

MÉMOIRE DE DIPLÔME DE L'ENS

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

Modèle de Poland-Scheraga : définition, transition d'accrochage et modèle désordonné

Auteur :
Alexandre LEGRAND

Supervisé par :
Quentin BERGER

Résumé

Le modèle de Poland-Scheraga (PS), ou modèle d'accrochage, est une modélisation probabiliste de l'accrochage d'une molécule longue (comme un polymère) à un objet fixe. Son étude met en évidence un phénomène physique de transition de phase, qu'on appelle "transition d'accrochage". Les mêmes résultats s'obtiennent sur le modèle de Poland-Scheraga généralisé (gPS), qui modélise l'accrochage de deux molécules longues entre elles. Un domaine de recherche actuel est de regarder les modèles dits "désordonnés", et l'impact du désordre sur la transition d'accrochage : on peut alors dire que le désordre est "pertinent" ou "non-pertinent" selon les cas.

Notations Nous noterons dans ce document $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, et $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. L'abréviation iid signifiera *indépendant(s) et identiquement distribué(s)*, et p.s. signifiera *presque sûrement* (pour une loi de probabilité qui sera claire dans chaque contexte).

1 Modèle de Poland-Scheraga (PS)

Nous allons d'abord présenter le modèle de Poland-Scheraga, dit modèle PS. Considérons un objet long, composé de N parties identiques successives, qui peuvent s'accrocher à un second objet fixe. Chaque point où l'objet long est accroché va impliquer une interaction (avec l'objet fixe), qui va coûter ou rapporter une énergie. Le système va s'accrocher de façon aléatoire, en favorisant les configurations coûtant le moins d'énergie.

Ce modèle permet de représenter différents phénomènes naturels, notamment biologiques ou chimiques ; par exemple l'adhésion d'une grande molécule (un polymère, une protéine) à un autre corps (un solide, la paroi d'une cellule). Nous verrons même que certaines grandeurs mathématiques s'interprètent de manière physique, et peuvent déterminer le comportement macroscopique du système ; cela justifie particulièrement l'intérêt que nous portons ici pour ce modèle.

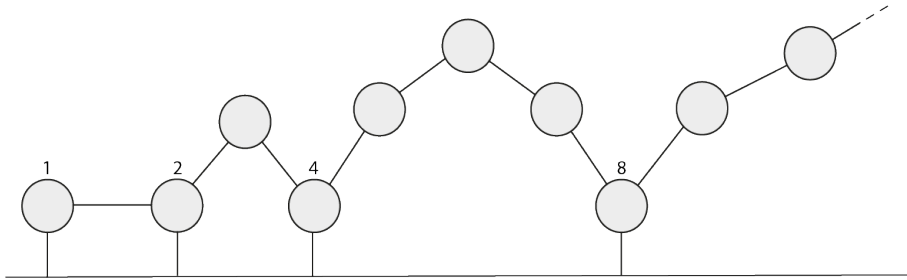


FIGURE 1 – Réalisation du modèle de Poland-Scheraga. L'objet long est accroché aux emplacements 1, 2, 4 et 8.

1.1 Processus de Renouvellement

Nous allons d'abord définir une loi de probabilité pour les points d'accroches du système s'il n'y a pas d'énergie d'interaction, en utilisant des processus de renouvellement. Nous posons la définition suivante :

Définition 1.1 (Processus de renouvellement dans \mathbb{N}^d).

Un processus de renouvellement $\tau = (\tau_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ est une marche aléatoire sur \mathbb{N}_0^d issue de 0, dont les incréments $\tau_i - \tau_{i-1}$ sont iid et à valeurs dans \mathbb{N}^d .

Nous noterons par \mathbf{P} et \mathbf{E} les mesures de probabilité et espérances liées à un processus de renouvellement τ (en opposition à \mathbb{P} et \mathbb{E} , qui seront utilisés pour d'autres variables aléatoires). Pour l'instant, nous allons nous restreindre aux processus de renouvellement dans \mathbb{N} . À N fixé, chaque point du processus $\tau = (\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots)$ tel que $\tau_i \leq N$ donne un emplacement où la molécule de longueur N est accrochée. Nous considérerons toujours que la molécule est accrochée en $0 = \tau_0$, et nous ignorerons ce point dans nos formules.

Remarque 1.2. Dans le cadre général, on autorise τ à être une suite finie ou infinie : c'est à dire que ses incréments peuvent être à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et, si $\tau_{k-1} < \infty, \tau_k = \infty$, alors τ s'arrête à τ_{k-1} . Si τ est fini, on dit qu'il *termine* ; s'il est infini, on dit qu'il *persiste*.

On remarque, en utilisant la propriété de Markov, que la loi d'un processus de renouvellement τ peut s'obtenir à partir seulement de la loi de sa première valeur τ_1 . Dans le reste de ce document, nous nous restreindrons aux processus pour lesquels la loi de τ_1 s'écrit :

$$K(n) := \mathbf{P}(\tau_1 = n) = \frac{L(n)}{n^{1+\alpha}} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

où α est un réel strictement positif, et L est une *fonction à variation lente*. Une fonction L est à variation lente si elle vérifie pour tout $a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1,$$

(par exemple, la fonction log, les fonctions constantes, et les fonctions convergeant vers une limite finie non nulle sont à variation lente). On remarque que si L est à variation lente, alors pour tout $\eta > 0$ on a $L(x) = o(x^\eta)$ pour $x \rightarrow +\infty$; et L^{-1} , L^a où $a > 0$ sont à variation lente.

De plus, si $K(\infty) := \mathbf{P}(\tau_1 = \infty) = 0$, alors τ persiste p.s.. Si $K(\infty) > 0$, τ termine p.s.. On supposera en général $K(\infty) = 0$ (donc τ persistant), sauf mention explicite du contraire.

Les détails de L auront peu d'importance sur tous les résultats énoncés dans ce document ; ainsi, si le lecteur souhaite simplifier le cadre d'étude, il peut remplacer la fonction L par une constante dans toutes les expressions suivantes. Nous supposons quand même $L(n) > 0$ pour tout n , afin que les processus de renouvellement soient apériodiques.

Le paramètre α , en revanche, va jouer un rôle important sur le comportement de notre modèle. On remarque par exemple :

$$\begin{aligned} \alpha < 1 &\Rightarrow \mathbf{E}\tau_1 = \infty, \\ \alpha > 1 &\Rightarrow \mathbf{E}\tau_1 < \infty, \end{aligned}$$

(en revanche, pour $\alpha = 1$, ce sont les détails de L qui déterminent si cette espérance est finie ou non).

1.2 Modèle PS homogène

À présent, nous allons définir le modèle PS homogène. On considère un processus de renouvellement τ de loi \mathbf{P} donnée par (1.1), et on fixe N la longueur du système. On pose $h \in \mathbb{R}$ l'énergie d'interaction liée à un point d'accroche. Nous allons poser une nouvelle loi de probabilité $\mathbf{P}_N^{c,h}$ sur les processus τ , définie par une densité par rapport à \mathbf{P} :

$$\frac{d\mathbf{P}_N^{c,h}}{d\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_N^{c,h}} \exp\left(\sum_{n=1}^N h 1_{n \in \tau}\right) 1_{N \in \tau}, \quad (1.2)$$

où la constante de renormalisation $Z_N^{c,h}$, appelée *fonction de partition contrainte*, est définie par :

$$Z_N^{c,h} := \mathbf{E} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^N h 1_{n \in \tau}\right) 1_{N \in \tau} \right]. \quad (1.3)$$

La mesure $\mathbf{P}_N^{c,h}$ est restreinte aux processus ayant un point d'accroche à l'extrémité N (d'où le terme "contrainte"). On définit de la même manière la mesure $\mathbf{P}_N^{f,h}$ dite *libre* :

$$\frac{d\mathbf{P}_N^{f,h}}{d\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_N^{f,h}} \exp\left(\sum_{n=1}^N h 1_{n \in \tau}\right), \quad (1.4)$$

et la fonction de partition *libre* $Z_N^{f,h}$:

$$Z_N^{f,h} := \mathbf{E} \left[\exp \left(\sum_{n=1}^N h 1_{n \in \tau} \right) \right]. \quad (1.5)$$

Nous écrirons $\mathbf{P}_N^{a,h}$ et $Z_N^{a,h}$, où $a \in \{c, f\}$ quand un énoncé est vrai aussi bien dans le cas contraint que dans le cas libre.

Une grandeur importante dans la compréhension du modèle est le taux de croissance exponentielle de $Z_N^{a,h}$ (qui ne dépend pas du choix $a \in \{c, f\}$) :

$$F(0, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{a,h}. \quad (1.6)$$

Cette grandeur s'appelle *l'énergie libre* du système (la notation avec 0 sera justifiée plus tard). Son étude (réalisée dans [13] par exemple) permet de démontrer les propriétés suivantes :

Proposition 1.3 (Propriétés de l'énergie libre).

La limite $F(0, h)$ est bien définie pour tout $h \in \mathbb{R}$. De plus, la fonction $h \mapsto F(0, h)$ est croissante, convexe, nulle sur \mathbb{R}_- , et strictement positive sur \mathbb{R}_+^ .*

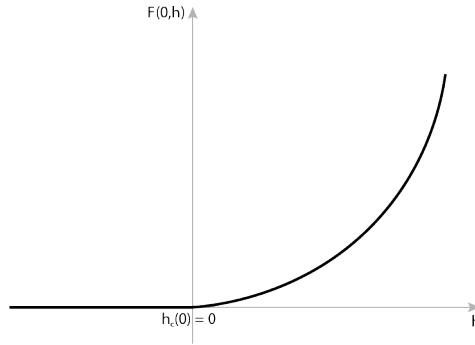


FIGURE 2 – Énergie libre du modèle PS

Démonstration. D'abord, on a $Z_N^{c,0} = 1$ pour tout $N \in \mathbb{N}$; donc $F(0, 0) = 0$. Pour tout $h > 0$, posons $b = b(h)$ l'unique solution de l'équation :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-bn + h) K(n) = 1, \quad (1.7)$$

(cette solution existe car la fonction $b \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \exp(-bn + h) K(n)$ est continue, vaut $e^h > 0$ en 0, décroît strictement sur \mathbb{R}_+ et tend vers $-\infty$ pour $n \rightarrow \infty$). On a alors $b(h) > 0$. Posons $K_h(n) := \exp(-b(h)n + h) K(n)$: c'est une loi de probabilité sur \mathbb{N} . Notons \mathbf{P}_h la loi d'un processus de renouvellement τ dont la loi du premier point τ_1 est donnée par la fonction K_h . On a alors avec cette notation :

$$Z_N^{c,h} = \exp(bN) \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{j=1}^n \ell_j = N}} \prod_{j=1}^n K_h(\ell_j) = \exp(bN) \mathbf{P}_h(N \in \tau). \quad (1.8)$$

De plus, pour tout $h > 0$, le Théorème de Renouveaulement (voir [3]) donne la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_h(N \in \tau) = \frac{1}{\mathbf{E}_h[\tau_1]} > 0. \quad (1.9)$$

On a alors $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \log \mathbf{P}_h(N \in \tau) = 0$; on peut donc poser pour tout $h > 0$ la limite :

$$F(0, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{c,h} = b(h) \quad (1.10)$$

Pour $h < 0$ posons $b(h) := 0$ et $K_h(n) := e^h K(n)$, $K_h(\infty) := 1 - e^h$. Soit \mathbf{P}_h la loi d'un processus de renouvellement τ dont la loi du premier point τ_1 est donnée par la fonction K_h (ce processus termine presque sûrement).

On a toujours la relation (1.8). Un calcul d'équivalent effectué dans [13] donne comme précédemment $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \log \mathbf{P}_h(N \in \tau) = 0$; on en déduit donc pour tout $h < 0$:

$$F(0, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N^{c,h} = 0. \quad (1.11)$$

De plus, on a un encadrement $Z_N^{c,h} \leq Z_N^{f,h} \leq cN Z_N^{c,h}$ où $c > 0$; donc on peut remplacer c par f dans toutes les limites.

Enfin, les fonctions $h \mapsto \log Z_N^{a,h}$ sont convexes et croissantes pour tout N ; donc $F(0, h)$ est également convexe et croissante. □

On pose $h_c(0) := \inf\{h \in \mathbb{R}; F(0, h) > 0\} = 0$, qu'on appelle "point critique" du modèle. On peut montrer que la fonction F est analytique en tout point sauf en $h_c(0)$. Un tel défaut d'analyticité dans l'énergie libre est appelé une *transition de phase*. Nous appellerons celle-ci la *transition d'accrochage* du modèle PS.

Remarque 1.4. Ce phénomène est intéressant à étudier, car l'énergie libre fournit beaucoup de résultats macroscopiques sur le système : par exemple, F est dérivable partout sauf en $h_c(0)$ (car elle est analytique), et le calcul de la dérivée donne :

$$\partial_h F(0, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}_N^{c,h} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1_{n \in \tau} \right]. \quad (1.12)$$

Le terme de droite peut s'interpréter comme la *densité* de τ dans \mathbb{N} . En particulier, l'étude de F donne que cette densité est nulle sur $(-\infty, h_c(0)]$ (ce qui signifie que macroscopiquement, la molécule n'est pas accrochée à l'objet fixe), et strictement positive sur $(h_c(0), \infty)$ (donc que la molécule est accrochée à l'objet avec une densité strictement positive).

Le comportement de $F(0, h)$ autour de $h_c(0)$ est connu, grâce au théorème suivant (voir [12] pour la preuve) :

Théorème 1.5 (Comportement critique du modèle PS, cas homogène).

Il existe une constante c_α , dépendant de α , et une fonction à variation lente \tilde{L} telles que :

$$F(0, h_c(0) + \delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} \begin{cases} c_\alpha \delta & \text{si } \alpha > 1, \\ c_\alpha \tilde{L}(1/\delta) \delta^{1/\alpha} & \text{si } \alpha < 1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Ce qui peut se résumer par : $F(0, h_c(0) + \delta)$ se comporte comme $\delta^{1 \vee (1/\alpha)}$ pour $\delta \searrow 0$, au produit près par une fonction à variation lente. Le nombre $1 \vee (1/\alpha)$ s'appelle *exposant critique* de la transition de phase.

À présent, nous allons introduire le modèle désordonné, et étudier l'impact du désordre sur la transition d'accrochage et le comportement critique de l'énergie libre.

1.3 Modèle PS désordonné, pertinence du désordre

Prenons une suite de variables aléatoires réelles $\{\omega_n\}_{n \geq 1}$, supposées iid, centrées et de variance 1, que nous appellerons le *désordre* ; et remplaçons l'énergie d'interaction homogène h (qui ne dépendait pas du point d'accroche) par la variable $(\beta\omega_n + h)$ au n -ième emplacement, où $\beta > 0$, $h \in \mathbb{R}$. Nous noterons par \mathbb{P} et \mathbb{E} les mesures de probabilité et espérances liées à la variable aléatoire $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, nous supposons ω sous \mathbb{P} indépendant de τ sous \mathbf{P} ; et pour que nos différents objets soient bien définis, nous admettrons que ω_n admet des moments exponentiels $\mathbb{E}[\exp(\beta\omega_n)]$ finis, au moins pour β proche de 0.

Nous allons introduire comme précédemment, à ω fixé, une nouvelle mesure de probabilité $\mathbf{P}_{N,\omega}^{a,\beta,h}$, définie par une densité par rapport à \mathbf{P} :

$$\frac{d\mathbf{P}_{N,\omega}^{a,\beta,h}}{d\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,\omega}^{a,\beta,h}} \exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h)1_{n \in \tau}\right) \eta_N^a(\tau), \quad (1.14)$$

où $\eta_N^c(\tau) := 1_{N \in \tau}$, $\eta_N^f(\tau) := 1$, et $Z_{N,\omega}^{a,\beta,h}$ est définie par :

$$Z_{N,\omega}^{a,\beta,h} := \mathbf{E} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h)1_{n \in \tau}\right) \eta_N^a(\tau) \right]. \quad (1.15)$$

Nous introduisons encore l'énergie libre du système :

$$F(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,\omega}^{a,\beta,h}. \quad (1.16)$$

Cette limite est au sens p.s. et au sens $L^1(\mathbb{P})$, et ne dépend pas de $a \in \{c, f\}$. Elle s'obtient en remarquant que la suite $\left(\log Z_{N,\omega}^{a,\beta,h}\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est sur-additive au sens ergodique, et en utilisant les théorèmes ergodiques de Kingman (voir [16]).

L'étude de la fonction F donne comme précédemment qu'elle est convexe, positive, croissante en h ; et aussi qu'elle est croissante en β . Comme dans le cadre homogène, on regarde l'espace des paramètres $(\beta, h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, et on définit les régimes *localisé* \mathcal{L} et *délocalisé* \mathcal{D} du système :

$$\mathcal{L} := \{(\beta, h) : F(\beta, h) > 0\} \text{ et } \mathcal{D} := \{(\beta, h) : F(\beta, h) = 0\}. \quad (1.17)$$

On peut alors montrer qu'il existe une fonction $h_c(\beta)$, qui est décroissante concave, telle que :

$$\mathcal{L} := \{(\beta, h) : h > h_c(\beta)\} \text{ et } \mathcal{D} := \{(\beta, h) : h \leq h_c(\beta)\}. \quad (1.18)$$

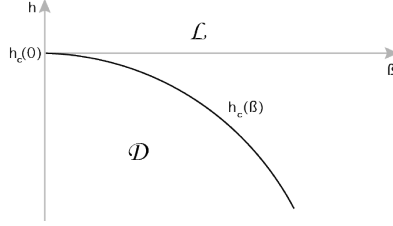


FIGURE 3 – Espace des paramètres - régimes localisé et délocalisé

À β fixé, la fonction $h \mapsto F(\beta, h)$ est analytique en tout point sauf en $h_c(\beta)$. Nous avons donc une transition de phase, comme dans le cadre homogène.

Nous voudrions à présent connaître le comportement du modèle désordonné au voisinage du point critique à β fixé. En particulier, si ce comportement est le même que pour le modèle homogène. L'idée du mathématicien Harris est de regarder l'exposant critique, et de dire que le désordre est *non-pertinent* si celui-ci est le même que dans le modèle PS homogène, et *pertinent* si l'exposant critique désordonné est différent.

La question est complètement résolue pour ce modèle, et le résultat est donné par le théorème suivant (démontré dans [15]) :

Théorème 1.6 (Exposant critique du modèle PS désordonné).

Soit τ un processus de renouvellement dont la loi est donnée par (1.1), pour $\alpha > 0$ et L une fonction à variation lente. Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les hypothèses énoncées plus haut. Soit $F(\beta, h)$ l'énergie libre du modèle PS désordonné définie comme plus haut. On a les résultats suivants :

— Pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante c_α telle que pour tout h et β , on a :

$$0 \leq F(\beta, h) \leq c_\alpha \frac{(h - h_c(\beta))^2}{\beta^2}, \quad (1.19)$$

donc l'exposant critique du modèle PS désordonné est toujours supérieur ou égal à 2. En particulier, si $\alpha > 1/2$, il est plus grand que $\frac{1}{\alpha} \vee 1$, l'exposant critique homogène.

— Si $\alpha < 1/2$, on a plus précisément pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$:

$$\log F(\beta, h_c(\beta) + \delta) \stackrel{\delta \searrow 0}{\sim} \log F(0, h_c(0) + \delta), \quad (1.20)$$

donc l'exposant critique du modèle PS désordonné pour $\alpha < 1/2$ est exactement $\frac{1}{\alpha} > 2$.

En conclusion, si $\alpha < 1/2$, le désordre est *non-pertinent* au sens de Harris. Si $\alpha > 1/2$, il est *pertinent*. Le cas $\alpha = 1/2$ est plus marginal, et nécessite d'étudier la loi de τ plus en détail ; nous ne l'expliquerons pas ici.

La transition d'accrochage du modèle de Poland-Scheraga (PS), et l'influence du désordre sur celle-ci, sont donc assez bien comprises aujourd'hui. Nous allons maintenant présenter le modèle généralisé (gPS), pour lequel la même question n'est pas complètement résolue à ce jour.

2 Modèle de Poland-Scheraga généralisé (gPS)

2.1 Définition du modèle, homogène et désordonné

Plutôt que de regarder les points d'accroche d'une molécule à un objet fixe, regardons deux molécules (par exemple, deux brins d'une molécule d'ADN), de longueur respectives N et M , s'accrochant entre elles de manière asymétrique. Les points d'accroche des deux polymères entre eux sont donnés par un processus de renouvellement dans \mathbb{N}^2 noté $\tau = (\tau^1, \tau^2)$, restreint au domaine $D_{N,M} := [0, N] \times [0, M]$, où τ^1 est la suite des points d'accroche du premier polymère (qui sont dans $[0, N]$), et idem pour τ^2 et le second polymère (dans $[0, M]$).

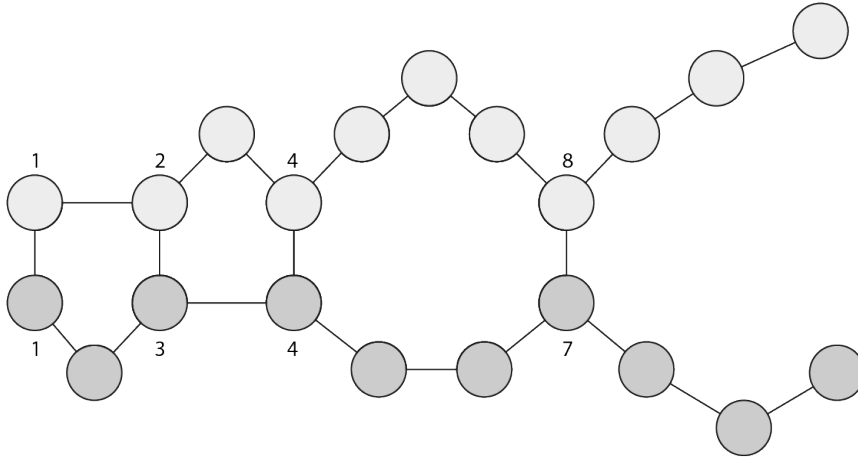


FIGURE 4 – Réalisation d'un modèle de Poland-Scheraga généralisé. Les points d'accroche de la première molécule (τ^1) sont exactement 1, 2, 4 et 8; et ceux de la seconde molécule (τ^2) sont 1, 3, 4 et 7.

Nous noterons \mathbf{P} la loi de τ : c'est la loi des points d'accroche sans énergie d'interaction. Comme précédemment, la loi d'un processus de renouvellement τ dans \mathbb{N}^2 est déterminée par la loi de sa première valeur. Posons pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $K(n, m) := \mathbf{P}(\tau_1 = (n, m))$. Nous considérerons une version légèrement simplifiée du modèle par rapport à [14], en nous restreignant au cas $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^2$ (c'est-à-dire que les deux projections τ^1 et τ^2 ont la même loi), et aux fonctions K s'écrivant $K(n, m) = K(n + m)$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, où $K : \{2, 3, \dots\} \rightarrow [0, \infty)$ est de la forme :

$$K(n) := \frac{L(n)}{n^{2+\alpha}}, \quad (2.1)$$

avec L une fonction à variation lente, et $\alpha > 0$.

Nous allons introduire des nouvelles lois de probabilité comme précédemment, pour faire apparaître les énergies d'interaction. Soient $h \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$, $a \in \{c, f\}$ et $(\omega_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires iid, centrées, de variance 1 et ayant des moments exponentiels finis.

Comme dans les paragraphes précédents, nous posons à $(\omega_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ fixé, la loi de pro-

babilité $\mathbf{P}_{N,M,\omega}^{a,\beta,h}$ définie par la densité :

$$\frac{d\mathbf{P}_{N,M,\omega}^{a,\beta,h}}{d\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,M,\omega}^{a,\beta,h}} \exp\left(\sum_{n \in [1,N] \times [1,M]} (\beta\omega_n + h) 1_{n \in \tau}\right) \eta_{N,M}^a(\tau), \quad (2.2)$$

avec la fonction de partition :

$$Z_{N,M,\omega}^{a,\beta,h} := \mathbf{E} \left[\exp\left(\sum_{n \in [1,N] \times [1,M]} (\beta\omega_n + h) 1_{n \in \tau}\right) \eta_{N,M}^a(\tau) \right], \quad (2.3)$$

où $\eta_{N,M}^f(\tau) := 1$, et $\eta_{N,M}^c(\tau) := 1_{(N,M) \in \tau}$.

Si on prend $\beta = 0$, alors ω n'apparaît pas dans ces expressions, $Z_{N,M,\omega}^{a,0,h}$ est une constante, et on obtient le modèle gPS homogène. Si $\beta > 0$, on obtient le modèle gPS désordonné.

2.2 Transition d'accrochage et pertinence du désordre

Nous pouvons à présent définir l'énergie libre du modèle. Son existence est donnée par le théorème suivant, démontré dans [4] :

Théorème 2.1 (Existence de l'énergie libre dans le modèle gPS désordonné).

Soit $\gamma > 0$, et soit une suite $(N, M) = (N_n, M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n/N_n = \gamma$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} N_n = \infty$. Alors on a l'existence de la limite :

$$\begin{aligned} F_\gamma(\beta, h) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \mathbb{E} \left[\log Z_{N_n, M_n, \omega}^{f,\beta,h} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \mathbb{E} \left[\log Z_{N_n, M_n, \omega}^{c,\beta,h} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \log Z_{N_n, M_n, \omega}^{f,\beta,h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \log Z_{N_n, M_n, \omega}^{c,\beta,h}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où les deux dernières limites sont à la fois au sens \mathbb{P} -ps et $L^1(\mathbb{P})$. Cette limite ne dépend pas du choix $(N, M) = (N_n, M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais seulement de $\gamma > 0$.

De plus, la fonction F_γ est positive, convexe et croissante en β et en h .

Nous supposons à présent $\gamma \geq 1$, quitte à échanger les deux coordonnées.

Ce théorème nous permet, comme pour le modèle PS désordonné, de définir un paramètre critique pour tout $\beta \geq 0$:

$$h_{c,\gamma}(\beta) := \inf\{h ; F_\gamma(\beta, h) > 0\} = \sup\{h ; F_\gamma(\beta, h) = 0\}, \quad (2.5)$$

en lequel la fonction $h \mapsto F_\gamma(\beta, h)$ n'est pas analytique : c'est la *transition d'accrochage* du modèle gPS. Il est aussi démontré dans [14] que pour le modèle gPS homogène (c'est à dire $\beta = 0$), on a $h_{c,\gamma}(0) = 0$ pour tout γ .

La question qui se pose comme précédemment, est celle du comportement du modèle au voisinage de la transition d'accrochage. Pour le modèle homogène, celui-ci est connu, et est énoncé et démontré dans [14] :

Théorème 2.2 (Comportement critique du modèle gPS homogène).

Pour tout $\gamma \geq 1$ et $\alpha > 0$, il existe $h'_\gamma \in (0, \infty]$ tel que $F_\gamma(0, \cdot)$ est analytique sur $(-\infty, 0) \cup (0, h'_\gamma)$. De plus, on a les équivalents suivants :

- Si $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 K(n) < \infty$ (par exemple si $\alpha > 1$), alors il existe $c > 0$, qui ne dépend pas de γ , tel que $F_{\gamma}(0, h) \sim ch$ pour $h \searrow 0$.
- Si $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 K(n) = \infty$ (par exemple si $0 < \alpha < 1$), alors il existe $c_{\alpha, \gamma} \geq 1$ et $L_{\alpha}(\cdot)$ une fonction à variation lente, tels que $F_{\gamma}(0, h) \sim c_{\alpha, \gamma} L_{\alpha}(1/h) h^{1/\alpha}$ pour $h \searrow 0$.

On retrouve un exposant critique $1 \vee \frac{1}{\alpha}$, exactement comme dans le modèle PS. Pour le modèle gPS désordonné, le théorème suivant est démontré dans [4] :

Théorème 2.3 ((Non-)pertinence du désordre dans le modèle gPS).

Soit τ un processus de renouvellement défini comme dans (2.1), avec $\alpha > 0$, et soient $F_{\gamma}(\beta, h)$ et $h_{c, \gamma}(\beta)$ l'énergie libre et le paramètre critique du modèle gPS désordonné, défini à partir de τ et de $\omega := (\omega_{n, m})_{n, m \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires iid centrées, de variance 1 et ayant des moments exponentiels finis. On a les résultats suivants :

- Si $\alpha < 1$, alors il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $\beta < \beta_0$, on a :

$$\lim_{h \searrow h_{c, \gamma}(\beta)} \frac{\log F_{\gamma}(\beta, h)}{\log(h - h_{c, \gamma}(\beta))} = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.6)$$

qui est le même exposant critique que dans le modèle gPS homogène.

- Si $\alpha > 1$, alors il existe $\beta_0 > 0$ tel que pour tout $\beta < \beta_0$, on a :

$$\lim_{h \searrow h_{c, \gamma}(\beta)} \frac{\log F_{\gamma}(\beta, h)}{\log(h - h_{c, \gamma}(\beta))} > 1, \quad (2.7)$$

donc l'exposant critique est plus grand que celui du modèle gPS homogène.

Ainsi, le désordre est *non-pertinent* au sens de Harris pour $\alpha < 1$, et pertinent pour $\alpha > 1$. Encore une fois, le cas $\alpha = 1$ est marginal et dépend plus finement de la loi de τ .

Le modèle gPS est donc lui aussi résolu. Cependant, l'hypothèse $(\omega_{n, m})_{n, m \in \mathbb{N}}$ indépendants est assez contraignante pour les systèmes modélisés. Une hypothèse plus réaliste et intéressante serait $\omega_{n, m} := f(\hat{\omega}_n, \bar{\omega}_m)$, où $(\hat{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\bar{\omega}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sont des variables iid. Sous cette hypothèse, l'énergie d'une interaction est une fonction des deux bases accrochées, plutôt que d'être indépendante dès qu'une des deux bases change. Notamment, on peut modéliser dans cette hypothèse des interactions de spin (si $\hat{\omega}$ et $\bar{\omega}$ sont à valeur dans $\{-1, 1\}$, et $f(x, y) := xy$), ou des potentiels ($f(x, y) = x + y$).

Pour ces modèles gPS avec dépendances, il n'y a pas aujourd'hui de preuve générale de la (non-)pertinence du désordre en fonction de α . Cependant, le mémoire de M2 présent plus loin dans ce document met en évidence un indicateur de pertinence ou non-pertinence du désordre; et conjecture que, contrairement aux modèles PS et gPS avec désordre iid, la loi de ω et l'expression de f sont déterminants. Pour certaines lois (comme le modèle de spins), la frontière entre pertinence et non-pertinence serait en $\alpha = 1$, comme le modèle gPS iid; en revanche pour d'autres lois (comme les modèles où les $\omega_{n, m}$ ont des corrélations élevées), cette frontière serait en $\alpha = 1/2$.

Si ces conjectures sont démontrées, cela retire toute possibilité de résultat universel sur le modèle gPS avec dépendances; et ouvre la question des frontières entre pertinence et non-pertinence possibles ($\alpha = 1/2, 1, \dots$), et des critères sur les lois de désordre qui déterminent cette frontière.

Références

- [1] K.S. ALEXANDER : The effect of disorder on polymer depinning transitions. *Communication in Mathematical Physics*, 279(1):117–146, 2008.
- [2] K.S. ALEXANDER et N. ZYGOURAS : Quenched and annealed critical points in polymer pinning models. arXiv :0805.1708 [math.PR].
- [3] S. ASMUSSEN : *Applied probability and queues*, volume 51 de *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, seconde édition, 2003.
- [4] Q. BERGER, G. GIACOMIN et M. KHATIB : Disorder and denaturation transition in the generalized Poland-Scheraga model. Pas encore publié.
- [5] Q. BERGER, G. GIACOMIN et M. KHATIB : DNA melting structures in the generalized Poland-Scheraga model, 2017. arXiv :1703.10343.
- [6] Q. BERGER et H. LACOIN : Pinning on a defect line : characterization of marginal disorder relevance and sharp asymptotics for the critical point shift. *Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu*, Firstview:1–42, 2016.
- [7] M. BIRKNER et R. SUN : Annealed vs quenched critical points for a random walk pinning model. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 46(2):414–441, 2010.
- [8] F. CARAVENNA, R. SUN et N. ZYGOURAS : Universality in marginally relevant disordered systems. Pas encore publié.
- [9] F. CARAVENNA, R. SUN et N. ZYGOURAS : Polynomial chaos and scaling limits of disordered systems. *European Mathematical Society*, 19(1):1–65, 2017.
- [10] B. DERRIDA, G. GIACOMIN, H. LACOIN et F.L. TONINELLI : Fractionnal moment bounds and disorder relevance for pinning models. *Communication in Mathematical Physics*, 287(3):867–887, 2009.
- [11] R.A. DONEY : One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. *Probability Theory and Related Fields*, 107:451–465, 1997.
- [12] G. GIACOMIN : *Random Polymer Models*. Imperial College Press, 2007.
- [13] G. GIACOMIN : Renewal sequences, disordered potentials and pinning phenomena, 2008.
- [14] G. GIACOMIN et M. KHATIB : Generalized Poland-Scheraga denaturation model and two-dimensional renewal processes, 2015.
- [15] G. GIACOMIN et F.L. TONINELLI : Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Communication in Mathematical Physics*, 266:1–16, 2006.
- [16] J.F.C. KINGMAN : Subadditive ergodic theory. *The Annals of Probability*, 1(6):883–909, 1973.
- [17] F.L. TONINELLI : A replica-coupling approach to disordered pinning models. *Communication in Mathematical Physics*, 280:389–401, 2008.
- [18] J.A. WILLIAMSON : Random walks and Riesz kernels. *Pacific Journal of mathematics*, 25(2):393–415, 1968.