L(s - \frac{q}{2}, \pi, r)^{m(\pi)m(\pi_\infty)m(\pi_f)}.$$

Ici, $m(\pi)$ est bien sûr la multiplicité de π dans l'espace des formes automorphes. Comment arrive-t-on à cette conjecture ? Langlands lui-même l'explique ainsi.

> *The major revelation, which arrived as I was standing smoking a cigarette, an unfortunate habit long abandoned, near the mathematical institute in Bonn, just at the intersection — or junction — of Beringstraße and Wegelerstraße, was that – in normal circumstances – each element of the discrete series of the appropriate weight contributes a one-dimensional subspace to the cohomology of the appropriate sheaf on the Shimura variety (a term that I introduced only later and that was imposed only because of some insistence on my part.) Let the Shimura variety be associated to a group G. The number of different discrete series associated to a given weight is, typically, the index $d = [W_G : W_K]$ of the Weyl group of the maximal compact subgroup of G in the Weyl group of G. So one is led to reflect along the following lines. The cohomology groups are defined topologically or ℓ-adically, but the two are normally of the same dimension. An automorphic representation is written $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$, where π_f is the product over the nonarchimedean places of π_v. In some sense, π_∞ determines what cohomology is attached to π and π_f determines the associated the ℓ-adic representation. If, as is at first suggested, one element of the discrete series of a given weight is matched with a given π_f, then so are all d of them, say $\pi_\infty^{(1)} \dots, \pi_\infty^{(d)}$. These d representations should be taken as a packet and the packet determines a subspace of the cohomology of dimension d. It should correspond to an ℓ-adic representation of dimension d and one supposes, along the lines of the Eichler-Shimura relations, that the L-function of this representation is equal to an automorphic representation $L(s, \pi, \sigma)$, where σ is a representation of the L-group of G. So one predicts that for each G to which is attached a Shimura variety, there is associated a natural representation σ of degree d of the group ${}^LG$. The existence of this representation is by no means obvious and was proven by a case-by-case examination of the groups to which Shimura varieties are attached.*

Le paragraphe qui suit est consacré à une explication détaillée de cette citation, suivant [L5] et [L4]. Notons $X = G(\mathbf{R})/K$ l'espace symétrique associé à G, $X_\Gamma = \Gamma\backslash X$. La représentation ξ définit un système local $F(\xi)$ sur X_Γ. On souhaite calculer les groupes de cohomologie $H^i(X_\Gamma, F(\xi))$. La résolution de de Rham et la théorie des groupes de Lie montrent qu'on peut le calculer comme groupe de cohomologie relative d'algèbres de Lie

$$H^i(X_\Gamma, F(\xi)) = H^i(\mathfrak{g}, K, \mathcal{C}^\infty_{\text{fin}}(\Gamma\backslash G) \otimes \xi).$$

Le membre de droite [11] est le i-ème foncteur dérivé d'un foncteur exact à gauche dans la catégorie des $(\mathfrak{g}, K)$-modules : les foncteurs $H^q(\mathfrak{g}, K, \bullet)$ sont les foncteurs dérivés de $W \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(\mathbf{C}, W)$. Cela permet de montrer que si U, V sont deux $(\mathfrak{g}, K)$-modules, de caractères infinitésimaux distincts, $H^q(\mathfrak{g}, K, U \otimes V^\vee)$ est toujours nul. Par ailleurs, d'après Gelfand-Piatetski-Shapiro, sous l'hypothèse que $\Gamma\backslash G$ est compact,

$$L^2(\Gamma\backslash G) = \widehat{\bigoplus_{\pi}} m(\pi, \Gamma)\pi,$$

la somme portant sur les représentations irréductibles unitaires de G. Comme $L^2_{\text{fin}}(\Gamma\backslash G) = \mathcal{C}^\infty_{\text{fin}}(\Gamma\backslash G)$, on en déduit finalement que :

$$H^i(X_\Gamma, F(\xi)) = \bigoplus_{\pi} m(\pi, \Gamma) H^i(\mathfrak{g}, K, \pi \otimes \xi).$$

Le calcul de la cohomologie se divise donc en deux étapes : la détermination des multiplicités $m(\pi, \Gamma)$, qui est une question globale difficile qui n'est pas notre propos, puisque on laisse ces coefficients indéterminés ; un calcul de théorie de Lie, le calcul de $H^i(\mathfrak{g}, K, \pi \otimes \xi)$, auquel on s'attaque maintenant. Avant de poursuivre, notons d'une part que ce qui précède est valable pour tout groupe réductif (pas seulement pour une donnée de Shimura) et d'autre part que si G (modulo son centre) est anisotrope, tout ceci se transfère presque sans effort *via* les théorèmes de comparaison en un isomorphisme entre $G(\mathbf{A}_f)$-modules

$$H^i(S(K_f), F(\xi)) = \bigoplus_{\pi} m(\pi) H^i(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes \xi)\pi_f^{K_f},$$

la somme portant sur les représentations automorphes de $G(\mathbf{A})$. Ainsi, par un calcul topologique, on relie la cohomologie étale du système local $F(\xi)$ sur la variété de Shimura aux représentations automorphes, c'est bon signe !

11. L'indice $\bullet_{\text{fin}}$ désigne l'ensemble des vecteurs K-finis. On supprimera cet indice quand on manipulera des représentations unitaires irréductibles ou automorphes.

Restreignons-nous désormais aux représentations automorphes π dont la composante archimédienne π_∞ est dans la *série discrète*. Un groupe réductif réel a une série discrète non nulle si et seulement s'il admet un tore compact maximal, par un théorème d'Harish-Chandra, et cette dernière condition est de toute façon nécessaire si l'on veut que le groupe donne naissance à une variété de Shimura. On fait donc cette hypothèse. Quand π contribue-t-elle au membre de droite de l'isomorphisme précédent ? Une condition nécessaire, on l'a vu plus haut, est que le caractère infinitésimal de $\xi^\vee$ coïncide avec celui de π. Et réciproquement ? Les représentations de la série discrète d'un groupe de Lie réel réductif ont été classifiées par Harish-Chandra. On part d'une représentation (σ, V) de G de plus haut poids Λ. Par l'isomorphisme d'Harish-Chandra, V a pour caractère infinitésimal $\chi_V = \chi_\lambda$, avec $\lambda = \Lambda + \rho \in \mathfrak{t}^*$. L'ensemble des représentations de la série discrète de caractère infinitésimal χ_λ (et de caractère central fixé) forme ce que l'on appelle un *L-paquet* et est indexé par l'ensemble fini $W(T,G)/W(T,K)$. Des calculs acrobatiques de Blattner et Schmid montrent que pour une telle π, $H^i(\mathfrak{g}, K, \pi \otimes V')$ est nul pour toute représentation V' de G de dimension finie distincte de $V^\vee$ et que $H^i(\mathfrak{g}, K, \pi \otimes V^\vee)$ est nul sauf si $i = q$ et est alors de dimension 1.

Pour *deviner* comment se factorise la fonction zêta de $F(\xi)$ sur $S(K_f)$, on peut raisonner place par place et on choisit de se placer en une place archimédienne v (sans préciser l'indice v dans la suite pour alléger les écritures). Toute représentation π irréductible de $G(\mathbf{R})$ est dans un L-paquet, qui est l'ensemble des représentations ayant même caractères central et infinitésimal. Les L-paquets sont paramétrés par les *paramètres de Langlands*, c'est-à-dire les L-morphismes du groupe de Weil $W_{\mathbf{R}}$ dans ${}^LG$. Notons donc Π_ϕ le L-paquet de π, $\phi : W_{\mathbf{R}} \to {}^LG$. Soit ρ une représentation de ${}^LG$. Alors on a par définition

$$L(s - \frac{q}{2}, \pi, \rho) = L(s, \psi_1(\pi)),$$

où $\psi_1(\pi)$ est essentiellement $\rho \circ \phi$. On voit donc la fonction L de π comme fonction L d'une représentation de $W_{\mathbf{R}}$. On choisit ici ρ à partir de la représentation globale r : on a

$$\rho = \rho_v := \mathrm{Ind}_{{}^LG}^{\widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbf{C}/E_v)}(r^0),$$

de sorte que $r_\infty = \oplus_{v|\infty} \rho_v$. La dimension de ρ, et donc de $\psi_1(\pi)$, est donc $[\mathbf{C} : E_v] \dim r^0$.

La cohomologie étale en degré i de la variété de Shimura est elle naturellement munie d'une action (essentiellement donnée par la structure de Hodge) de W_E, qui est ce dont on a besoin pour définir le facteur local correspondant à la place archimédienne fixée de la fonction zêta. Soit ϕ le paramètre de Langlands correspondant au caractère infinitésimal $\chi_{\xi^\vee}$ et notons $\Pi_\phi = \{\pi_1, \ldots, \pi_t\}$ le L-paquet de séries discrètes correspondant. Alors comme on l'a vu plus haut, chaque représentation automorphe de composante archimédienne donne un espace de dimension $m(\pi)m(\pi_f)$ dans la cohomologie en degré milieu, avec une action de W_E qui s'écrit comme $m(\pi)m(\pi_f)$ copies d'une représentation $\psi_2^0(\pi_j) \otimes 1$ (pour la décomposition $H^q(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes \xi)\pi_f^{K_f}$), $\psi_2^0(\pi_j)$ ne dépendant que de π_j. On induit si nécessaire cette représentation de W_E à $W_{\mathbf{R}}$ pour obtenir une représentation $\psi_2(\pi_j)$. Alors :

$$\bigoplus_{j=1}^{t} \psi_2(\pi_j) = (-1)^q \psi_1(\Pi_\phi).$$

Sans expliquer la preuve, on peut au moins vérifier que les dimensions coïncident. Supposons $E = \mathbf{C}$ (si $E = \mathbf{R}$, on multiplie tout par deux). Le membre de gauche est somme directe de t représentations de dimension 1, donc est de dimension $t = [W(T,G) : W(T,K)]$. Le membre de droite est de dimension la dimension de r^0, qui est de dimension $[W(\widehat{T}, \widehat{G}) : W(\widehat{T}, \widehat{M})]$. Ces deux quantités sont égales ! On est presque arrivé à la factorisation cherchée (sous l'angle purement formel, bien sûr). Il nous faut encore faire deux simplifications assez grossières. Supposons d'une part que si π et π' sont deux représentations automorphes ayant même composante archimédienne π_j, alors $m(\pi_{j,f}) := m(\pi_f) = m(\pi'_f)$ (c'est assez raisonnable). Supposons d'autre part que si

$$\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty \quad , \quad \pi' = \pi_f \otimes \pi'_\infty$$

sont deux représentations automorphes avec π_∞, π'_∞ dans le L-paquet Π, alors $M(\pi_f, \Pi) := m(\pi) = m(\pi')$. C'est une hypothèse très farfelue.

Alors l'action du groupe de Weil sur la partie de la cohomologie étale que nous avons isolée est :

$$\bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{\pi, \pi_\infty = \pi_j} m(\pi)m(\pi_f)\psi_2(\pi_j) = \bigoplus_{j=1}^{t} \left[m(\pi_{j,f}) \sum_{\pi, \pi_\infty = \pi_j} M(\pi_f) \right] \psi_2(\pi_j) \quad (\text{par l'hypothese})$$

La contribution correspondant à $L(s-\frac{q}{2},\pi,r)^{m(\pi)m(\pi_\infty)m(\pi_f)}$ est quant à elle :

$$\sum_{\pi,\pi_\infty\in\Pi_\phi} m(\pi)m(\pi_f)m(\pi_\infty)\psi_1(\Pi_\phi) = \sum_{j=1}^{t} m(\pi_{j,f})m(\pi_j)(-1)^q \sum_{\pi,\pi_\infty=\pi_j} M(\pi_f)\bigoplus_{k=1}^{t}\psi_2(\pi_k)$$

$$=\bigoplus_{j=1}^{t}\left[(-1)^q\sum_{k=1}^{t}\left(\sum_{\pi,\pi_\infty=\pi_k} M(\pi_f)\right)m(\pi_{k,f})m(\pi_k)\right]\psi_2(\pi_j)$$

Notons provisoirement $a_k=(\sum_{\pi,\pi_\infty=\pi_k} M(\pi_f))m(\pi_{k,f})$. On aimerait donc avoir

$$\forall j=1,\ldots,t,\quad (-1)^q a_j=\sum_{k=1}^{t} a_k m(\pi_k).$$

Il faut donc que $\sum_{k=1}^{t} m(\pi_k)=(-1)^q$ et que tous les a_j soient égaux. Or par construction, $\sum_{k=1}^{t} m(\pi_k)=(-1)^q t$. Si $t=1$ tout va bien, mais dès que $t>1$, il n'y a pas de raison que cela fonctionne encore... Conclusion : *l'existence de L-paquets non réduits à des singletons montre que la factorisation conjecturale doit être corrigée.*

Tout serait plus sympathique si l'on pouvait travailler avec des sous-représentations de r. Malheureusement, r est irréductible en général. Par contre, soient H un autre groupe réductif sur $\mathbf{Q}$ et $\psi : {}^L H\to {}^L G$ un L-morphisme. La représentation $r\circ\psi$ peut être réductible même si r ne l'est pas. Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbf{A})$. Si le principe de fonctorialité s'applique, il peut nous donner une représentation automorphe π' de $H(\mathbf{A})$, avec

$$L(s,\pi,r)=L(s,\pi',r\circ\psi).$$

Si $r\circ\psi=\oplus r_i$, on peut donc espérer que ce sont les fonctions $L(s-q/2,\pi',r_i)$ qui vont apparaître dans la décomposition de la fonction zêta. A ce stade, il ne semble toutefois pas évident de savoir comment choisir ces groupes H (qui seront les *groupes endoscopiques* de G). Pour mieux le comprendre, il faut faire un détour par la formule des traces.

2.3 Un outil fondamental : la formule des traces

Dans le cas d'un groupe fini, on dispose de deux bases naturelles de l'espace vectoriel des fonctions invariantes par conjugaison sur G : l'ensemble des caractères des représentations irréductibles de G d'une part (côté spectral), l'ensemble des fonctions caractéristiques des classes de conjugaison dans G d'autre part (côté géométrique). La formule des traces dans ce contexte donne simplement une égalité entre un terme spectral et un terme géométrique, qui traduit le fait que l'on peut calculer la trace d'une représentation en utilisant l'une ou l'autre de ces bases.

Soit G un groupe réductif connexe sur un corps de nombres F. On note $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}))$ l'espace des *fonctions test.* On suppose pour simplifier G anisotrope, de sorte que le quotient $G(F)\backslash G(\mathbf{A})$ est compact. Si $\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}))$, la formule des traces d'Arthur-Selberg exprime la trace $T(\varphi)$ de l'opérateur de convolution

$$R(\varphi)=\bigoplus m(\pi)\pi(\varphi)$$

en termes intrinsèques à la géométrie de G :

$$T(\varphi)=\sum_\pi m(\pi)\text{trace }\pi(\varphi)=\sum_\gamma \tau(G_\gamma)O_\gamma(\varphi).$$

La deuxième somme porte sur les $G(E)$-classes de conjugaison d'éléments de $G(E)$ (qui sont automatiquement semi-simples car G est anisotrope). On y somme les *intégrales orbitales* (relativement à une mesure de Haar)

$$O_\gamma(\varphi)=\int_{I_\gamma(\mathbf{A})\backslash G(\mathbf{A})}\varphi(g^{-1}\gamma g)dg,$$

I_γ désignant le centralisateur de γ, pondérées par les *nombres de Tamagawa* $\tau(G_\gamma)$ définis comme

$$\tau(G_\gamma)=\int_{I_\gamma(E)\backslash I_\gamma(\mathbf{A}_E)} dg_\gamma,$$

pour un choix convenable de mesure. Les orbitales intégrales et les caractères distributions sont des quantités de nature locale, c'est-à-dire factorisables. En effet, d'une part, si φ s'écrit $\varphi = \otimes_v \varphi_v$, l'on a

$$O_\gamma(\varphi) = \prod_v O_\gamma(\varphi_v) := \prod_v \int_{I_\gamma(F_v)\backslash G(F_v)} \varphi_v(g_v^{-1}\gamma g_v)dg_v$$

et d'autre part chaque représentation π se décompose comme produit tensoriel restreint $\pi = \otimes \pi_v$, et donc

$$\text{trace } \pi(\varphi) = \prod_v \text{trace } \pi_v(\varphi_v).$$

A l'inverse, les $\tau(G_\gamma)$ et surtout les $m(\pi)$ sont des quantités globales.

Enoncer rigoureusement et démontrer la formule des traces est horriblement compliqué (et très technique). Une référence complète est [A5] ; la page d'Arthur contient aussi plusieurs autres textes plus accessibles. Il faut retenir que, quelle que soit la forme qu'elle prenne, une formule des traces relie toujours une quantité spectrale et une quantité géométrique ; le slogan est que *la partie spectrale de la formule des traces est mystérieuse mais riche d'information, tandis que la partie géométrique de la formule se prête aux calculs.* Arthur le résume ainsi.

> *One of the great discoveries of nineteenth century physics was the recognition of absorbtion spectra in extraterrestrial sources of light. The spectral decomposition of starlight revealed dark bands at characteristic wavelengths across the spectrum. This suggested that light of certain discrete frequencies was being absorbed before it reached telescopes on earth. Physicists also observed that the missing wave-lengths matched wavelengths of light emitted by chemical elements in laboratory experiments. They were thereby able to deduce that stars in our galaxy contain the very elements on which the chemistry on earth is based.* [...]
>
> *It was not until the advent of quantum mechanics in the twentieth century that absorbtion spectra were given a satisfactory theoretical explanation. They were shown to correspond with eigenvalues of appropriate Schrödinger operators. A given atom could absorb or emit light only at certain frequencies, corresponding to the energy levels of bound states represented by different eigenvalues. The mathematical spectra of differential operators thus carried fundamental information about the physical world, which even now seems almost magical.*
>
> *The analogy with number theory is through spectra of other differential operators. These are Laplace-Beltrami operators (and variants of higher degree) attached to certain Riemannian manifolds. The spectra of these and other operators are expected to carry fundamental information about the arithmetic world, a possibility that also seems quite magical.*

Dans cet esprit, le premier exemple, et probablement le meilleur, d'application de la formule des traces est le travail de Jacquet-Langlands ([JL]). Comme à la fin de la partie 1, G est GL_2 sur F et G' le groupe multiplicatif d'une algèbre de quaternions sur F. Les éléments non centraux de $G'(F)$ engendrent une extension quadratique de F. Ces éléments ont donc un polynôme minimal de degré 2 irréductible, qui définit une classe de conjugaison dans $G(F)$. On définit de la sorte une injection canonique de l'ensemble des classes de conjugaison de $G'(F)$ dans l'ensemble des classes de conjugaison de $G(F)$. Jacquet et Langlands définissent une correspondance :

$$\varphi' = \prod_v \varphi'_v \mapsto \varphi = \prod_v \varphi_v$$

de $\mathcal{C}_c^\infty(G'(\mathbf{A}))$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}))$, telle que

$$O_\gamma(\varphi) = O_{\gamma'}(\varphi')$$

si γ est l'image de γ' et $O_\gamma(\varphi) = 0$ sinon. Les nombres de Tamagawa vérifient aussi

$$\tau(G_\gamma) = \tau(G'_{\gamma'})$$

si γ est l'image de γ' et donc en définitive les côtés géométriques des formules des traces pour G et G' sont identifiés. La dernière étape consiste à exploiter l'égalité qui en résulte entre les parties spectrales. L'application $\varphi' \mapsto \varphi$ est définie place par place. Pour toute place v en dehors d'un ensemble fini S, $G'(F_v) = G(F_v)$, donc on prend $\varphi_v = \varphi'_v$. On fixe donc $\varphi'_S = \prod_{v \in S} \varphi'_v$. On a alors une fonctionnelle

$${\varphi'}^S \mapsto m(\pi') \text{ trace}(\pi'_S(\varphi'_S)) \text{ trace}({\pi'}^S({\varphi'}^S)),$$

à laquelle doit correspondre une fonctionnelle du côté de G. En combinant ceci avec le théorème de multiplicité 1 pour $G = GL_2$, on obtient la correspondance cherchée $\pi' \mapsto \pi$, avec $\pi_v = \pi'_v$ pour tout $v \notin S$ et $m(\pi) = m(\pi')$.

L'argument est très indirect, mais c'est ce qui le rend attrayant. On ramène un problème de comparaison de multiplicités abstraites pour deux groupes *a priori* fort différents à une comparaison de combinaisons linéaires concrètes d'intégrales orbitales. Ces termes géométriques deviennent vite très difficiles à estimer quand on fait varier la fonction test, et ne permettent donc pas de dire grand chose pour un groupe donné. Ce qui fait ici tourner la machine est l'analyse harmonique locale, qui montre que ces termes compliqués pour G et G' s'annulent en fait mutuellement. La formule des traces est par conséquent un outil approprié pour attaquer certains cas de fonctorialité de Langlands. Toutefois, une première difficulté saute aux yeux si l'on tente d'adapter l'argument précédent à d'autres situations. Le principe de fonctorialité fait intervenir les L-groupes, et pas la formule des traces. Comment déduire de l'existence d'un L-morphisme entre les L-groupes ${}^LG$ et ${}^LG'$ un lien entre classes de conjugaison de $G(F)$ et de $G'(F)$? Jacquet-Langlands utilisaient implicitement que pour les groupes G et G' donnés, les classes de conjugaison sont déterminées par les polynômes caractéristiques, qui se comparent aisément (pour une raison abstraite tout à fait générale). Malheureusement, cela est très spécifique au cas particulier considéré... Gardons cette difficulté dans un coin de notre esprit. Pour mieux la comprendre et la préciser, il nous faut maintenant donner un deuxième exemple fondamental d'application de la formule des traces, qui fera le lien avec l'étude des fonctions zêta des variétés de Shimura entamée dans la section précédente.

L'étude des places archimédiennes a donné à Langlands, on l'a vu, une idée, même imparfaite, de la façon dont la fonction zêta d'une variété de Shimura se décompose en produit de fonctions L automorphes. Il s'agit maintenant de comprendre ce qui se passe aux places finies. Il est naturel de commencer par le problème plus simple des places de bonne réduction. Langlands, sur une suggestion d'Ihara, comprend que la formule des traces a un rôle à jouer. Prenons l'exemple du groupe GL_2. Pour tout ce qui suit, [Cl3] est une superbe référence. Il faut voir que la fonction zêta de Hasse-Weil de la courbe modulaire compactifiée s'identifie aux places non ramifiées au produit des fonctions L des formes propres cuspidales de poids 2. Le théorème de changement de base propre et la formule de Grothendieck-Lefschetz ramènent à étudier des nombres de points. Plus précisément, soit Y_0 le schéma affine et lisse sur $\mathbf{Z}[1/N]$ classifiant les courbes elliptiques avec sous-groupe cyclique d'ordre N. Soit k corps fini de cardinal p^α, p ne divisant pas N. On souhaite évaluer $|Y_0(k)|$. Le calcul de cette quantité se fait en deux étapes :

1. On classifie les classes d'isogénies d'éléments de $Y_0(k)$. La théorie de Honda-Tate nous apprend que les classes d'isogénie ordinaires sont en bijection avec les classes de conjugaison d'éléments γ de $GL_2(\mathbf{Q})$ provenant d'entiers quadratiques vérifiant certaines conditions.
2. On compte, à isomorphisme près, les courbes dans une classe d'isogénie fixée. Soit E/k fixée dans la classe. Choisir E'/k isogène à E revient alors à choisir certains réseaux dans la cohomologie étale et cristalline de E, modulo action diagonale du groupe des automorphismes de E. Il faut aussi prendre en compte la structure de niveau. On réinterprète ce comptage de réseaux en termes de théorie des groupes : l'entier $|Y_0(k)(\gamma)|$, cardinal de l'ensemble des éléments de $Y_0(k)$ dans la classe d'isogénie associée à la classe de conjugaison γ s'écrit comme intégrale orbitale [12] de certaines fonctions caractéristiques évaluée en γ.

On conclut en appliquant le lemme fondamental (dont on n'a pas encore parlé, mais qu'ici on peut juste voir comme une étape technique...) pour remplacer les intégrales orbitales tordues par de vraies intégrales orbitales ; puis sommant sur les classes γ, on applique la formule des traces d'Arthur-Selberg. Là encore, on peut espérer généraliser ce procédé à d'autres groupes. Malheureusement, en général, presque toutes les étapes ci-dessus sont plus difficiles (même en oubliant la question délicate des compactifications). L'exemple d'un groupe symplectique G de degré $2g$ sur $\mathbf{Q}$ est significatif. La description des classes d'isogénie de variétés abéliennes de dimension g à la Honda-Tate fait intervenir cette fois-ci des classes de conjugaison *stables* d'éléments de $G(\mathbf{Q})$, c'est-à-dire des classes de conjugaison sous $G(\bar{\mathbf{Q}})$ d'éléments de $G(\mathbf{Q})$. Le calcul du nombre d'éléments dans la classe d'isogénie d'une variété abélienne avec polarisation (A, λ) se fait encore en termes d'intégrales orbitales, mais il reste à classifier les classes d'isogénie de variétés abéliennes *avec polarisation* au sein d'une classe d'isogénie de variétés abéliennes. Cela repose sur des travaux très délicats de Kottwitz ([Ko]). Une fois arrivé là, on est confronté à plusieurs problèmes : on a une somme, non sur des classes de conjugaison d'éléments de $G(\mathbf{Q})$, mais sur des classes de conjugaison stables. Les termes que l'on somme ressemblent à des intégrales orbitales stables (voir plus bas), mais n'en sont pas, car il y a dans la formule une condition faisant intervenir les invariants cohomologiques de Kottwitz. Il faut donc *stabiliser la formule des traces* pour comprendre le sens automorphe de l'expression obtenue. On va voir que la résolution de ce problème fait apparaître naturellement les groupes endoscopiques et permet d'en donner une définition qui complète l'étude archimédienne.

12. Tordue, car la cohomologie cristalline force à faire de l'algèbre semi-linéaire.

2.4 Stabilisation et endoscopie

Stabiliser la formule des traces signifie l'écrire comme somme de quantités (du type intégrale orbitale ou distribution) invariantes par conjugaison stable. Plus précisément, on veut écrire le côté géométrique de la formule comme somme de termes ne dépendant que des

$$SO_{\sigma_v}(\varphi_v) := \sum_{\gamma_v \in \sigma_v} O_{\gamma_v}(\varphi_v),$$

σ_v désignant une classe de conjugaison stable. Cela passe par une première étape de pré-stabilisation. Notons E_0 un ensemble de représentants dans $G(F)$ des classes de conjugaison stables. On a :

$$T(\varphi) = \sum_{\gamma} \tau(G_\gamma) O_\gamma(\varphi) = \sum_{\gamma_0 \in E_0} \tau(G_{\gamma_0}) \sum_{\gamma \sim^{st} \gamma_0} O_\gamma(\varphi).$$

On a utilisé un théorème difficile de Kottwitz sur l'invariance des nombres de Tamagawa par conjugaison stable. Attention, on ne peut pas s'arrêter là ! En effet, on veut que la distribution T soit stable en chaque φ_v, et pas seulement en φ... Ici ce n'est pas encore le cas, car sinon cela impliquerait que pour tout ensemble fini S de places, tout $\sigma_S = \prod_v \sigma_v$ produit de classes de conjugaison stables locales ayant un représentant rationnel σ, tout produit de classes de conjugaison locales $\gamma_S = \prod_v \gamma_v$ dans σ_S aurait un représentant rationnel γ, ce qui n'est pas. La suite de l'argument de pré-stabilisation serait trop longue à expliquer ([H] contient une explication claire). Disons simplement que l'on aboutit à

$$T(\varphi) = \tau(G) \sum_{\gamma_0 \in E_0} \sum_{\kappa \in \mathfrak{H}(\gamma_0)} \prod_v O^\kappa_{\gamma_0}(\varphi_v),$$

avec

$$O^\kappa_{\gamma_0}(\varphi_v) = \sum_{\gamma_v \sim^{st} \gamma_0} e(I_{\gamma_v}) \langle \kappa, \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v) \rangle O_{\gamma_v}(\varphi_v).$$

où $\mathfrak{H}(\gamma_0)$ est en gros l'intersection des $\mathfrak{H}_v(\gamma_0)$, v place de F, chaque $\mathfrak{H}_v(\gamma_0)$ étant le groupe abélien dual de l'ensemble des classes de conjugaison dans la classe de conjugaison stable de γ_0 qui s'identifie, par une généralisation de la dualité de Tate-Nakayama due à Kottwitz, à $\pi_0(Z(\widehat{I}^{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)})/Z(\widehat{G}^{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)}))$, I désignant le centralisateur de γ_0 dans G sur F_v.

Cette première étape de pré-stabilisation n'est pas encore complètement satisfaisante. On veut écrire le membre de droite de la dernière expression obtenue de $T(\varphi)$ comme somme de formules de traces stablisées, sans référence aux groupes finis $\mathfrak{H}(\gamma_0)$. Plus précisément, on souhaite remplacer les intégrales orbitales locales tordues $O^\kappa_{\gamma_0}(\varphi_v)$ ($\kappa \in \mathfrak{H}_v(\gamma_0)$) par des intégrales orbitales stables. Ce problème est local est *on suppose donc désormais que F est un corps local.* L'espoir que l'on puisse s'en tirer naît de l'observation suivante : dans ce qui précède, le point important est que par décomposition de Fourier, on a analysé la conjugaison stable en séparant les contributions des différents caractères κ. Or, le mode de Fourier κ (pour G, I_γ fixés) produit des oscillations qui annulent certaines racines de G ; les racines restantes sont à l'inverse renforcées par ces oscillations et deviennent plus prononcées. Celles-ci forment un système de racines qui donne le groupe H, de sorte que le mode de κ pour G correspond au mode dominant de H. Cette heuristique n'est pas évidente à mettre en oeuvre, pour au moins deux raisons. D'une part, on somme sur des classes de conjugaison d'éléments de $G(F)$; d'autre part, les fonctions test φ sont des fonctions sur $G(\mathbf{A}_F)$. Il va donc falloir transférer classes de conjugaison et fonctions (exactement ce que l'on fait pour Jacquet-Langlands) aux autres groupes. Ces groupes, qui seront par définition les *groupes endoscopiques* de G, vont être définis de sorte que le transfert des classes de conjugaison soit plus ou moins automatique. Par contre, le transfert des fonctions n'aura rien d'évident et sera l'objet du principe de transfert, une conjecture qui se déduit du lemme fondamental.

Récapitulons. Supposons désormais G (réductif connexe) quasi-déployé, déployé sur une extension non ramifiée de F, corps local. Il faut définir le groupe H à partir des contraintes suivantes.

1. Le groupe H doit être construit avec les données (G, I_γ, κ).
2. Les racines de H forment un sous-ensemble de celles de G.
3. H doit avoir un sous-groupe de Cartan I_H isomorphe au sous-groupe de Cartan I_γ de G, de façon compatible à l'action des groupes de Weyl de H et G. Cette condition englobe la précédente.
4. Sur un corps local non archimédien, les algèbres de Hecke sphériques de G et H doivent être reliées.

Les deux premières conditions sont justifiées par les considérations sur la pré-stabilisation. La troisième permet de transférer les classes de conjugaison stables : en effet, la classe de conjugaison stable d'un élément semi-simple régulier est déterminée par son polynôme caractéristique, qui peut être vu, par le théorème de Chevalley, comme un polynôme sur l'algèbre de Cartan invariant par le groupe de Weyl. Enfin, la dernière condition, volontairement vague, est indispensable pour pouvoir relier les fonctions test sur G et H. Or toutes ces conditions sur H vont pouvoir être formulées en termes du L-groupe ${}^LG$ de G ! En effet, le groupe dual est défini à partir du groupe en utilisant une donnée radicielle. Toute condition portant sur les algèbres de Cartan, les racines ou le groupe de Weyl peut donc, par dualité, être étudiée indifféremment au niveau du groupe ou de son dual - ceci pour les conditions 2 et 3. En outre, la transformation de Satake identifie l'algèbre de Hecke sphérique d'un groupe à un objet dual (condition 4) et enfin les éléments κ, caractères de la classe de conjugaison stable de γ, sont des éléments $\pi_0(Z(\widehat{I})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)}/Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)})$ (condition 1).

Partons donc du groupe $\widehat{G}$. On veut se débarrasser dans la formule des traces de κ et du groupe $\mathfrak{H}(\gamma_0)$. Or $\kappa \in \pi_0(Z(\widehat{I}_{\gamma_0})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)}/Z(\widehat{G})^{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)})$. Voyons κ dans $\widehat{G}$ et prenons un $\widehat{A}$ sous-groupe réductif de $\widehat{G}$ qui contient κ comme élément central $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-invariant. Alors κ sera trivial, par Tate-Nakayama, comme caractère sur la classe de conjugaison stable de n'importe quel élément semi-simple régulier γ_A d'un groupe réductif A sur F de dual $\widehat{A}$. Prenons donc $\widehat{H} = \mathrm{Cent}_{\widehat{G}}(\kappa)^0$. Autrement dit, si φ_A est une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(H(\mathbf{A}_F))$, l'intégrale orbitale $O_{\gamma_A}^\kappa(\varphi_A)$ sera simplement l'intégrale orbitale stable $SO_{\gamma_A}(\varphi_A)$. Pour que cela nous soit utile, il faut encore être sûr que partant de $\gamma_0 \in G(F)$, $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}_F))$, on puisse trouver γ_A et φ_A tels que $O_{\gamma_0}^\kappa(\varphi) = O_{\gamma_A}^\kappa(\varphi_A)$... C'est précisément ce qu'exprimaient les conditions 3 et 4 ci-dessus. Or, il nous reste encore un degré de liberté : le choix de $\widehat{H}$ détermine toute une famille de formes extérieures. Pour remplir la condition 3, on impose donc qu'il existe un isomorphisme sur F entre un sous-groupe de Cartan I_H de H et le sous-groupe de Cartan I_γ de G, compatible aux actions des groupes de Weyl. Tout cela mène à la définition formelle suivante ([LL], [L6]).

Définition 7. Le *groupe endoscopique H associé à (G, I_γ, κ)* est défini ainsi. On voit κ comme un élément de $\widehat{I}_\gamma$. La composante neutre du centralisateur de κ dans $\widehat{G}$ est un le dual $\widehat{H}$ d'un groupe réductif H quasi-déployé sur F. Le choix d'une forme quasi-déployée H parmi ses formes extérieures est déterminé par la condition qu'il existe un isomorphisme sur F entre un sous-groupe de Cartan I_H de H et le sous-groupe de Cartan I_γ de G, compatible aux actions des groupes de Weyl.

Au-delà des détails techniques [13], la morale à retenir est que si l'on tente de stabiliser la formule des traces, on tombe naturellement sur des questions qui font intervenir en filigrane le L-groupe ! Ce n'est pas surprenant si l'on croit au principe de fonctorialité. En définitive, comme le note M. Harris,

> *the phenomenon of endoscopy [...] can be seen alternatively as a classification of the obstacles to the stabilization of the trace formula or as an opportunity to prove the functoriality conjecture in some of the most interesting cases.*

Le transfert des classes de conjugaison stables du groupe à un sous-groupe endoscopique est automatique, vu la définition. Le transfert des fonctions s'avère être un problème très ardu. Pour tirer les fruits de ce qui précède, il faut donc disposer de l'énoncé suivant, qui combine le principe de transfert et le lemme fondamental. Leur preuve est l'aboutissement d'une série considérable de travaux ([She], [GKM], [LN], [N2]).

Théorème 6 (Ngô, Shelstad, Waldspurger)**.** *Soit F un corps local. Soient H un groupe endoscopique pour G associé à (γ_0, κ), $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F))$. Il existe $\varphi^H \in \mathcal{C}_c^\infty(H(F))$, uniquement déterminée comme fonctionnelle sur les distributions stablement invariantes sur H, telle que si γ_H est la classe de conjugaison stable semi-simple de $H(F)$ correspondant à γ_0, l'on ait :*

$$SO_{\gamma_H}(\varphi^H) = \sum_{\gamma \sim^{st} \gamma_0} \Delta(\gamma_H, \gamma) O_\gamma^\kappa(\varphi). \quad (*)$$

Ici, $\Delta(\gamma_H, \gamma)$ est un facteur de transfert *que l'on peut ignorer dans un premier temps. En outre, si G et H sont non ramifiés sur F, $K \subset G(F)$ (resp. $K_H \subset H(F)$) un compact maximal hyperspécial de G (resp. H) et $\varphi = \mathbf{1}_K$ la fonction caractéristique de K, il existe une constante c dépendant d'un choix de mesures sur K et K_H, telle que la relation (*) vaille avec $\varphi^H = c\mathbf{1}_{K_H}$.*

La preuve de Ngô du lemme fondamental est un tour de force ([N2]). On se réduit dans un premier temps au cas où F est un corps local de caractéristique p, c'est-à-dire un corps de séries de Laurent à coefficients dans son corps résiduel

13. La fin de ce paragraphe est un peu imprécise. En particulier, il faudrait définir la notion abstraite de triplet endoscopique (qui n'est pas juste la donnée d'un sous-groupe) pour faire les chose proprement.

k et à une version "algèbres de Lie" du lemme fondamental. Les intégrales orbitales considérées s'interprètent alors comme nombre de k-points d'une variété de Springer affine, que l'on calcule en étudiant les groupes de cohomologie étale de cette fibre de Springer (formule de Grothendieck-Lefschetz). Malheureusement, cet ind-schéma présente en général des singularités très compliquées. Fidèle à la philosophie de Deligne, mise en oeuvre dans la résolution des conjectures de Weil, Ngô surmonte cette difficulté en étudiant la situation en famille : si X est une courbe sur k, il introduit l'analogue global des fibres de Springer affines, la fibration de Hitchin. Cela permet d'utiliser un argument de continuité, pour ramener une comparaison d'intégrales orbitales très compliquées à une comparaison d'intégrales orbitales simples. L'outil technique pour le dire est le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber, dont on déduit que deux faisceaux pervers simples ayant même support Z et coïncidant sur un ouvert dense U de Z avec un même système local, sont égaux ; toute la difficulté est alors concentrée dans la démonstration du théorème du support. Un point remarquable de la preuve de Ngô est que nombre d'objets un peu étranges acquièrent une interprétation géométrique naturelle : les facteurs de transfert ou l'étape de pré-stabilisation de la formule des traces, par exemple. Il existe de très bonnes présentations de toutes ces mathématiques : voir notamment [Hal], [Da], [N1].

Revenons au problème de stabilisation de la formule des traces. On peut écrire formellement :

$$T(\varphi) = \sum_H i(G,H)\tau(H) \sum_{\gamma_H \in E_{H,0}} O^{\kappa}_{\gamma_0}(\varphi).$$

La première somme porte sur les sous-groupes endoscopiques de G et $i(G,H) = \tau(G)\tau(H)^{-1}\lambda_H$. Il est sous-entendu que κ et γ_0 sont les éléments auxquels H est associé. On utilise enfin le théorème précédent pour obtenir le résultat final suivant.

Théorème 7. *Soient F un corps de nombres, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(G(\mathbf{A}_F))$. On a :*

$$T(\varphi) = \sum_H i(G,H)\tau(H) \sum_{\gamma_H \in E_{H,0}} SO_{\gamma_H}(\varphi^H) =: \sum_H i(G,H) ST^*(\varphi^H),$$

pour une certaine fonction $\varphi^H \in \mathcal{C}^\infty_c(H(\mathbf{A}_F))$, définie comme produit tensoriel des fonctions φ^H locales[14].

2.5 Description du spectre automorphe cuspidal

Au terme de ces deux premières parties, il reste (au moins) deux problèmes épineux dont l'étude a été entamée à résoudre : la description (conjecturale) minutieuse du spectre automorphe discret (paramétrisation, structure des L-paquets) et une formule (conjecturale) pour la fonction zêta de la variété de Shimura comme produit de fonctions L automorphes. Ces deux questions sont, on l'a vu, étroitement liées. Le but de cette section est d'indiquer brièvement quelle forme prend la réponse. Hélas, il est difficile de le faire avec précision et le paragraphe qui suit est donc vague, faute d'espace et surtout de compétence. Le lecteur est renvoyé à la page web d'Arthur pour les détails et plus particulièrement à [A2] et [A3].

Bien qu'il soit hors de question d'obtenir une classification complète des représentations automorphes discrètes d'un groupe réductif connexe[15], on peut quand même essayer d'en donner une description qui ressemble à celle proposée dans le cas local (voir 1.5) et préciser la structure des L-paquets, locaux et globaux. Pour ce faire, on s'appuie sur l'étude de la formule des traces. Celles-ci suggèrent en effet de nombreuses analogies qui servent de guide (au moins *a posteriori*...). Cela impose de se restreindre dans un premier temps aux représentations tempérées, car ce sont ces représentations qui sont les analogues des classes de conjugaison semi-simples fortement régulières. La relation d'équivalence sur l'ensemble des classes de conjugaison fortement régulières semi-simples du groupe donnée par la *conjugaison stable*, du côté géométrique, doit avoir pour miroir, côté spectral, la relation d'équivalence donnée par *l'appartenance à un même L-paquet.* Ce parallèle permet de deviner comment s'ordonnent les représentations au sein d'un paquet.

Notons pour la suite F un corps de nombres, γ_0 une classe de conjugaison semi-simple fortement régulière, π_0 une représentation automorphe cuspidale tempérée. Commençons par le cas local : soit v une place de F. L'ensemble $S_v(\gamma_0)$ des classes de conjugaison de $G(F_v)$ stablement conjuguées à γ_0 est en bijection avec le dual d'un groupe abélien fini

14. Notons que pour que cette assertion ait un sens, il faut que, si φ est factorisée $\varphi = \otimes_v \varphi_v$, avec φ_v fonction caractéristique d'un compact maximal hyperspécial pour presque tout v, φ^H ait la même propriété : en d'autres termes, il faut connaître le lemme fondamental, le transfert ne suffit pas. En fait ce dernier se déduit du premier, aussi surprenant que cela puisse paraître.

15. On verra dans la partie 3 que cela impliquerait notamment que l'on sache classifier tous les motifs sur un corps de nombres...

noté $\mathfrak{H}_v(\gamma_0)$, on l'a dit. On avait noté $\langle\kappa, \mathrm{inv}(\gamma_v, \gamma_0)\rangle$ l'accouplement correspondant. Du côté spectral, on s'attend donc à avoir un ensemble fini Π_v, dit L-paquet local, de représentations lisses irréductibles tempérées de $G(F_v)$ contenant $\pi_{0,v}$, un groupe abélien fini $\mathfrak{S}_{\Pi_v}$ et une fonction $\mathfrak{S}_{\Pi_v} \times \Pi_v$, avec certaines propriétés naturelles (notamment, $\langle ., \pi\rangle = 1$ si π est non ramifiée). Une distribution sur $G(F_v)$ était dite *stable* si elle était dans l'adhérence de l'espace engendré par les intégrales orbitales stables

$$SO_{\gamma_0}(\varphi_v) = \sum_{\gamma_v \in S_v(\gamma_0)} \langle 1, \gamma_v\rangle O_{\gamma_v}(\varphi_v).$$

La distribution $SC_{\Pi_v}(\varphi_v) = \sum_{\pi \in \Pi_v} \langle 1, \pi\rangle C_\pi(\varphi_v)$ doit donc elle aussi être stable. Quant aux éléments $\kappa \neq 1 \in \mathfrak{H}_v(\gamma_0)$, on a vu qu'on pouvait leur associer un groupe (ou plutôt un triplet) endoscopique H de G et une classe de conjugaison stable γ_v^H de $H(F_v)$ et on a la conjecture de transfert reliant κ-intégrale orbitale pour γ_0 et intégrale stable pour γ_v^H. Par conséquent, à tout $s \neq 1 \in \mathfrak{S}_{\Pi_v}$ doivent correspondre un groupe endoscopique H de G et un L-paquet Π_v^H pour $H(F_v)$, avec, si $\varphi_v \in \mathcal{C}_c^\infty(G(F_v))$ et si φ_v^H est la fonction qui s'en déduit par transfert,

$$SC_{Pi_v^H}(\varphi_v) = \sum_{\pi \in \Pi_v} \langle s, \pi\rangle C_\pi(\varphi_v).$$

Venons-en ensuite au cas global. On considère l'ensemble $S(\gamma_0)$ des classes de conjugaison de $G(\mathbf{A}_F)$ partout stablement conjuguées à γ_0 et presque partout conjuguées à γ_0. Il existe un groupe abélien fini $\mathfrak{H}(\gamma_0)$, qui est presque l'intersection des $\mathfrak{H}_v(\gamma_0)$, tel que l'on puisse définir un accouplement $\mathfrak{H}(\gamma_0) \times S(\gamma_0) \to \mathbf{C}$ par la formule $\langle\kappa, \gamma\rangle = \prod_v \langle\kappa, \mathrm{inv}(\gamma_0, \gamma_v)\rangle$. Ceci converge car on a supposé γ_v conjugué à γ_0 pour presque tout v. Du côté spectral, on s'intéresse donc à l'ensemble Π_0, le L-paquet global, formé des représentations admissibles irréductibles $\pi = \otimes_v \pi_v$ de $G(\mathbf{A}_F)$, telles que $\pi_v \in \Pi_v$ pour toute place v, et π_v est non ramifiée pour presque toute place v. On voudrait définir un groupe fini $\mathfrak{S}_{\Pi_0} \subset \prod_v \mathfrak{S}_{\Pi_v}$ et grâce à l'hypothèse que chaque $\pi \in \Pi_0$ est non ramifiée en presque toute place, un accouplement $\langle ., .\rangle : \mathfrak{S}_{\Pi_0} \times \Pi_0 \to \mathbf{C}$, produit d'accouplements locaux. A la formule

$$T(\varphi) = \sum_H i(G, H) ST^*(\varphi^H)$$

doit répondre une formule analogue du côté spectral, elle aussi obtenue par analyse de Fourier (et transfert) sur le groupe fini $\mathfrak{S}_{\pi_0}$, reposant sur la formule conjecturale pour tout $\pi \in \Pi_0$:

$$m(\pi) = \frac{d(\Pi_0)}{|\mathfrak{S}(\Pi_0)|} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\Pi} \langle s, \pi\rangle.$$

Il faut ensuite comprendre comment étendre ces observations au spectre non tempéré. A vrai dire, la situation locale, même conjecturale, est encore insatisfaisante au stade où nous en sommes. La paramétrisation laisse à désirer : dans le cas archimédien, on a construit des paramètres ϕ pour l'ensemble des représentations admissibles, ainsi que pour l'ensemble des représentations tempérées (les paramètres ϕ dont l'image est bornée modulo $Z(\widehat{G})$ dans ${}^LG$). Mais on ne sait rien dire sur l'ensemble des représentations unitaires (qui se situe entre les deux), qui est le plus important pour l'analyse harmonique. Arthur, dans un travail gigantesque et difficile, a proposé un remède partiel à ce problème qui consiste à traiter main dans la main les questions locale et globale. L'idée est d'introduire des paramètres locaux qui (au moins en rêve) isolent les représentations unitaires qui sont *composantes locales d'une représentation automorphe globale* et de décrire le spectre automorphe en termes de tous ces paramètres locaux. En utilisant une fois de plus comme guide la formule des traces, il faut réussir à interpréter du côté spectral la signification des classes de conjugaison *unipotentes* (décomposition de Jordan), pour pouvoir comprendre le spectre non tempéré.

Soit F un corps de nombres. Il est commode pour la discussion d'introduire le groupe de Langlands $\mathcal{L}_F$, qui est muni de plongements $i_v : \mathcal{L}_{F_v} \to \mathcal{L}_F$ des groupes locaux définis en 1.5, pour tout place v et dont les classes d'isomorphisme de représentations complexes continues irréductibles de dimension n sont en bijection avec les classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales de $GL_n(\mathbf{A}_F)$, cette bijection étant normalisée par la coïncidence en presque toute place des facteurs L locaux. C'est une extension de W_F par un groupe compact. L'existence d'un tel groupe est évidemment un mystère absolu mais son utilisation est un abus commode. Un morphisme

$$\phi : \mathcal{L}_F \to {}^LG$$

est appelé L-paramètre si $\phi(w)$ est semi-simple pour tout $w \in \mathcal{L}_F$ et s'il commute aux projections sur le groupe de Weil. Il est en outre dit tempéré si son image est bornée modulo $Z(\widehat{G})$. C'est une version globale des L-paramètres définis plus haut dans le cas local. Arthur suggère de considérer plutôt les A-paramètres (paramètres d'Arthur), qui sont les morphismes

$$\psi : \mathcal{L}_F \times SL_2(\mathbf{C}) \to {}^L G,$$

dont la restriction à $\mathcal{L}_F$ est un L-paramètre tempéré. On peut aussi définir la notion de A-paramètre local (avec $\mathcal{L}_{F_v}$). Très grossièrement dit, l'introduction de ce facteur SL_2 est expliquée par la volonté de prendre en compte les classes de conjugaison unipotentes et le théorème de Jacobson-Morozov. Notons que si v est une place finie de F, un A-paramètre est une fonction sur $\mathcal{L}_F \times SL_2(\mathbf{C}) = W_{F_v} \times SL_2(\mathbf{C}) \times SL_2(\mathbf{C})$. Le premier facteur SL_2 correspond moralement à l'action de l'opérateur de monodromie N sur la cohomologie en un degré fixé de la variété de Shimura modulo v, le second à l'action de l'opérateur de Lefschetz sur l'algèbre de cohomologie tout entière. Witten, dans ses travaux sur la physique du programme de Langlands géométrique, a donné du SL_2 d'Arthur (qui reste assez mystérieux du point de vue automorphe) une interprétation naturelle et remarquable : voir [Fre] et [Wi].

On conjecture l'existence de A-paquets associés aux A-paramètres. A la différence des L-paquets, les A-paquets ne sont pas forcément disjoints, mais leur formalisme s'apparente à celui des L-paquets tempérés (c'est pour cela qu'on les a introduits). Dans ce langage, on peut donner une formulation précise de la décomposition conjecturale de la fonction zêta d'une variété de Shimura en produit de fonctions L automorphes : consulter [BR].

3 Motifs et formes automorphes : progrès et problèmes

L'analyse menée dans la partie précédente indique que certaines représentations automorphes (dont la composante à l'infini a de la cohomologie) d'un groupe réductif G, donnant naissance à une variété de Shimura, correspondent à un morceau de la cohomologie étale d'un faisceau ℓ-adique sur la variété de Shimura et ce de façon compatible pour tout premier ℓ. Mystérieusement, il semble donc y avoir un motif attaché à une telle représentation automorphe, ou pour parler plus simplement, au moins un système compatible (quand ℓ varie) de représentations ℓ-adiques du groupe de Galois. Pour un groupe réductif quelconque, quelles représentations automorphes peut-on paramétrer par de tels systèmes (à défaut de disposer d'une paramétrisation pour tout le spectre automorphe en termes de l'hypothétique groupe de Langlands) ? Pour le groupe GL_n sur un corps de nombres F, la forme précise de la conjecture principale est la suivante ([L2], [Cl1], [FM], [BG]). On fixe (par paresse) pour tout ℓ des isomorphismes abstraits $\iota_\ell : \bar{\mathbf{Q}}_\ell \simeq \mathbf{C}$, qui seront sous-entendus.

Conjecture 3 (Langlands, Clozel, Fontaine-Mazur)**.** *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations automorphes cuspidales Π de $GL_n(\mathbf{A}_F)$,* L-algébriques*, et l'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes compatibles de représentations irréductibles $\rho_\ell : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to GL_n(\bar{\mathbf{Q}}_\ell)$* géométriques*, telle que pour toute place finie v de F ne divisant pas ℓ,*

$$WD(\rho_\ell|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_v/F_v)})^{\mathrm{F-ss}} \simeq \iota_\ell^{-1} LL_{F_v}(\Pi_v),$$

LL_{F_v} désignant la correspondance de Langlands locale pour $GL_n(F_v)$.

Il faut définir les notions de représentation automorphe L-algébrique et de représentation ℓ-adique géométrique. Ces conditions sont cruciales et en quelque sorte duales l'une de l'autre. La composante infinie $\Pi_\infty = \otimes_{v|\infty}\Pi_v$ de la représentation automorphe Π est une représentation de $GL_n(F \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) = \prod_{v|\infty} GL_n(F_v)$. Soit $\phi_v : W_{F_v} \to GL_n(\mathbf{C})$ le paramètre de Langlands de Π_v. On peut écrire

$$\phi_v|_{W_{F_v}} = \chi_{v,1} \oplus \cdots \oplus \chi_{v,n},$$

les $\chi_{v,i}$ étant des caractères de $W_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^*$. On dira alors que Π est *L-algébrique* si pour tout $v \mid \infty$ et tout $1 \leq i \leq n$, il existe $a_{v,i}, b_{v,i} \in \mathbf{Z}$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}^*$,

$$\chi_{v,i}(z) = z^{a_{v,i}+\frac{n-1}{2}} \bar{z}^{b_{v,i}+\frac{n-1}{2}}.$$

En d'autres termes, si v est une place infinie, le caractère infinitésimal de Π_v, *a priori* un élément de $X^*(T) \otimes \mathbf{C}$, est en fait dans $X^*(T)$. Une représentation galoisienne ℓ-adique est dite *géométrique* si elle est non ramifiée en presque toute place et de de Rham en toute place de F divisant ℓ. On peut y penser comme à une représentation obtenue comme twist d'un sous-quotient de la cohomologie étale d'une variété propre et lisse sur F (c'est d'ailleurs conjecturalement la même chose). A la condition à l'infini côté automorphe répond donc une condition de théorie de Hode ℓ-adique : ce n'est pas très surprenant si l'on pense en termes motiviques, puisque le paramètre à l'infini détermine la cohomologie, donc la structure de Hodge, et donc la structure de Hodge-Tate.

Pour mieux comprendre la conjecture, on peut regarder des exemples. La notion de représentation L-algébrique est inspirée par les travaux de Weil qui montrent que seuls les caractères de Hecke L-algébriques (appelés par lui de type A_0) ont une signification arithmétique. Soient en effet F un corps de nombres, $T = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}(GL_1)$, et $\rho \in X^*(T)$. Le caractère de Hecke χ est dit L-algébrique de poids ρ si $\chi_{F_\infty^{*\circ}} = \rho^{-1}$. Par exemple, un caractère de Hecke L-algébrique de poids 0 se factorise par $\mathbf{A}_F^*/(F^*F_\infty^{*\circ})$ et donne donc (réciprocité d'Artin) un caractère d'ordre fini de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, i.e. un motif d'Artin simple sur F à coefficients dans $\bar{\mathbf{Q}}$, décomposé sur une extension abélienne. Soit χ un caractère de Hecke L-algébrique de poids ρ. On choisit $K_f \subset \mathbf{A}_{F,f}^*$ compact ouvert tel que $\chi_f|_{K_f} = 1$. Le quotient $F^*\backslash\mathbf{A}_{F,f}^*/K_f$ est un ensemble fini et $\chi_f(x) = \pm\rho(x)$ appartient à un corps de nombres fixé, si $x \in F^*$. Il existe donc un corps de nombres E qui contient l'image de χ_f. Le caractère ρ est défini sur E (car $T(\mathbf{Q})$ est dense dans T) et donc on peut définir un caractère $\rho^E : T \to \mathrm{Res}_{E/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,E}$. Si ℓ est un nombre premier, $\rho^E_{\mathbf{Q}_\ell}$ se décompose

$$\rho^E_{\mathbf{Q}_\ell} = (\rho_\lambda)_{\lambda|\ell} : T(\mathbf{Q}_\ell) \to \mathbf{G}_{m,E}(\mathbf{Q}_\ell) = \prod_{\lambda|\ell} E_\lambda^*.$$

On choisit alors $\lambda \mid \ell$ et l'on pose

$$\chi_\lambda : \mathbf{A}_F^* = F_\infty^* \times (F \otimes \mathbf{Q}_\ell)^* \times \mathbf{A}_{F,f}^{\ell *} \to E_\lambda^*,\ \ (x_\infty, x_\ell, x^\ell) \mapsto \frac{\chi_\infty}{\rho^{-1}}(x_\infty)\rho_\lambda^{-1}(x_\ell)\chi_f(x_\ell x^\ell).$$

Dans le membre de droite, le premier terme est ±1, le second est dans E_λ^* et le troisième dans E^*. On voit sur cet exemple comment fonctionne le passage entre places archimédiennes et places divisant ℓ. Il est immédiat que χ_λ donne un caractère continu (pour la topologie λ-adique) de $\mathbf{A}_F^*/F^*$. Comme E_λ^* est totalement discontinu, il se factorise en

$$\chi_\lambda : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)^{\mathrm{ab}} = \pi_0(\mathbf{A}_F^*/F^*) \to E_\lambda^*,$$

et on obtient de la sorte le système compatible de caractères ℓ-adiques cherché. Pour le cas du groupe GL_2 sur $\mathbf{Q}$, voir [Cl1] : les formes modulaires f cuspidales propres de poids $k \geq 1$ donnent des représentations L-algébriques (régulières dès que $k \geq 2$, voir ci-dessous) ainsi que les formes de Maass de valeur propre $1/4$. Si la conjecture 3 est connue pour les premières, elle reste un mystère complet pour les secondes...

3.1 Le cas polarisé

La conjecture 3 est très loin d'être démontrée. Dans la suite de cette section, on explique brièvement les idées de la preuve d'un cas particulier de la conjecture. Le théorème obtenu est l'aboutissement des travaux de nombreux mathématiciens : Langlands, Kottwitz, Rogawski, Clozel, Harris-Taylor, Shin, etc. (cf. [Cl2], [HT], [Shi]). Dans la suite, on supposera $n \geq 3$. Le cas $n = 2$ est mieux connu et traité par d'autres méthodes.

Théorème 8. *Soit E un corps CM, dont on note c la conjugaison complexe. Soit Π une représentation automorphe cuspidale de $GL_n(\mathbf{A}_E)$,* L-algébrique régulière*, et vérifiant la condition de* polarisation *:*

$$\Pi^\vee \simeq \Pi \circ c.$$

Alors, pour tout nombre premier ℓ, il existe une représentation semi-simple continue

$$\rho_\ell(\Pi) : \mathrm{Gal}(\bar{E}/E) \to GL_n(\bar{\mathbf{Q}}_\ell).$$

vérifiant les conclusions de la conjecture 3.

On peut déduire de cet énoncé un résultat analogue pour les corps totalement réels. Une représentation automorphe L-algébrique est dite *régulière*, si dans la définition ci-dessus, on peut ordonner les $a_{v,i}$, $1 \leq i \leq n$, de sorte qu'ils forment une suite strictement décroissante.

La différence majeure entre le cas $n = 2$ et le cas $n \geq 3$ est que l'espace symétrique de GL_n n'est pas hermitien, dès que $n \geq 3$. Il n'y a donc pas de variété de Shimura associée... Or, c'est dans la cohomologie étale d'une variété de Shimura que l'on peut espérer découper des systèmes compatibles de représentations galoisiennes ℓ-adiques liées aux représentations automorphes, comme l'a laissé entrevoir la partie 2. Contrairement au groupe linéaire général, les groupes (de similitudes) unitaires possèdent des variétés de Shimura. De plus, ces groupes deviennent isomorphes au groupe linéaire par changement de base quadratique. On peut donc espérer redescendre notre représentation Π en une représentation d'un groupe unitaire sur le sous-corps totalement réel maximal F de E. Cette descente sera rendue possible par la condition de polarisation ; sans elle, on ne peut donc rien faire.

Ecrivons $E = KF$, K corps quadratique totalement imaginaire, F corps totalement réel. Tous les groupes unitaires sur F deviennent isomorphes à GL_n après extension des scalaires à E. On a donc une certaine liberté dans le choix de ce groupe unitaire, qu'il faut exploiter intelligemment. Il y a cependant quelques contraintes globales et locales à respecter, de nature cohomologique (invariant de Hasse), que l'on peut assez facilement calculer car Kottwitz a montré que la cohomologie galoisienne des groupes réductifs s'exprimait en termes du groupe dual de Langlands (toujours à cause de la dualité de Tate-Nakayama). Je les passe sous silence pour simplifier. On choisit ici un espace hermitien sur E de sorte que le groupe unitaire associé U sur F soit de type $(n-1, 1)$ en une place infinie σ, compacte aux autres places infinies, et quasi-déployé en toutes les places finies. Pourquoi choisir ainsi le groupe U à l'infini ? Une première raison est que ce choix assure que la représentation du L-groupe associée à la variété de Shimura (voir la partie 2) est la représentation standard : on obtient donc directement les représentations cherchées. On verra une autre raison valable dans la suite.

Cependant l'étude de la cohomologie de la variété de Shimura d'un tel groupe U (ou plutôt du groupe de similitudes unitaires qui s'en déduit) nécessite de savoir stabiliser la formule des traces pour ce groupe et de démêler les problèmes liés à la L-indiscernabilité et à l'endoscopie. Si l'on veut se simplifier la vie, au prix d'une petite perte de généralité, on choisit plutôt pour U un groupe unitaire associé à une certaine algèbre à division : ceci a la conséquence remarquable que les problèmes liés à la L-indiscernabilité et l'endoscopie disparaissent miraculeusement ! Rappelons qu'en général, un groupe unitaire sur F est défini par une algèbre simple centrale D de dimension n sur E et une involution de seconde espèce $*$ sur D (un anti-automorphisme involutif induisant sur son centre E l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$). On définit alors le groupe unitaire U associé par

$$U(R) = \{g \in D \otimes_F R, gg^* = 1\},$$

pour toute F-algèbre R. Dans notre cas, l'astuce consiste à prendre pour D une algèbre à division [16]. On peut choisir D et U sur F de sorte que U soit de type $(n-1, 1)$ en une place infinie σ, compacte aux autres places infinies, et quasi-déployé en toutes les places finies sauf une, notée v, où il est le groupe des unités d'une algèbre à division sur F_v. Le groupe des inversibles d'une algèbre simple centrale B sur E de dimension n est une forme intérieure de la forme quasi-déployée GL_n sur E. La fonctorialité de Langlands, démontrée dans ce cas particulier par Vignéras, permet donc de transférer les représentations automorphes de $B^*(\mathbf{A}_E)$ à $GL_n(\mathbf{A}_E)$, et l'image est formée des représentations automorphes de carré intégrable aux places de ramification de B. Par conséquent, dans le cas qui nous intéresse, où l'on doit se ramener à une forme automorphe sur $D^*(\mathbf{A}_E)$ avant de la descendre à $U(\mathbf{A}_F)$, il faut supposer Π dans la série discrète en v. C'est ce que supposait Clozel au début des années 90 ([Cl2]).

On fixe donc de tels D, $*$ et U et on fait correspondre à Π une représentation Π' de $D^*(\mathbf{A}_E)$, de niveau K_f. Supposons que notre représentation Π' provienne par changement de base d'une représentation automorphe cohomologique π de $U(\mathbf{A}_F)$. Il peut alors y avoir plusieurs tels π. En fait, deux représentations automorphes de $U(\mathbf{A}_F)$ ont même changement de base à E si et seulement si elles sont dans le même L-paquet (c'est une définition - un peu *ad hoc* mais très raisonnable ; on ne peut pas faire autrement car les paramètres de Langlands globaux n'existent pas). On obtient donc tout un paquet de représentations automorphes. Deux représentations automorphes π et π' de $U(\mathbf{A}_F)$ sont dans le même paquet si et seulement si $\pi_f = \pi'_f$. C'est une conséquence directe de notre choix de U et du théorème de multiplicité un fort pour D^*. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux places infinies. Si $v \mid \infty$, $v \neq \sigma$, le groupe est compact en cette place et la composante en v d'une représentation du paquet est une représentation de dimension finie uniquement déterminée. Dans le L-paquet local correspondant à σ, on a exactement n éléments (par le théorème d'Harish-Chandra vu en 2.2, car l'indice du groupe de Weyl compact dans le groupe de Weyl est $\binom{n}{n-1}$). La conclusion de ce paragraphe est que

$$H^{n-1}_{\mathrm{et}}(S(K_f), F(\xi))[\Pi'_f] = \bigoplus_{\pi, BC(\pi)=\Pi} H^{n-1}(\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C}), U(1) \times U(n-1), \pi_\sigma \otimes \xi).$$

Chacun des espaces de cohomologie dans le membre de droite est, comme on l'a vu en 2.2, de dimension 1. Par conséquent, l'espace vectoriel $H^{n-1}_{\mathrm{et}}(S(K_f), F(\xi))[\Pi'_f]$ est une représentation galoisienne ℓ-adique de dimension n.

16. En effet, si l'on choisit $\gamma_0 \in U(F)$, on peut montrer que le groupe $\mathfrak{H}(\gamma_0)$ est nul si $\widehat{T}^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/F)} \subset Z(\widehat{G})$. Pour vérifier ceci, on peut bien sûr regarder les groupes T et G après extension des scalaires. Or $G \otimes E$ est D^* et ses sous-tores sont donc des corps extensions de F.

C'est un bon point de départ : il est donc raisonnable de décréter que c'est $r_{\ell,\iota_\ell}(\Pi)$. Pour démontrer qu'aux places non ramifiées (et distinctes de v), le paramètre de Satake de $\Pi_v = \Pi'_v$ coïncide avec le polynôme caractéristique de l'image par $r_{\ell,\iota_\ell}(\Pi)$ du Frobenius, il faut faire appel aux travaux de Kottwitz ([Ko]) déjà mentionnés à plusieurs reprises et dont on ne dira rien de plus.

La phrase précédente sous-entend tout de même que $r_{\ell,\iota_\ell}(\Pi)$ est non ramifiée en une place v non ramifiée pour U et Π. Il faut donc au préalable comprendre un petit peu la réduction de la variété de Shimura aux places finies. Une étude plus approfondie est de toute façon indispensable pour prouver complètement le théorème 8 (c'est-à-dire étudier la situation aux places ramifiées). C'est *a priori* un problème extrêmement ardu. Comment s'en sortir pour cet exemple précis ? Etudions la situation en une place finie w de caractéristique p. On fait l'hypothèse que p est totalement décomposé dans K, de sorte que l'on peut noter les places de E divisant p, $w = w_1, \bar{w} = \bar{w}_1, \ldots, w_r, \bar{w}_r$. On fait aussi l'hypothèse clé suivante : l'algèbre à division D est déployée en w : $D \otimes E_w \simeq M_n(F_w)$. En particulier, $U(F_v) = U(E_w) = GL_n(E_w)$. La variété de Shimura a une interprétation modulaire : elle paramètre des variétés abéliennes A à isogénie près, de dimension dn^2, munies d'une polarisation, d'une action de D, d'une structure de niveau, telles que l'involution de Rosati induise l'involution de D, avec une certaine condition déterminant sur l'algèbre de Lie de A. Ce sont les hypothèses qui précèdent - type de U aux places archimédiennes et déploiement en w - qui vont nous permettre d'étudier la réduction de $S_V \otimes E_w$ (simplement dénotée S_V dans la suite) en la place w. Le point central est en effet que la description de la réduction (bonne ou mauvaise) de la variété passe par la condition sur l'algèbre de Lie de A dans le problème de modules. L'idée est assez simple, mais demande malheureusement quelques notations. On décompose

$$E \otimes \mathbf{Q}_p = E_w \oplus E_{w_2} \oplus \cdots \oplus E_{w_r} \oplus E_{\bar{w}} \oplus E_{\bar{w}_2} \oplus \cdots \oplus E_{\bar{w}_r}.$$

Tout $D \otimes \mathbf{Q}_p$-module se décompose donc comme somme directe de D_{w_i} et de $D_{\bar{w}_i}$-modules. Pour $i = 1$, puisque $B_w = M_n(E_w)$, cela revient à se donner (Morita) un E_w-espace vectoriel. On peut appliquer cela à l'algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}(A)$, d'une variété abélienne sur une E_w-algèbre R, comme dans le problème de modules. C'est un R-module projectif avec action de $D \otimes \mathbf{Q}_p$. La condition dans la définition est alors que pour tout $i \geq 2$, $(\mathrm{Lie}(A))_{w_i} = 0$ et que le E_w-module $e(\mathrm{Lie}(A))_w$ déduit de $(\mathrm{Lie}(A))_w$ par l'équivalence de Morita est un R-module projectif de rang 1, avec action de E_w par $E_w \to R$. On peut prouver que sous ces hypothèses, si de plus l'on choisit l'ouvert V convenablement (i.e. V maximal en w), S_V a bonne réduction en w. Cela se voit en deux temps. On commence par fixer quelques structures entières supplémentaires et définir un problème de modules en niveau entier, représentable par un $\mathcal{O}$-schéma projectif X_V de fibre générique S_V. Puis on étudie sa lissité : le *point crucial* de la théorie de la réduction de ces variétés de Shimura (qui la rend tout à fait similaire à celle des courbes modulaires) est le suivant. Fixons A variété abélienne sur une $\mathcal{O}$-algèbre R comme dans le problème de modules entier. Décomposons le groupe p-divisible de A sous l'action de $\mathcal{O}_{F_{(p)}} \otimes \mathbf{Z}_p$:

$$A_{p^\infty} = A_{w^\infty} \oplus A_{w_2^\infty} \oplus \cdots \oplus A_{w_r^\infty} \oplus A_{\bar{w}^\infty} \oplus A_{\bar{w}_2^\infty} \oplus \cdots \oplus A_{\bar{w}_r^\infty}.$$

La condition imposée sur l'algèbre de Lie force d'une part les groupes $A_{w_2^\infty}, \ldots, A_{w_r^\infty}$ à être ind-étales (ce qui fait que les structures de niveau sont les mêmes qu'en caractéristique 0), d'autre part fait de la partie eA_{w^∞} de A_{w^∞} un groupe p-divisible $\mathcal{G}_A$ avec action de $\mathcal{O}$, dont la partie formelle est de dimension 1, l'action dérivée se faisant *via* le morphisme structural : cette partie formelle est donc un $\mathcal{O}$-module formel sur R au sens du paragraphe précédent. Or, déformer la variété abélienne A avec toutes les structures supplémentaires du problème de modules entier revient à déformer $\mathcal{G}_A$ (comme $\mathcal{O}$-module formel) : ceci est une conséquence facile du théorème de Serre-Tate ([Se2]), du fait que les $A_{w_j^\infty}$, $2 \leq j \leq r$, sont ind-étales (donc à déformations triviales) et de la dualité de Cartier.

Cette observation a de nombreuses conséquences. Elle permet, comme on vient de dire, de montrer la bonne réduction de X_V, quand V est maximal en w. Mais elle permet aussi d'étudier ce qui se passe quand V n'est plus supposé maximal en w, par exemple un sous-groupe de congruence de niveau m : en termes du problème de modules entier, cela passe par la définition de structures de niveau, que l'on exprime avec la notion de bases de Drinfeld (qui n'a un sens qu'en dimension 1 !). Le schéma obtenu $X_V = X_{V',m}$ (V' désigne le groupe obtenu à partir de V en remplaçant V_w par le compact maximal en w) est alors un $\mathcal{O}$-schéma projectif, mais plus lisse.

Disons un mot pour clore ce paragraphe du lien avec la correspondance de Langlands locale ([Ca1]). C'est de l'étude globale précédente qu'Harris et Taylor ont déduit la correspondance de Langlands locale pour GL_n sur un corps local non archimédien. Il est d'usage de dire que la correspondance de Langlands *locale* se réalise dans la cohomologie étale des analogues *locaux* des variétés de Shimura, les espaces de modules de groupes p-divisibles (appelés espaces de Lubin-Tate dans le cas qui nous intéresse ici, [F]). On pense donc avoir compris ce qu'il s'agit de faire...

en réalité, en réfléchissant un peu, on se rend vite compte que c'est assez compliqué ! En effet, il n'y a pas de moyen direct d'exprimer la cohomologie d'un tel espace en termes automorphes. Pour les variétés de Shimura, on a rappelé ci-dessus que cela passait par un théorème de comparaison et des calculs sur $\mathbf{C}$. Et on voit bien qu'on ne peut pas faire autrement, la théorie des formes automorphes est dans son essence une théorie sur $\mathbf{C}$... Le point de départ d'Harris et Taylor est plutôt l'idée que les correspondances de Langlands globale et locale doivent être compatibles (on peut donc comprendre le cas local si on sait traiter le cas global, comme dans les premières démonstrations de la théorie du corps de classes) et qu'une version faible de la correspondance globale - à savoir, l'existence de systèmes compatibles de représentations ℓ-adiques associés aux représentations cuspidales L-algébriques régulières - est suffisante pour nos besoins. Précisément, soient K corps p-adique, π représentation cuspidale de $GL_n(K)$. Choisissons un corps de nombres F, une représentation automorphe cuspidale L-algébrique régulière Π de $G(\mathbf{A}_F)$, G groupe réductif, une place w de F, de sorte que $F_w = K$, $\pi \simeq \Pi_w$ et $G(F_w) \simeq GL_n(K)$ (c'est possible, quitte à tordre π par un caractère). Si de plus, on sait associer à G une donnée de Shimura (par exemple si G est un groupe unitaire comme avant, de type $U(1, n-1)$ en une place infinie et compacte aux autres), on peut construire une représentation ℓ-adique $\rho_\ell(\Pi)$ attachée à Π (au sens faible, i.e. avec compatibilité aux places non ramifiées), et l'on peut espérer que si, $r_n(\pi) = \rho_\ell(\Pi)|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$, alors $\sigma_n(\pi) = r_n(\pi^\vee)$ est la représentation cherchée. Cette suggestion est en fait (après quelques corrections) une conjecture de Langlands. Si w est une place de bonne réduction de la variété de Shimura, et si Π est non ramifiée en w (i.e. si π est non ramifiée), c'est une conséquence de Kottwitz - cela dit, cette situation n'est pas la plus intéressante, car on sait alors construire très simplement la correspondance locale !

Malheureusement, on est désormais confronté à une deuxième difficulté, qui est en fait la difficulté historique majeure : comment comprendre ce qui se produit aux places ramifiées ? C'est ici qu'interviennent les espaces de Lubin-Tate. En effet, il y a quelque chose d'un peu étrange dans ce qu'on vient de faire : rien ne garantit a priori que $\sigma_n(\pi)$ ne dépend vraiment que de π, et pas du choix de F, G et Π. Evidemment, si l'on arrive directement à montrer (comme on sait le faire aux places non ramifiées) que $\sigma_n(\pi)$ est l'image par l'hypothétique correspondance de Langlands locale de π, i.e. a même fonction L et facteur ϵ que π, le théorème de Cebotarev montre que $\sigma_n(\pi)$ est bien déterminée. Mais c'est justement ce que l'on ne sait pas faire... On commence donc dans un premier temps par vérifier que $\sigma_n(\pi)$ ne dépend que de π. Pour cela, on montre que l'on peut relier *les espaces de cycles évanescents ℓ-adiques* de la variété de Shimura et de la tour de Lubin-Tate, exactement comme on l'a esquissé dans le paragraphe précédent, de façon à ce que les cycles évanescents de l'espace de Lubin-Tate se décomposent comme somme de $\pi \otimes j(\pi)^\vee \otimes (\sigma_n(\pi)^\vee)'$, π décrivant l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable de $GL_n(K)$ (qui n'est pas beaucoup plus gros que l'ensemble des représentations cuspidales), $j(\pi)$ désignant l'image inverse de π par la correspondance de Jacquet-Langlands, et $\sigma_n(\pi)'$ une représentation déduite de $\sigma_n(\pi)$ par une petite modification (qui n'a lieu que si π n'est pas cuspidale).

On a gagné beaucoup plus que du confort psychologique en montrant que $\sigma_n(\pi)$ ne dépend que de π. Cela donne presque gratuitement les propriétés formelles attendues de l'application $\pi \mapsto \sigma_n(\pi)$ car toutes les opérations et fonctorialités locales admettant une version globale : induction automorphe cyclique, changement de base cyclique, torsion par des caractères, passage à la contragrédiente, et bien sûr compatibilité à la théorie du corps de classes. Des arguments formels dus à Henniart permettent d'en déduire que σ_n envoie cuspidales sur irréductibles et est bijective. En outre, soient π, π' deux représentations cuspidales de $GL_n(K)$ et $GL_{n'}(K)$ respectivement. Alors

$$L(\pi \times \pi') = \prod_{\chi} L(\chi),$$

χ décrivant l'ensemble des caractères non ramifiés de K^* tels que $\chi\pi^\vee = \pi'$. Une telle identité vaut aussi du côté galoisien. La compatibilité de σ_n à la torsion par des caractères, à la dualité, et son caractère bijectif, montrent que si χ est un caractère de K^*, la relation $\chi\pi^\vee = \pi'$ équivaut à la relation $\chi\sigma_n(\pi^\vee) = \sigma_n(\pi')$. Par conséquent, σ_n préserve les fonctions L de paires. Pour s'occuper des facteurs ϵ et conclure la preuve de la correspondance locale, il faut faire appel à une astuce très intéressante de Harris, qui réduit le problème à une étude géométrique fine et très technique des cycles évanescents de la variété de Shimura le long des strates non supersingulières.

3.2 Cohomologie des variétés localement symétriques : travaux récents de Harris-Lan-Taylor-Thorne et Scholze

L'objectif de ce paragraphe, plus technique que le reste du texte, est d'expliquer les résultats récents obtenus par Harris-Lan-Taylor-Thorne d'une part ([HLTT]) et par Scholze d'autre part ([S4]), qui aboutissent à une preuve du théorème 8 sans l'hypothèse de polarisation et éclairent la signification de la torsion dans la cohomologie des variétés localement symétriques. Pour simplifier, on se focalisera sur le travail de Scholze (qui reprend certaines idées des premiers auteurs). C'est aussi un prétexte pour illustrer la fécondité et la richesse des méthodes p-adiques, qui se sont considérablement développées ces trente dernières années depuis les premiers travaux de Wiles, Hida et Taylor jusqu'à la construction des variétés de Hecke (*eigenvarieties*) par de nombreux auteurs, pour le programme de Langlands. La présentation qui suit est inspirée de l'article de Scholze et des notes de Calegari sur son blog.

Comme l'espace localement symétrique du groupe GL_n sur un corps de nombres n'est pas une variété algébrique (ni même une variété complexe) pour $n \geq 3$, la condition de polarisation est indispensable dans le paragraphe précédent. Il faut donc impérativement des idées nouvelles pour s'en débarrasser et s'approcher ainsi un peu plus de la conjecture 3. L'idée est de se ramener au cas polarisé par un *procédé d'approximation p-adique*. Le premier exemple historique d'interpolation p-adique est la construction par Deligne et Serre des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de poids 1 ([DS]). Mais cet exemple est un peu à part, car, comme la représentation cherchée est d'image finie, les congruences sont horizontales : on réduit modulo p pour plein de nombres premiers p différents. En général, l'argument est vertical : on réduit modulo des puissances de plus en plus grandes d'un nombre premier p fixé. Le principe de la méthode est simple. On fixe un nombre premier p (p désigne le nombre premier que l'on appelait auparavant ℓ...). Si deux représentations automorphes π et π' sont p-congruentes, alors les représentations galoisiennes p-adiques $\rho_p(\pi)$ et $\rho_p(\pi')$ associées (si elles existent) le sont aussi. Donner un sens précis à cette assertion dans les cas qui nous intéressent fait partie du travail à accomplir, évidemment. Pour la comprendre, il faut penser aux formes modulaires. Si f, f' sont deux formes modulaires cuspidales propres à coefficients entiers (ou dans $\mathbf{Z}_p$, si l'on sait ce que cela signifie) congrus modulo p^m, les représentations p-adiques qui leur sont attachées (sous réserve d'existence), et que l'on peut supposer à valeurs dans $GL_2(\mathbf{Z}_p)$, sont les mêmes modulo p^m. Cette remarque suggère alors la méthode suivante. Fixons f propre de poids 1. On souhaite construire $\rho_p(f)$. Soit $m > 0$. Si l'on trouve f' propre, *de poids $k \geq 2$*, congruente à f modulo p^m, on sait que modulo p^m, $\rho_p(f)$ est forcément $\rho_p(f')$. En faisant tendre m vers l'infini (f' varie donc avec m), on arrive à construire $\rho_p(f)$. En termes plus abstraits, l'idée est d'insérer la représentation automorphe qui nous intéresse dans une famille p-adique de représentations automorphes et de construire la représentation galoisienne par passage à la limite. Cette méthode a été appliquée avec succès par de nombreux auteurs pour se débarrasser de certaines restrictions techniques dans les constructions du paragraphe précédent [17], par exemple pour traiter le cas de représentations automorphes L-algébriques non régulières, dont la composante à l'infini est limite non dégénérée de série discrète (consulter par exemple l'introduction de [Go]).

Pour pouvoir utiliser l'interpolation p-adique, la première étape est de remplacer les formes automorphes classiques (une théorie analytique, sur le corps $\mathbf{C}$) par les formes automorphes p-adiques, avec lesquelles on peut s'amuser à chercher des congruences. C'est une question difficile à laquelle on peut apporter différentes réponses. Le cas des formes modulaires a été étudié par Katz ([Ka]). Les formes modulaires ont un développement de Fourier. Mais on ne peut pas compléter brutalement l'espace des développements de Fourier. En effet, si l'on procédait ainsi, la série d'Eisenstein E_{p-1} (de niveau 1 et de poids $p-1$), qui est congrue à 1 modulo p, serait inversible dans l'espace des formes modulaires p-adiques, ce qui est impossible puisqu'elle s'annule aux points supersinguliers de la fibre spéciale de la courbe modulaire... On s'en sort autrement : une forme modulaire cuspidale de niveau N et de poids k peut être vue comme section du faisceau cohérent ω^k sur $X_0(N)$. La courbe modulaire $X_0(N)$ a un modèle propre et lisse sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}]$ et l'on peut considérer l'espace rigide correspondant $\mathfrak{X}_0(N)$ sur $\mathbf{Q}_p$ (p est supposé premier à N). Une forme modulaire p-adique sera alors une section du faisceau cohérent rigide ω^k sur $\mathcal{X}_0(N)$ privé de disques de rayon 1 autour de chaque point supersingulier (les sections qui s'étendent à tout l'espace redonnent par GAGA rigide, les formes classiques). L'existence de familles p-adiques dans ce cas est un résultat splendide de Coleman, voir [Col]. Cette approche s'étend à d'autres groupes réductifs connexes G. Il faut tout d'abord que le groupe G donne naissance à une variété de Shimura X. Celle-ci a une structure de variété algébrique sur $\mathbf{C}$, ainsi que sa compactification minimale X^*. Fixons un isomorphisme $\iota : \mathbf{C} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_p$. Via ι, on obtient après changement de base une variété algébrique sur $\mathbf{C}_p$, et donc un espace adique $\mathcal{X}^*$ sur $\mathbf{C}_p$. On peut alors définir les formes automorphes p-adiques comme sections (surconvergentes) de fibrés vectoriels automorphes sur (des ouverts affinoïdes de) $\mathcal{X}^*$. Cela n'est intéressant que si les formes automorphes de G sont holomorphes. Tout se passe bien si $G(\mathbf{R})$ a une forme intérieure compacte $G'(\mathbf{R})$, car on peut alors transférer les représentations automorphes de G à G', et pour ce dernier, les formes automorphes sont automatiquement holomorphes (la variété de Shimura est finie).

Une telle définition est sans intérêt pour des groupes réductifs plus généraux, car ceux-ci peuvent très bien n'avoir pas de formes automorphes holomorphes. Comme substitut, il est tentant de travailler avec les groupes de cohomologie

17. Sans parler de l'intérêt des familles p-adiques dans l'étude de la conjecture principale d'Iwasawa et de la conjecture de Bloch-Kato, ou de leur lien avec les déformations de représentations galoisiennes.

singulière de l'espace localement symétrique. On est en effet conforté dans cette direction par un théorème important de Franke ([Fra]), qui montre que les valeurs propres de Hecke qui apparaissent dans la cohomologie

$$H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{C}) = H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{Q}_p) \otimes_\iota \mathbf{C}$$

proviennent des formes automorphes de G (holomorphes ou non). Dans le cas de GL_n par exemple, tous ces systèmes de valeurs propres viennent de représentations automorphes L-algébriques et la réciproque est vraie, si l'on autorise des coefficients. Pour notre objectif de construction des représentations galoisiennes, ces groupes de cohomologie sont donc des espaces raisonnables et ils ont évidemment une structure p-adique et même entière, naturelle, à savoir $H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{Z})$. Encore faut-il, pour pouvoir faire de l'analyse p-adique, les compléter pour la topologie p-adique, c'est-à-dire introduire, à la suite de Calegari et Emerton ([CE]), les groupes de *cohomologie complétée*. Fixons un sous-groupe compact ouvert $K^p \subset G(\mathbf{A}_F^p)$. On pose

$$\tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) = \varinjlim_{K_p} H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$$

et

$$\tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}_p) = \varprojlim_{n} \tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}).$$

Si K_p est suffisamment petit, on dispose d'une flèche

$$H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{Q}_p) \to \tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}_p)[p^{-1}],$$

mais en général $\tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}_p)[p^{-1}]$ est (beaucoup) plus gros que $\varinjlim H^i(X_{K_pK^p}, \mathbf{Q}_p)$, car des classes de torsion dans la cohomologie de chacun des $X_{K_pK^p}$ peuvent donner à la limite un $\mathbf{Z}_p$-module libre sans torsion... Malgré cela, Calegari et Emerton conjecturent que l'on peut quand même associer aux systèmes de valeurs propres de Hecke dans la cohomologie complétée des représentations galoisiennes p-adiques. Mieux, cela doit être vrai des valeurs propres de Hecke apparaissant dans $\tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}_p)$ (ou de façon équivalente, dans chacun des $\tilde{H}^i_{K^p}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$), bien que celles-ci n'aient pas de lien avec les formes automorphes classiques ! Un tel résultat a été suggéré ces dernières années par différents auteurs (Ash en particulier, cf. [Ash]). Que la torsion dans la cohomologie des espaces localement symétriques soit significative (et non un simple obstacle) est un fait nouveau, qui ne s'explique pas par la théorie automorphe classique ! C'est véritablement l'introduction du point de vue p-adique qui conduit à dégager un tel énoncé : d'une part, parce que les arguments de congruences pour résoudre des questions en caractéristique nulle forcent à comprendre ce qui se passe modulo p et d'autre part, parce que l'on s'est rendu compte que les représentations galoisiennes provenant de formes automorphes classiques sur un groupe G étaient très loin d'être denses dans les espaces de déformations (à la Mazur-Wiles), dès que G n'a pas de série discrète... Pour de tels groupes (GL_n, $n \geq 3$, par exemple), il est donc fondamental d'élucider le lien des classes de torsion dans la cohomologie avec les représentations galoisiennes. Comment s'y prendre ?

Soit G un groupe réductif connexe n'admettant de série discrète. On peut espérer réaliser G comme Lévi d'un parabolique P d'un groupe réductif H admettant une variété de Shimura X_H. La compactification de Borel-Serre $\bar{X}_H$ a une composante connexe de sa frontière qui est un fibré en tores sur l'espace localement symétrique X_G. On a donc une application $H^*(X_G, \mathbf{Z}) \to H^*(\bar{X}_H, \mathbf{Z})$ compatible à l'action des opérateurs de Hecke et on peut tenter de construire la représentation attachée à une classe propre dans la cohomologie de X_G en utilisant l'action de Galois sur la cohomologie étale de $\bar{X}_H$. Cette stratégie séduisante se heurte à plusieurs problèmes. La nature singulière de $\bar{X}_H$ en est un. Surtout, rien ne dit que la cohomologie étale permette de détecter la représentation cherchée. Pour les classes cuspidales (hors de la frontière), c'est à peu près vrai, mais cela n'a rien d'une évidence (voir la section 3.2). Pour les classes provenant de la frontière, cela devient complètement faux ! Voici un exemple. Soient F un corps quadratique imaginaire, $G = GL_2$ sur F, $H = U(2,2)$ sur $\mathbf{Q}$. La cohomologie de l'espace symétrique de G s'envoie dans celle de la variété de Shimura de H. Soient $[c]$ une classe propre pour les opérateurs de Hecke dans la cohomologie pour G, ρ la représentation galoisienne correspondante (conjecturale). Soit $r = \bigwedge^2(\rho \oplus \rho^c)$. C'est une représentation de dimension 6, qui s'écrit $r = s \oplus \psi \oplus \psi^c$, avec $s = \rho \otimes \rho^c$, ψ un caractère de Hecke (lié au caractère central de ρ). Les relations d'Eichler-Shimura montrent que les polynômes caractéristiques des opérateurs de Hecke sur l'image de $[c]$ dans $H^*(\bar{X}_H)$ sont les polynômes caractéristiques des éléments de Frobenius sur r [18]. Si l'on pouvait trouver r dans la cohomologie étale de $\bar{X}_H$, on saurait en déduire ρ. Malheureusement on peut vérifier que la représentation qui apparaît

18. On formule les choses en utilisant ρ, que l'on cherche à construire, uniquement pour simplifier : on peut tout écrire avec les paramètres de Satake sans faire intervenir ρ.

est juste $\psi \oplus \psi^c$. Cela tient au fait que la relation d'Eichler-Shimura donne seulement un polynôme caractéristique, pas un polynôme minimal...

Cela montre bien qu'il est nécessaire de commencer par comprendre le cas des variétés de Shimura compactifiées. Dans un travail récent ([S4]), Scholze vient d'obtenir le résultat suivant (que l'on énonce de façon un peu schématique).

Théorème 9 (Scholze). *On peut interpoler p-adiquement les systèmes de valeurs propres de Hecke intervenant dans $\tilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbf{Z}_p)$ par des valeurs propres de formes cuspidales classiques (en caractéristique* 0*), si l'espace localement symétrique X de G est une variété de Shimura de type Hodge.*

C'est un résultat absolument remarquable, comme le laisse deviner l'exemple précédent. Le lien avec le problème de départ n'est pas immédiat et sera expliqué plus bas. Mais le noeud de la difficulté est véritablement contenu dans le théorème précédent.

Donnons-nous donc un groupe réductif connexe G donnant naissance à une variété de Shimura $X = (X_K)_K$ de type Hodge, de dimension d. Soit C une extension complète algébriquement close de $\mathbf{Q}_p$. On dispose d'un espace adique $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_K)_K$ sur C associé à X (par le changement de base $\mathbf{C} \simeq \bar{\mathbf{Q}}_p \to C$). De même, la compactification minimale X^* de X donne naissance à un espace adique $\mathcal{X}^*$ sur C. Le théorème suivant est la première étape importante de la démonstration de Scholze.

Théorème 10. *Pour tout sous-groupe compact ouvert $K^p \subset G(\mathbf{A}_F^p)$, il existe un* espace adique perfectoïde *$\mathcal{X}^*_{K^p}$ sur C, tel que*

$$\mathcal{X}^*_{K^p} \sim \varprojlim_{K_p} \mathcal{X}^*_{K_pK^p}.$$

La notion d'*espace perfectoïde* a été dégagée dans sa thèse par Scholze ([S1]). L'étude de la théorie de Hodge p-adique a ceci de désagréable par rapport à sa grande soeur complexe que la structure locale d'une variété Y sur un corps p-adique est très compliquée (les ouverts, même arbitrairement petits, peuvent avoir un groupe fondamental étale très gros). Cependant, pour une topologie de Grothendieck convenable, la structure locale de Y se simplifie considérablement : Y devient localement perfectoïde. Or, si U est un espace affinoïde perfectoïde, les groupes de cohomologie étale $H^i(U, \mathcal{O}_U^+/p)^a$ sont nuls pour $i > 0$, en vertu du théorème de presque pureté - ces espaces sont donc les analogues des ouverts affines pour la cohomologie cohérente des variétés algébriques ou des ouverts de Stein en géométrie complexe. Cette topologie de Grothendieck permet de mettre en forme l'idée que la situation se simplifie quand on extrait une infinité de racines p-èmes. L'introduction de [S2] explique très clairement ces phénomènes. Ces observations ont pour conséquence que les groupes de cohomologie étale $H^i(Y, \mathcal{O}_Y^+/p^n)^a$ d'un espace perfectoïde Y se calculent comme cohomologie de Cech d'un recouvrement affinoïde (perfectoïde) de Y. Dans le cas qui nous intéresse, cela s'applique au calcul des groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{X}^*_{K^p}, \mathcal{I}^{+a}_{\mathcal{X}_{K^p}}/p^n)$ de $\mathcal{X}^*_{K^p}$ à valeurs dans le faisceau des formes cuspidales en niveau infini modulo p^n (le faisceau d'idéaux de la frontière de la compactification minimale modulo p^n) : en particulier, ils sont nuls en degré strictement supérieur à d. Le point crucial de la démonstration du théorème 10 est qu'au-dessus du lieu ordinaire, l'existence du sous-groupe canonique donne une façon canonique d'extraire des racines p-èmes.

Le deuxième ingrédient clé de la preuve est le théorème de comparaison suivant. C'est une reformulation d'une extension au cas non lisse du théorème principal de [S2], prouvée dans [S3]. Il relie de façon un peu magique la cohomologie d'un faisceau constant à quelque chose d'un peu étrange, la cohomologie d'un faisceau cohérent modulo p, mais calculée sur la fibre générique.

Théorème 11. *Il existe un isomorphisme naturel de presque $\mathcal{O}_C$-modules :*

$$\tilde{H}^i_{c,K^p}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}} \mathcal{O}_C^{+a}/p^n \simeq H^i(\mathcal{X}^*_{K^p}, \mathcal{I}^{+a}_{\mathcal{X}_{K^p}}/p^n).$$

En mettant bout à bout les considérations ci-dessus, on en déduit qu'il existe un complexe dont les termes sont donnés par des formes cuspidales de niveau infini sur des ouverts affinoïdes, qui calcule les groupes de cohomologie complétée à supports compacts. Pour prouver le théorème principal, il reste donc à approcher p-adiquement ces formes cuspidales de niveau infini définies sur des ouverts affinoïdes par des formes cuspidales de niveau fini définies sur toute la variété de Shimura, de façon compatible à l'action des opérateurs de Hecke. Si l'on prend le cas de GL_2, on a par exemple une forme modulaire p-adique définie sur le lieu ordinaire. Pour l'étendre à toute la courbe modulaire, on la multiplie par une puissance convenable de l'invariant de Hasse pour éliminer les pôles. Cela fonctionne seulement parce que la multiplication par l'invariant de Hasse commute avec l'action des opérateurs de Hecke hors p. La troisième et dernière étape de la preuve consiste donc à introduire un analogue de l'invariant de Hasse, qui convienne pour des ouverts à peu près arbitraires de la variété de Shimura. C'est probablement l'étape la plus originale.

Pour ce faire, on introduit une application des périodes, *l'application des périodes de Hodge-Tate.*

Théorème 12. *Il existe une variété de drapeaux $\mathcal{F}\ell$ avec action de G et une application des périodes de Hodge-Tate $G(\mathbf{Q}_p)$-équivariante*

$$\pi_{HT} : \mathcal{X}^*_{K^p} \to \mathcal{F}\ell,$$

qui commute avec l'action des opérateurs de Hecke hors de p et telle que le fibré ample ω_{K^p} sur $\mathcal{X}^*_{K^p}$ provienne par pull-back du fibré ω sur $\mathcal{F}\ell$. En outre, il existe un recouvrement ouvert affinoïde $(\mathcal{U}_i)_i$ de $\mathcal{F}\ell$, $1 \leq i \leq M$, telle que pour tout i, $\mathcal{V}_i = \pi^{-1}_{HT}(\mathcal{U}_i)$ est un ouvert affinoïde de $\mathcal{X}^*_{K^p}$. Les ouverts $\mathcal{V}_i$ sont pré-images d'ouverts V_{i,K_p} de $\mathcal{X}^*_{K_pK^p}$ pour K_p suffisamment petit, et pour tout i

$$\varinjlim_{K_p} H^0(V_{m,K_p}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K_pK^p}}) = H^0(\mathcal{V}_i, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^*_{K^p}}).$$

Décrivons π_{HT} succinctement dans le cas $G = GL_2$ sur $\mathbf{Q}$. Soit $X_{N,n}$ la courbe modulaire ouverte de niveau $\Gamma_1(N) \cap \Gamma(p^n)$ (N premier à p), vue sur $W = W(\bar{\mathbf{F}}_p)$. Un point x de la fibre spéciale de $X_{N,n}$ est dit supersingulier si le schéma en groupes $E[p^n]$ est connexe (E est la courbe correspondant à x), c'est-à-dire si $E[p^n](\bar{\mathbf{F}}_p) = 0$, ordinaire sinon. La fibre spéciale (d'une composante géométriquement connexe) de $X_{N,n}$ est union de $p^{n-1}(p+1) = |\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})|$ sous-schémas fermés irréductibles et lisses, qui s'intersectent tous aux points supersinguliers. En un point ordinaire, les anneaux locaux complétés de $X_{N,n}$ sont simples, car la $X_{N,n}$ est lisse en ces points. La situation est plus compliquée aux points supersinguliers, où les singularités sont de plus en plus compliquées quand n est grand. Supposons $n = 0$. Pour comprendre $\widehat{\mathcal{O}}_{Y_{N,0},x}$ en x supersingulier, on utilise tout d'abord le théorème de Serre-Tate, dont l'on déduit que cet anneau représente le foncteur des déformations du groupe p-divisible $E[p^\infty]$, puis le fait que l'étude des groupes p-divisibles connexes se ramène à celle des groupes p-divisibles formels. Le cas $n > 0$ se traite à l'aide de la notion de base de Drinfeld : la conclusion est que $\widehat{\mathcal{O}}_{X_{N,n},x}$ s'identifie à l'anneau A_n des déformations du groupe formel de dimension 1, de hauteur 2, sur $\bar{\mathbf{F}}_p$, avec structure de niveau de Drinfeld de niveau p^n. Weinstein a montré qu'à la limite $n \to +\infty$, l'anneau local en un point x supersingulier de la courbe modulaire en niveau infini X_N est isomorphe à

$$A_\infty = W[[X^{1/p^\infty}, Y^{1/p^\infty}]]\widehat{\otimes}_{W[[T^{1/p^\infty}]]}\widehat{W[\mu_{p^\infty}]},$$

l'application $W[[T^{1/p^\infty}]] \to \widehat{W[\mu_{p^\infty}]}$ étant donnée par $T \mapsto \lim_n (1-\zeta_{p^n})^{p^n}$. Ces calculs donnent une idée de pourquoi la courbe modulaire en niveau infini $\mathcal{X}_N$ (vue comme espace adique) est perfectoïde (theorème 10) [19].

On peut décomposer

$$\mathcal{X}^*_N = \mathcal{X}^{*,\mathrm{ord}}_N \bigsqcup \mathcal{X}^{\mathrm{ss}}_N.$$

comme union disjointe de $\mathcal{X}^{*,\mathrm{ord}}_N$, défini comme adhérence du voisinage tubulaire du lieu ordinaire de la fibre spéciale et de l'ouvert $\mathcal{X}^{\mathrm{ss}}_N$, qui est une union disjointe d'espaces de Lubin-Tate (espaces de déformations de groupes formels de dimension 1). La variété de drapeaux pour GL_2 est

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) \bigsqcup \Omega^2,$$

avec Ω^2 le demi-plan de Drinfeld. Ces décompositions se correspondent :

$$\mathcal{X}^{*,\mathrm{ord}}_N = \pi^{-1}_{HT}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)) \quad ; \quad \mathcal{X}^{\mathrm{ss}}_N = \pi^{-1}_{HT}(\Omega^2).$$

Sur le lieu ordinaire, l'application π_{HT} mesure la position du sous-groupe canonique ; sur le lieu supersingulier, π_{HT} s'obtient en composant l'isomorphisme entre tour de Lubin-Tate et tour de Drinfeld et l'application naturelle de cette dernière vers Ω^2.

L'application des périodes permet de fabriquer des analogues faibles des invariants de Hasse. Le recouvrement $(\mathcal{U}_i)_i$ du théorème est défini à partir d'une base de sections s_i, $1 \leq i \leq M$, du faisceau ω sur $\mathcal{F}\ell$, $\mathcal{U}_i$ étant le lieu

19. Un tel raisonnement pourrait peut-être être mis en forme aux points supersinguliers de variétés de Shimura plus générales, grâce à un théorème de Rapoport-Zink ([RZ]) qui montre que l'on peut uniformiser la variété en un tel point par l'espace de Rapoport-Zink correspondant et les travaux de Scholze-Weinstein ([SW]), mais ne mène de toute façon nulle part si l'on veut comprendre la variété tout entière.

où $|s_j| \leq |s_i|$ pour tout j. Plus généralement, si $J \subset \{1, \dots, M\}$, on pose $\mathcal{U}_I = \cap_{i \in I} \mathcal{U}_i$. On peut voir les sections s_i comme sections de ω_{K^p} sur $\mathcal{X}^*_{K^p}$. Ce sont les groupes $H^0(\mathcal{V}_I, \mathcal{I}^{+a}/p^n)$ qui apparaissent dans le complexe de Cech calculant la cohomologie complétée à supports compacts et sur lesquels on veut comprendre l'action des opérateurs de Hecke. Comme on travaille modulo une puissance de p, on peut utiliser la dernière assertion du théorème pour se ramener en niveau fini puis l'on construit des modèles entiers un peu étranges $\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}$, $\mathfrak{V}_{i,K_p}$, $\mathfrak{I}_{K_p}$ et $\omega^{\mathrm{int}}_{K_pK^p}$ de nos objets. D'où des sections $\bar{s}_i \in H^0(\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}, \omega^{\mathrm{int}}_{K_pK^p}/p^n)$ indépendantes des choix (que l'on avait faits en fonction de n : les indéterminations disparaissent modulo p^n). Sur $\mathfrak{V}_{I,K_p}$, $\bar{s}_I = \prod_{i \in I} \bar{s}_i$ est inversible, donc

$$H^0(\mathfrak{V}_{I,K_p}, \mathfrak{I}/p^n) = \varinjlim_{\times \bar{s}_J^k} H^0(\mathfrak{X}_{K_pK^p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K_p})^{\otimes k|I|} \otimes \mathfrak{I}/p^n).$$

Toutes les applications considérées sont Hecke-équivariantes, car la multiplication par les $\bar{s}_i$ commute aux opérateurs de Hecke (car c'est le cas de π_{HT}). Le point suivant est que le faisceau $\omega^{\mathrm{int}}_{K_p}$ est ample. Par conséquent, pour k grand,

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K_p})^{\otimes k|I|} \otimes \mathfrak{I}/p^n) = H^0(\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K_p})^{\otimes k|I|} \otimes \mathfrak{I})/p^n.$$

Or le groupe $H^0(\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K_p})^{\otimes k|I|} \otimes \mathfrak{I})$ est sans p-torsion. Par conséquent les systèmes de valeurs propres de Hecke qui apparaissent dans cet espace sont les mêmes que ceux de

$$H^0(\mathfrak{X}^*_{K_pK^p}, (\omega^{\mathrm{int}}_{K_p})^{\otimes k|I|} \otimes \mathfrak{I})[p^{-1}] = H^0(\mathcal{X}^*_{K_pK^p}, \omega^{\otimes k|I|}_{K_p} \otimes \mathcal{I}),$$

c'est-à-dire que les systèmes de valeurs propres de Hecke provenant de formes cuspidales cohomologiques (pour k grand) classiques. Cela termine le schéma de démonstration du théorème 9.

Armé de ce théorème, on peut procéder à la construction de la représentation p-adique attachée à une représentation automorphe π L-algébrique régulière de GL_n sur le corps CM E. Le problème sera résolu si l'on sait construire une représentation p-adique pour tout système de valeurs propres de Hecke dans la cohomologie singulière de l'espace symétrique de GL_n (quitte à autoriser des coefficients, par le théorème de Franke déjà cité). Malheureusement, la notion de représentation galoisienne se prête mal aux opérations de recollement auxquelles on va se livrer : pour cette raison, on travaille plutôt avec les *déterminants de Chenevier* ([Ch]). Voici le principe : on va à chaque étape recoller des systèmes de valeurs propres de Hecke, c'est-à-dire par le théorème de Cebotarev, les traces des représentations galoisiennes cherchées. La trace d'une représentation de dimension n sur un corps k détermine (Brauer-Nesbitt) la représentation elle-même, dès que $n!$ est inversible dans k. Sans cette dernière hypothèse, cela ne fonctionne plus et il vaut donc mieux essayer de prendre en compte le polynôme caractéristique plutôt que la trace et c'est ce que permettent de faire de manière axiomatique les *déterminants*. Soit V un espace hermitien isotrope maximal sur E de dimension $2n$. Le groupe $M = \mathrm{Res}_{E/\mathbf{Q}} GL_n$ est facteur de Lévi d'un parabolique maximal P du groupe des automorphismes de V préservant la forme hermitienne, $G \subset GL(V)$. On fixe un compact ouvert $K_f = K_pK^p$ de $G(\mathbf{A}^f)$ qui détermine des sous-groupes correspondants dans $P(\mathbf{A}^f)$ et $M(\mathbf{A}^f)$, que l'on sous-entend dans la suite. L'espace symétrique X_P de P est un fibré, de fibres un produit de cercles sur l'espace symétrique X_M de M ; la cohomologie de ces deux espaces se relie donc facilement. En outre, comme P est un parabolique maximal de G, on a un plongement ouvert

$$X_P \hookrightarrow X_G^{\mathrm{BS}} \backslash X_G$$

et donc des applications naturelles

$$H^i_c(X_P, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_G^{\mathrm{BS}} \backslash X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_P, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}).$$

Par conséquent on réussira à construire les déterminants pour $H^i_!(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) = \mathrm{Im}(H^i_c(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}))$ si on sait le faire pour $H^i(X_G^{\mathrm{BS}} \backslash X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$, et le cas de ce groupe se déduit lui-même par la suite exacte longue

$$\cdots \to H^i_c(X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_G^{\mathrm{BS}} \backslash X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to \dots$$

du cas de $H^i(X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$. Rappelons que l'on a fixé et sous-entendu un niveau $K_f = K_pK^p$. D'où une suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^i_{\mathrm{cont}}(K_p, \tilde{H}^j_{c,K^p}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})) \Rightarrow H^{i+j}_c(X_G, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$$

qui permet de déduire dans ce cas l'existence des déterminants du théorème 9. En effet, celui-ci prouve que par interpolation p-adique, la construction des déterminants pour $\tilde{H}^j_{c,K^p}(\mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ est ramenée à celle des déterminants pour les formes cohomologiques cuspidales pour G, qui est du type $U(n, n)$ à l'infini. On transfère ces formes automorphes à $U(1, 2n-1)$ et on applique le théorème 8. Enfin, pour passer de $H_!^i(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ à $H^i(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$, on contemple la suite exacte longue

$$\cdots \to H_c^i(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to H^i(X_M^{\mathrm{BS}} \backslash X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z}) \to \dots$$

et l'on note que la cohomologie $H^i(X_M^{\mathrm{BS}} \backslash X_M, \mathbf{Z}/p^m\mathbf{Z})$ s'exprime en termes de la cohomologie d'espaces symétriques pour $GL_{n'}$, $n' < n$, que l'on peut supposer comprise par récurrence.

Loin de clore le sujet (ce que l'on sait est peu de chose au regard de ce qu'il reste à découvrir), ces travaux récents posent de nombreuses questions. La signification arithmétique de la torsion dans la cohomologie reste mystérieuse : peut-on étendre à ce contexte les théorèmes de relèvement de la modularité, ou y démontrer certaines instances d'un principe de fonctorialité p-adique, par exemple ? Le texte [CV] explore certaines de ces directions. Le travail spectaculaire de Scholze est l'aboutissement de nombreuses années d'utilisation des méthodes p-adiques, mais celles-ci n'ont sûrement pas dit leur dernier mot. Par exemple, certaines limites dégénérées de séries discrètes (les formes de Maass de valeur propre $1/4$ notamment) apparaissent dans la cohomologie cohérente de domaines de Griffiths-Schmid - cf. [Ca2]. On peut rêver d'un analogue p-adique, avec des espaces adiques non algébriques, l'avantage étant que l'utilisation d'arguments de congruences ne nécessite pas (logiquement) d'avoir montré au préalable l'existence d'une structure rationnelle [20]... Enfin et surtout, il est naturel de penser que les méthodes de Scholze devraient apporter un éclairage nouveau sur la *correspondance de Langlands p-adique*, qui n'en est encore qu'à ses premiers pas ([Br2]) et pour laquelle les travaux de Breuil et Emerton (voir [Br1]) ont montré l'importance de la cohomologie étale complétée.

20. Cette suggestion est plus un voeu pieux qu'autre chose car on n'a pas vraiment diminué la difficulté...

Références

[A1] J. Arthur. Automorphic representations and number theory. *C.M.S. Conf. Proc. I*, 3–51. 1980.

[A2] J. Arthur. Unipotent automorphic representations : conjectures. *Astérisque 171-172.* 13-71. 1989.

[A3] J. Arthur. Unipotent Automorphic Representations : Global Motivation. In *Automorphic Forms, Shimura Varieties and L-functions*, vol. I. Academic Press. 1-75. 1990.

[A4] J. Arthur. A note on the automorphic Langlands group. *Canad. Math. Bull. 45.* 466-482. 2002.

[A5] J. Arthur. An introduction to the trace formula. in J. Arthur, D. Ellwood, R. Kottwitz, eds, *Harmonic Analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Mathematics Proceedings, Vol. 4 1-263. 2005.

[A6] J. Arthur. The endoscopic classification of representations. A paraître aux *Proceedings of the International Colloquium on Automorphic Representations and L-functions*, January 2012, Tata Institute of Fundamental Research. 2012

[AC] J. Arthur et L. Clozel. Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula, *Ann. of Math. Studies*, 120. 1989.

[Ash] A. Ash. Galois representations attached to mod p cohomology of $GL(n, Z)$. *Duke Math. J.*, 65(2) :235-255, 1992.

[BR] D. Blasius et J. Rogawski. Zeta-functions of Shimura varieties. in *Motives*, *AMS Proc. Symp. Pure Math. 55 Part II.* 1994.

[Br1] C. Breuil. Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications, *Séminaire Bourbaki, 63ème année (2010/2011), Exp. No. 1031.*

[Br2] C. Breuil. The emerging p-adic Langlands programm, *Proceedings of I.C.M. 2010, Vol. II*, 203-230. 2010.

[BGe] J. Bernstein et S. Gelbart (eds.). *An Introduction to the Langlands Program.* Birkhauser, Boston MA. 2003.

[BG] K. Buzzard et T. Gee. The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations. arXiv :1009.0785.

[CE] F. Calegari and M. Emerton. Completed cohomology - a survey. In *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, volume 393 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 239-257. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[CV] F. Calegari et A. Venkatesh. Towards a Torsion Langlands correspondence. Draft. 2012.

[Ca1] H. Carayol. Preuve de la conjecture de Langlands locale pour GL_n : travaux de Harris-Taylor et Henniart. *Séminaire Bourbaki, 51ème année (1998/1999), Exp. No. 857.*

[Ca2] H. Carayol, Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths-Schmid : le cas du groupe $U(2,1)$. *Compositio Math. 111*, 51–88. 1998.

[Cal] B. Casselman. The L-group. Preprint.

[Ch] G. Chenevier. The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings. A paraître aux Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[Cl1] L. Clozel. Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité. In *Automorphic Forms, Shimura Varieties, and L-Functions* (Ann Arbor), vol. 1, Academic Press, Inc. 77-160. 1988.

[Cl2] L. Clozel. Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, (73) :97-145, 1991.

[Cl3] L. Clozel. Nombre de points des variétés de Shimura dans un corps fini. *Séminaire Bourbaki, 45ème année (1992/1993), Exp. No. 766.*

[Col] R. Coleman. p-adic Banach spaces and families of modular forms. *Inv. Math. 127*, 417-479. 1997.

[Con] B. Conrad. *Modularity lifting seminar webpage.* Voir `http://math.stanford.edu/~conrad/modseminar/`.

[Co] *Automorphic forms, representations and L-functions.* AMS Proceedings of the Corvallis conference, Borel et Casselman eds. *Proc. Symp. Pure Math 33*, (I-II). 1979.

[Da] J.-F. Dat. Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique, d'après Gérard Laumon et Ngô Bao Chau. *Séminaire Bourbaki, 57ème année (2004/2005), Exp. No. 940.*

[D1] P. Deligne. Formes modulaires et représentations ℓ-adiques. *Séminaire Bourbaki, 11 (1968-1969), Exp. No. 355.*

[D2] P. Deligne. Travaux de Shimura. *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389.*

[DS] P. Deligne et J.-P. Serre. Formes modulaires de poids 1. *Ann. Sci. ENS 4*. 507-530. 1974.

[DSh] F. Diamond et J. Shurman. *A First Course in Modular Forms.* Grad. Texts in Math. Springer. 2010.

[F] L. Fargues. *An introduction to Lubin-Tate spaces and p-divisible groups.* Notes d'un cours à Pékin, 2005.

[FM] J.-M. Fontaine et B. Mazur. Geometric Galois Representations, in *Elliptic curves, modular forms, and Fermats last theorem (Hong Kong 1993)*, Internat. Press, Cambridge MA, 41-78. 1995.

[Fra] J. Franke. Harmonic analysis in weighted L_2-spaces. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4), 31(2) :181-279, 1998.

[Fre] E. Frenkel. Gauge theory and Langlands duality. *Exposé Bourbaki, 61ème année (2008-2009), Exp. No. 1010.*

[Ge] S. Gelbart. *Automorphic forms on adèle groups.* Ann. Of Math. Studies No. 83. Princeton Univ. Press. 1975.

[GF] I. Gelfand et S. Fomin. Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature. *Trans. of the AMS*, Series 2 vol I. 49-65. 1965.

[GJ] R. Godement et H. Jacquet. *Zêta Functions of Simple Algebras.* Lecture Notes in Math. 260, Springer-Verlag. 1972.

[Go] W. Goldring. Galois Representations Associated to Holomorphic Limits of Discrete Series I : Unitary Groups. A paraître dans *Comp. Math.*

[GKM] M. Goresky, R. Kottwitz et R. MacPherson. Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators. *Duke Math. J. 89*, 477-554. 1997.

[Hal] T. Hales. The fundamental lemma and the Hitchin fibration (after Ngô Bao Chau). *Séminaire Bourbaki, 63ème année (2010/2011), Exp. No. 1035.*

[H] M. Harris. An introduction to the stable trace formula, chapitre dans L. Clozel, M. Harris, J.-P. Labesse, and B. C. Ngô, eds., *The stable trace formula, Shimura varieties, and arithmetic applications, Book 1.*

[HLTT] M. Harris, K.-W. Lan, R. Taylor, and J. Thorne. Galois representations for regular algebraic cusp forms over CM fields. En préparation.

[HT] M. Harris and R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[Ka] N. Katz. p-adic properties of modular schemes and modular forms. In *Modular functions of one variable, III* (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp). 69-190. 1973. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 350, Springer, Berlin, 1973.

[Ko] R. E. Kottwitz. On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties. *Invent. Math.*, 108(3) :653-665, 1992.

[LL] J.-P. Labesse et R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$, *Can. J. Math.*, 31 726-785. 1979.

[JL] H. Jacquet et R. P. Langlands. *Automorphic forms on* $GL(2)$. Springer Lect. Notes. vol. 114. 1970.

[L1] R. P. Langlands. Lettre à André Weil. 1967.

[L2] R. P. Langlands. Modular forms and ℓ-adic representations. in *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Mathematics 349. 1973.

[L3] R. P. Langlands. On the functional equations satis ?ed by Eisenstein series. *Lect. Notes Math. 544*, Springer. 1976.

[L4] R. P. Langlands. Automorphic representations, motives, and Shimura varieties. Ein Märchen. *Proc. Symp. Pure Math. 33*, Part 2,205-246. 1979.

[L5] R. P. Langlands. On the zeta-functions of some simple Shimura varieties. *Canadian Journal of Mathematics* 31. 1979.

[L6] R. P. Langlands. Stable conjugacy-definitions and lemmas. *Canadian Journal of Mathematics 31*. 1979.

[L7] R. P. Langlands. The classification of representations of real reductive groups. *Math. Surveys and Monographs 31*. 1988.

[LN] G. Laumon et B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les groupes unitaires. *Ann. of Math. 168*, 477–573. 2008.

[Moe] C. Moeglin. Le spectre discret des groupes classiques (d'après James Arthur). *Séminaire Bourbaki, 65ème année (2012/2013), Exp. No. 1070.*

[Mi] J. Milne. *Introduction to Shimura varieties.* Texte de présentation.

[N1] B. C. Ngô. Survey on the fundamental lemma. CRM Harvard. 2009.

[N2] B. C. Ngô. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Publ. Math. IHES. 111.* 1–169. 2010.

[RZ] M. Rapoport et T. Zink. *Period spaces for p-divisible groups.* volume 141 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ. 1996.

[S1] P. Scholze. Perfectoïd spaces, *Publ. math. de l'IHÉS 116.* no. 1, 245-313. 2012.

[S2] P. Scholze, p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, *Forum of Mathematics, Pi*, 1, e1, 2013.

[S3] P. Scholze. Perfectoid spaces : A survey , à paraître aux Proceedings of the 2012 conference on Current Developments in Mathematics.

[S4] P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties , Preprint, Bonn, 2013.

[SW] P. Scholze et J. Weinstein, Moduli of p-divisible groups. Preprint, 2012.

[Se2] J.-P. Serre. Groupes p-divisibles (d'après John Tate). *Séminaire Bourbaki, 19ème année (1966/1967), Exp. No. 318.*

[Se1] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique.* P.U.F. 1970.

[She] D. Shelstad. Orbital integrals, endoscopic groups and L-indistinguishability for real groups. In *Journées Automorphes.* Vol. 15 de *Publ. Math. de l'Univ. de Paris VII.* 135–219. 1983.

[Sh2] G. Shimura. *Introduction to the arithmetic theory of automorphic forms.* Iwanomi Shoten and Princeton Univ. Press. 1971.

[Sh1] G. Shimura. *Collected papers, vol I-V.* Springer. 2003.

[Shi] S. W. Shin. Galois representations arising from some compact Shimura varieties. *Ann. of Math. (2)*, 173(3) :1645-1741, 2011.

[T1] J.T. Tate. *Fourier Analysis In Number Fields and Hecke's Zêta-Functions.* PhD thesis, Princeton. 1950.

[T2] J. T. Tate, Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini. *Séminaire Bourbaki, 21ème année (1968/1969), Exp. No. 352.*

[V] V. S. Varadarajan. Introduction. In *Harish-Chandra Collected Papers, vol. I (1944-1954)*, Springer. 1984.

[We] T. Wedhorn. The local Langlands correspondence for $GL(n)$ over p-adic fields. In *School on Automorphic Forms on* $GL(n)$, volume 21 of *ICTP Lect. Notes*, pages 237-320. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste. 2008.

[Wi] E. Witten. Geometric Langlands and the equations of Nahm and Bogomolny. arXiv :0905.4795.