Introduction au Domaine de Recherche
Points Épais du Champ Libre Gaussien et Points Fréquents de la Marche Aléatoire Planaire

Antoine Jego
sous la supervision de Nathanaël Berestycki

2 octobre 2017

Dans ce mémoire nous rentrerons un peu dans le domaine du Champ Libre Gaussien. Nous nous intéresserons aux grandes valeurs prises par ce champ dans le cas de la dimension 2, puis nous ferons une étude similaire avec les points fréquemment visités par la marche aléatoire planaire et essaierons d'exposer quelques similarités entre les deux problèmes.

Table des matières

1 Champ Libre Gaussien : définition et premières propriétés

Dans cette section nous introduirons le champ libre gaussien, que nous pourrons abrégé par GFF provenant de l'anglais Gaussian Free Field, qui n'est rien d'autre que le vecteur gaussien centré dont la matrice de covariance est la fonction de Green. Nous évoquerons quelques unes de ses propriétés, notamment son comportement asymptotique qui nous amènera à étudier uniquement le cas de la dimension 2.

1.1 Fonction de Green et Champ Libre Gaussien

Nous pouvons définir le champ libre gaussien sur n'importe quel graphe, muni de poids sur les arêtes, mais nous nous restreindrons au cas particulier du graphe $V_N := \{-N, \dots, N\}^d$, muni des arêtes sous-jacente au réseau carré $\mathbb{Z}^d$, avec des poids uniformes où d désigne la dimension. Nous introduisons les notations suivantes :

Notations $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire symétrique sur le graphe $\mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) désigne sa loi (resp. l'espérance associée) partant du sommet x : notamment, $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$. Nous introduisons le premier temps de sortie de V_N :

$$\tau_N := \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \notin V_N\}.$$

Fonction de Green Pour x et y dans V_N, nous noterons $G_N(x,y)$ la fonction de Green en x et y. C'est le temps moyen passé par la marche en y, partant de x, avant que celle ci ne sorte de V_N :

$$G_N(x,y) := \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\tau_N-1} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right].$$

Dans la littérature, cette fonction peut être renormalisée par le nombre de voisins $2d$. Cette fonction possède tous les bienfaits nécessaires (symétrique positive) à une matrice de covariance d'un vecteur gaussien : le **champ libre gaussien**. Nous noterons :

$$\phi_N \sim \mathcal{N}(0, G_N).$$

Les sections suivantes sont en quelle sorte dévouées à montrer à quel point cet objet est intéressant.

1.2 Comportement Asymptotique

Nous sommes intéressés par le comportement asymptotique de ϕ_N lorsque N tend vers l'infini. Pour comprendre cela, il faut tout d'abord avoir une idée de la manière dont la fonction de Green G_N évolue lorsque N tend vers l'infini. Cela dépend de la dimension et nous avons de manière informelle (à constante multiplicative près, si x n'est pas trop proche du bord de $V_N, \dots$) :

$$G_N(x,x) \sim \begin{cases} N \text{ si } d = 1 \\ \log N \text{ si } d = 2 \\ 1 \text{ si } d \geq 3 \end{cases}$$

Ces estimations reflètent les différents comportement de la marche aléatoire en fonction de la dimension : plus la dimension augmente et plus la marche a tendance a devenir transiente (récurrente pour $d = 1$ et 2 et transiente pour $d \geq 3$), i.e. plus la dimension augmente et plus la marche aura de chance de se perdre et de ne jamais revenir à son point de départ.

Ces estimations nous permettent également de deviner le facteur multiplicatif nécessaire pour renormaliser le GFF et on peut montrer :

Proposition 1. *En posant $\phi_N(x) = 0$ si $x \notin V_N$, nous avons :*
• *Pour $d = 1$, le processus $\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\phi_N(\lfloor tN \rfloor) : t \in [-1,1]\right\}$ converge en loi vers un pont brownien standard sur $[-1,1]$, i.e. un mouvement brownien standard issu de 0 au temps -1 et conditionné à revenir en 0 au temps 1.*
• *Pour $d \geq 3$, ϕ_N converge en loi vers un processus gaussien centré de fonction de covariance*

$$G^{\mathbb{Z}^d}(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=y\}}\right].$$

La preuve est assez simple : il suffit de contrôler les covariances.

Quelques remarques : Nous avons ici affaire à deux types de limites différentes. La première nécessite une renormalisation en amplitude et en temps (limite d'échelle) alors que la deuxième ne nécessite aucune renormalisation (limite thermodynamique). La deuxième remarque est que la convergence en loi sous entend une métrique sur les processus. Nous ne rentrerons pas dans ces détails techniques et laisserons le lecteur se faire sa propre image de cette notion de limite.

Enfin, on voit de nouveau la transience de la marche aléatoire pour $d \geq 3$ intervenir : dans ce cas, on peut définir un champ libre gaussien sur $\mathbb{Z}^d$ en entier (l'objet limite de la proposition précédente), ce que nous ne pouvons pas faire dans les cas récurrents.

Cette proposition montre que les cas des dimensions 1 et plus grande que 3 sont très bien comprises et relativement simples. Nous allons donc dans la suite nous restreindre au cas de la dimension 2. D'après l'estimation grossière mentionnée plus haut de la fonction de Green, nous pourrions espérer trouver une limite au GFF lorsque nous le renormalisons par $1/\sqrt{\log N}$. Cette renormalisation ne donne rien d'intéressant puisqu'on peut montrer que :

$$\frac{1}{\log N} G_N(\lfloor tN \rfloor, \lfloor sN \rfloor) \xrightarrow[N \to \infty]{} \begin{cases} c(t) > 0 \text{ si } s = t \\ 0 \text{ si } s \neq t \end{cases}$$

En effet, des estimations très précises ont été faites dans [Law96] et montrent :

Proposition 2. *En dimension 2, pour $l \in (0,1)$, avec la convention que $\log 0 = 0$, il existe des constantes $c > 0$ (indépendante de l) et $c(l) > 0$ telles que :*

$$\forall x, y \in V_N, G_N(x,y) \leq \frac{2}{\pi}\left(\log N - \log|x-y|\right) + c,$$
$$\forall x, y \in V_{lN}, G_N(x,y) \geq \frac{2}{\pi}\left(\log N - \log|x-y|\right) - c(l).$$

Remarque : Nous ne pouvons pas espérer avoir une minoration uniforme sur l'intégralité de V_N. Par exemple, nous ne pouvons pas minorer $G_N(x,x)$ par $\frac{2}{\pi}\log N$ si x est trop proche du bord : la marche aurait tendance à sortir de V_N trop vite.

Il ne faut en fait pas renormaliser en amplitude et on peut montrer que $\left\{\phi_N(\lfloor sN \rfloor), s \in \mathbb{R}^2\right\}$ converge en loi vers un objet appelé champ libre gaussien continu. Ce n'est pas une fonction aléatoire comme le mouvement brownien puisqu'il ne peut pas être défini ponctuellement (observer que la structure de covariance explose logarithmiquement sur la diagonale). On peut voir cet objet comme étant une distribution aléatoire, une généralisation du mouvement brownien à un espace des temps de dimension 2. Nous ne rentrerons pas dans ce sujet et renvoyons à [Ber16] pour une introduction au champ libre gaussien continu.

2 Valeur Maximale et Points Épais du Champ Libre Gaussien en Dimension 2

Dans cette section, nous nous intéresserons aux valeurs exceptionnellement grandes prises par le GFF : dans la première sous partie nous regarderons la plus grande valeur prise par le GFF, et les valeurs au dessus d'une fraction du maximum dans la seconde sous partie. Nous évoquerons le fait que le GFF est un champ maximal (ce que nous définirons) et exposerons la structure multifractale naturellement présente. Comme mentionné précédemment, nous nous intéresserons dorénavant exclusivement au cas de la dimension 2.

2.1 Valeur Maximale

La première question que nous nous posons est de connaître le comportement asymptotique du supremum du GFF, i.e. de

$$\sup\left\{\phi_N(x), x \in V_N\right\}$$

où ϕ_N désigne comme dans la partie précédente le GFF sur $V_N = \{-N, \dots, N\}^2$. Dans l'article [BDG01] il a été montré :

Theorem 1.

$$\frac{\sup_{x \in V_N} \phi_N(x)}{\log N} \text{ converge en probabilité vers } 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

L'objectif de cette section n'est pas vraiment d'expliquer la preuve de ce théorème, mais le résultat en lui-même.

Commençons par un petit exercice : soit $\psi_N = (\psi_N(x))_{x \in V_N}$ un vecteur gaussien centré composé de $(2N+1)^2$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance $\frac{2}{\pi} \log N$. Nous avons en quelque sorte simplifier la situation du GFF ϕ_N en négligeant la dépendance et en remplaçant les variances par leur estimées de la proposition 2. Le vrai coût est de ne pas tenir compte de la dépendance. Que pouvons-nous dire du $\sup_{x \in V_N} \psi_N(x)$? Eh bien nous allons montrer que ψ_N vérifie également le théorème 1 :

Majoration Dans ce paragraphe, nous allons montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x \in V_N} \psi_N(x) \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Nous verrons que cette majoration simple ne nécessite pas de connaître la structure de covariance de ψ_N (ici l'indépendance des variables) mais seulement de connaître une majoration sur les variances. Cela reflète un aspect plus général que nous mentionnerons plus bas (théorème 2) et cela prouve ainsi également la majoration, qui est le sens facile, dans le théorème 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{x \in V_N} \psi_N(x) \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N\right) &\leq \sum_{x \in V_N} \mathbb{P}\left(\psi_N(x) \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \log N\right) \text{ (union bound)} \\
&= (2N+1)^2 \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \geq 2\sqrt{\log N}\right) \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{\log N}} \left(2 + \frac{1}{N}\right)^2,
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé la majoration dans l'estimation suivante :

$$\forall x > 0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{1}$$

Minoration Cette fois-ci, nous allons montrer la minoration qui utilise de manière cruciale l'indépendance dès la première ligne. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{x \in V_N} \psi_N(x) \leq \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \varepsilon\right) \log N\right) &= \prod_{x \in V_N} \mathbb{P}\left(\psi_N(x) \leq \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \varepsilon\right) \log N\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \left(2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\varepsilon\right) \sqrt{\log N}\right)^{(2N+1)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la minoration dans l'équation (2.1), on trouve bien que la quantité de gauche tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Cet exercice est instructif puisqu'il nous montre que malgré la dépendance naturellement présente dans le GFF ϕ_N, le supremum se comporte asymptotiquement comme si les variables étaient indépendantes. Cela peut à première vue paraître légèrement surprenant et le théorème suivant (prouvé dans [Cha05] par exemple) le confirme :

Theorem 2. *(Sudakov Fernique Inequality) Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux vecteurs gaussiens centrés indexés par un ensemble I. On suppose que pour tout $i \neq j$, $\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[|Y_i - Y_j|^2\right]$. Alors $\mathbb{E}\left[\sup_{i\in I} X_i\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{i\in I} Y_i\right]$.*

Remarque : Une autre version de ce théorème existe, appelée lemme de Slepian. En rajoutant la condition que les variances soient égales, i.e. que $\forall i \in I, \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathbb{E}\left[Y_i^2\right]$, on obtient une conclusion plus forte : $\sup_{i\in I} X_i$ est dominé stochastiquement par $\sup_{i\in I} Y_i$.

En réécrivant $\mathbb{E}\left[|X_i - X_j|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] + \mathbb{E}\left[X_j^2\right] - 2\mathbb{E}\left[X_i X_j\right]$, nous voyons que plus les variances seront grandes et plus les variables aléatoires seront décorrélées, plus le supremum du vecteur gaussien sera grand (ici au sens de l'espérance). Ce théorème montre ainsi que pour maximiser le supremum d'un vecteur gaussien, à ensemble d'indices fixés et à variance majorée par $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N$, il faut prendre le vecteur gaussien composé de variable aléatoires indépendantes et de variance $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N$. Cela justifie l'emploi du terme "extrême" dans [Cha14] pour qualifier les vecteurs gaussiens centrés, à variance majorée, dont le supremum s'approche de l'équivalent où les variables sont décorrélées. Le théorème 1 nous dit ainsi que le GFF fait partie de cette famille de champs très particulière : dans le chapitre 8 de [Cha14], il est montré que le supremum d'un champ extrême est très concentré autour de sa valeur moyenne.

2.2 Points Épais

Dans cette sous section, nous souhaitons savoir le comportement du nombre de points épais du GFF, c'est-à-dire les points pour lesquels le GFF prend une valeur au moins aussi grande qu'une portion du supremum. On définit l'ensemble des points γ-épais, où $\gamma > 0$, par :

$$\mathcal{H}_N(\gamma) := \left\{ x \in V_N : \phi_N(x) \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma \log N \right\}.$$

Le théorème 1 montre que si $\gamma > 1$, alors la probabilité que $\mathcal{H}_N(\gamma)$ soit vide tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini. Le théorème suivant répond à la question lorsque $0 < \gamma < 1$ (voir théorème 1.3 dans [Dav06]) :

Theorem 3. *Pour tout $0 < \gamma < 1$, nous avons la convergence en probabilité suivante :*

$$\frac{\log |\mathcal{H}_N(\gamma)|}{\log N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2(1-\gamma^2).$$

Avec ce théorème nous parlons de structure multifractale : la dimension des points γ-épais dépend de γ et couvre l'intégralité du spectre de 0 à 2.

La démonstration originelle de Daviaud est une adaptation de la preuve du théorème 1 présente dans [BDG01] et suit un plan parallèle. L'article [Dav06] a également montré que les points épais sont composés par un ensemble de "pics", c'est-à-dire sachant qu'un point est épais, il y aura plus de points épais dans son voisinage que si nous n'effectuions pas de conditionnement. Ce papier s'est enfin intéressé au comportement du GFF lorsqu'on le conditionne à être positif sur l'intégralité de V_N -étude déjà initiée dans l'article [BDG01]. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails concernant ces travaux.

Une partie de mon mémoire de M2 consistait à fournir une démonstration alternative du théorème 3. Pour ce faire, je souhaitais construire une mesure aléatoire μ_γ (que l'on peut appeler mesure de Liouville) sur $[-1,1]^2$ ne chargeant que les points γ-épais. Plus précisément, une mesure non triviale vérifiant $\mu_\gamma\left(\mathcal{T}(\gamma)^c\right)=0$ presque sûrement, où

$$\mathcal{T}(\gamma) := \left\{ x\in[-1,1]^2 : \liminf_{N\to\infty} \frac{\phi_N(\lfloor Nx \rfloor)}{\log N} \geq 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\gamma \right\}.$$

Ici $\lfloor y \rfloor$ désigne le point de $\mathbb{Z}^2$ (à coordonnées entières) le plus proche de y avec une quelconque règle en cas d'ambiguïté.

Cette mesure a été construite à l'aide d'un processus d'approximation : on peut montrer que μ_γ est la limite de la suite de mesures aléatoires μ_γ^N où :

$$\mu_\gamma^N(dx) := e^{\sqrt{2\pi}\gamma\phi_N(\lfloor Nx\rfloor)-\pi\gamma^2\mathbb{E}\left[\phi_N(\lfloor Nx\rfloor)^2\right]}dx.$$

(On peut construire toutes ces mesures aléatoires sur un même espace de probabilité et montrer que la convergence est une convergence en probabilité en loi.)

Il faut voir ces mesures comme étant la mesure de Lebesgue shiftée par une certaine exponentielle du GFF. Le facteur $\mathbb{E}\left[\phi_N(\lfloor Nx\rfloor)^2\right]$ est juste un facteur de renormalisation de sorte à avoir $\mathbb{E}\left[\mu_\gamma^N(A)\right]=\mathrm{Leb}(A)$ pour tout borélien A. Avec ce shift, nous voyons que plus le GFF est grand en un point, plus ce point aura d'importance dans la mesure μ_γ. Mais en même temps, les points où le GFF est grand sont d'autant plus rares que la valeur du GFF est grande, comme le montre le théorème 3. Il y a donc un équilibre qui se forme et cela donne la relation souhaitée :

$$\mu_\gamma\left(\mathcal{T}(\gamma)^c\right)=0 \text{ p.s.}$$

On peut de plus montrer que cette mesure a une énergie finie ; pour tout $d<2(1-\gamma^2)$,

$$\mathbb{E}\left[\int_{[-1,1]^2\times[-1,1]^2} \frac{1}{|x-y|^d}\mu_\gamma(dx)\mu_\gamma(dy)\right] < \infty.$$

Cette étape n'est pas facile et repose sur une étude fine des mesures μ_γ^N. Comme la mesure est uniquement portée par $\mathcal{T}(\gamma)$, le lemme de Frostman (ou un corollaire) que nous énonçons plus bas nous permet de conclure que la dimension de Hausdorff de $\mathcal{T}(\gamma)$ est presque sûrement plus grande que $2(1-\gamma^2)$. Autrement dit, nous savons que $\mathcal{T}(\gamma)$ n'est pas "très petit" et à partir de là nous pouvons facilement obtenir à nouveau la minoration du théorème 3 qui consistait à dire qu'il y a "beaucoup" de points γ-épais.

Theorem 4. *(Lemme de Frostman) Soient A un borélien de $\mathbb{R}^n$ et $d>0$. Supposons qu'il existe une mesure μ satisfaisant $\mu(A)>0$ et*

$$\int_{A\times A} \frac{1}{|x-y|^d}\mu(dx)\mu(dy) < \infty.$$

Alors la dimension de Hausdorff de A est plus grande que d.

Mentionnons tout de même que la réciproque est vraie. Ce lemme est assez intuitif : par exemple si $A=[0,1]^m$ où $m<n$, on peut prendre μ la mesure de Lebesgue sur A qui satisfait bien l'inégalité souhaité pour n'importe quel $d<m$.

La construction d'une mesure, à l'aide des exponentielles du GFF, chargeant les points épais du GFF n'est pas nouvelle : cela a déjà été fait avec le champ libre gaussien continu. On pourra se référer à [Ber17] pour une preuve assez courte, prouvant une sorte d'universalité de la mesure construite (indépendante du processus d'approximation utilisé).

Nous conclurons cette section en mentionnant le travail de Biskup et Louidor [BL16] qui ont construit une sorte de mesure analogue à μ_γ. Leur méthode est différente et ils obtiennent même un résultat plus précis : un corollaire de la construction de leur mesure est le suivant :

Theorem 5. *Pour tout $\gamma \in (0,2)$, il existe une variable aléatoire $H(\gamma)$ vérifiant $0 < H(\gamma) < \infty$ presque sûrement telle que :*

$$\frac{\sqrt{\log N}}{N^{2(1-\gamma^2)}} |\mathcal{H}_N(\gamma)| \xrightarrow[N\to\infty]{} H(\gamma).$$

La convergence a lieu en loi et de manière L^1.

Ce résultat est beaucoup plus précis car avec [Dav06] nous en étions restés à l'estimation $|\mathcal{H}(\gamma)| = N^{2(1-\gamma^2)+o(1)}$ où $o(1) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ en probabilité. Cette fois-ci nous connaissons exactement le comportement de $o(1)$. L'article [BL16] contient bien d'autres choses. Ils travaillent par exemple avec des domaines plus généraux (jusque là nous ne parlions que du domaine $[-1,1]^2$ qui est approximé par les domaines discrets V_N/N). Leur travail est même allé jusqu'à comprendre le comportement des points où le GFF est extrême, i.e. prend une valeur très proche du supremum asymptotique $2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log N$.

3 Points Fréquents de la Marche Aléatoire Planaire

Dans cette dernière partie, nous allons parler des points fréquents de la marche aléatoire planaire et essayer de mettre en relief des résultats analogues à ceux évoqués dans la partie précédente.

Le cadre est le suivant : nous noterons encore $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire symétrique sur le réseau carré $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{P}_x$ (resp. $\mathbb{E}_x$) sa loi partant de x (resp. l'espérance associée) et τ_N le premier temps de sortie de $V_N = \{-N, \dots, N\}^2$. Nous donnons maintenant un nom au temps passé en x avant τ_N :

$$l_N(x) := \sum_{n=0}^{\tau_N - 1} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}.$$

Nous avons déjà en quelque sorte étudier l_N via son espérance qui n'est rien d'autre que la fonction de Green. Nous savons ainsi que l'espérance de $l_N(x)$ est de l'ordre de $\frac{2}{\pi}\log N$ si x n'est pas trop proche du bord. Comme pour le champ libre gaussien, nous souhaitons répondre à deux questions : quelle estimation pouvons nous avoir du supremum $\sup_{x\in V_N} l_N(x)$ et comment se comporte le nombre de points fréquents, i.e. les points x où $l_N(x)$ est au moins aussi grand qu'une portion du supremum, lorsque N tend vers l'infini ? Ces questions ont été résolues dans [DPRZ01] :

Theorem 6. *Nous avons la convergence suivante :*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sup_{x\in V_N} l_N(x)}{(\log N)^2} = \frac{4}{\pi} \quad \mathbb{P}_0 - \text{p.s.}$$

Pour tout $0 < \gamma < 1$, définissons $\mathcal{M}_N(\gamma)$ l'ensemble des points γ-fréquents par :

$$\mathcal{M}_N(\gamma) := \left\{ x \in V_N : l_N(x) \geq \frac{4}{\pi}\gamma(\log N)^2 \right\}.$$

Nous avons :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\log|\mathcal{M}_N(\gamma)|}{\log N} = 2(1-\gamma) \quad \mathbb{P}_0-\text{p.s.}$$

Ce joli théorème est l'analogue des théorèmes 1 et 3 pour le GFF et on peut remarquer que $\frac{1}{2}\phi_N^2$ vérifie exactement le même théorème (avec des notions de convergence différentes). Nous évoquerons plus bas un autre lien entre l_N et $\frac{1}{2}\phi_N^2$.

Une deuxième remarque est qu'à partir de ce résultat, nous obtenons facilement des résultats analogues pour le temps passé en x jusqu'au temps n (et non pas jusqu'à τ_N). Il faut moralement remplacer $\log N$ par $\frac{1}{2}\log n$ puisque $\frac{\log \tau_N}{\log N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2$ $\mathbb{P}_0-$p.s.

Nous allons maintenant discuter un peu des éléments de la preuve. A priori ce théorème peut sembler un peu plus simple à démontrer que son équivalent dans le cadre du GFF. En effet le GFF se définit à partir des temps $l_N(x)$ et est peut-être un peu moins visuel. Il n'en est en fait rien, et la preuve est bien plus technique. Tout d'abord, pour démontrer le théorème, il suffit de majorer $\sup_{x\in V_N} l_N(x)$ et de montrer la deuxième partie du théorème. Comme nous l'avions déjà vu avec le champ libre gaussien, la majoration de $\sup_{x\in V_N} l_N(x)$ et de $|\mathcal{M}_N(\gamma)|$ n'est pas très difficile : elle repose essentiellement sur une majoration de la fonction de Green (déjà réalisée, voir proposition 2) et sur des majorations assez grossières (comme l'union bound). Nous évoquerons donc uniquement la minoration de $|\mathcal{M}_N(\gamma)|$.

Minoration de $|\mathcal{M}_N(\gamma)|$: En fait la preuve originelle de [DPRZ01] se faisait via le mouvement brownien : ils montraient l'équivalent du théorème 6 pour le mouvement brownien et utilisait un processus d'approximation pour obtenir le résultat pour la marche aléatoire. Plus tard, l'article [Ros05] n'utilisa que la marche aléatoire pour prouver le résultat, en suivant un schéma de preuve très similaire. C'est de cette preuve dont nous parlerons.

La stratégie se base sur la méthode du second moment. Si nous souhaitons minorer la variable aléatoire Z positive, nous pouvons utiliser le lemme suivant :

Lemma 1. *(Inégalité de Paley–Zygmund) Soit Z une variable aléatoire réelle positive admettant un second moment non nul. Alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, nous avons :*

$$\mathbb{P}(Z \geq \alpha\mathbb{E}[Z]) \geq (1-\alpha)^2 \frac{\mathbb{E}[Z]^2}{\mathbb{E}[Z^2]}.$$

La preuve de ce lemme est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous souhaitons l'utiliser avec la variable $|\mathcal{M}_N(\gamma)|$. Ce que nous devons faire est donc de minorer $\mathbb{E}[|\mathcal{M}_N(\gamma)|]$ et majorer $\mathbb{E}\left[|\mathcal{M}_N(\gamma)|^2\right]$. Le premier point n'est pas très compliqué grâce aux estimées précises sur la fonction de Green (proposition 2). Le deuxième point est plus ardu puisqu'il faut correctement majorer $\mathbb{P}\left(l_N(x), l_N(y) \geq \frac{4}{\pi}\gamma(\log N)^2\right)$ pour x et y dans V_N. Cela nécessite de comprendre les "corrélations" entre $l_N(x)$ et $l_N(y)$, mais cela peut se faire sans trop de technicité jusque là (je l'ai précisément expliqué dans mon mémoire de M2) et on obtient :

$$\text{si } 0<\gamma<\frac{1}{2}, \exists c>0, \mathbb{E}\left[|\mathcal{M}_N(\gamma)|^2\right] \leq c\mathbb{E}\left[|\mathcal{M}_N(\gamma)|\right]^2.$$

Cela conclut quasiment la preuve puisque cela montre qu'avec une probabilité positive indépendante de N, $|\mathcal{M}_N(\gamma)|$ est grand. On passe alors assez aisément à une probabilité qui tend vers 1.

Malheureusement, comme écrit plus haut, cela ne fonctionne que pour γ plus petit que $\frac{1}{2}$ strictement. Or nous souhaitons avoir le résultat pour tout γ dans $(0,1)$. Le problème est que si γ est trop grand, le moment d'ordre 2 explose par rapport au moment d'ordre 1. L'article [Ros05] utilise donc une autre variable aléatoire à injecter dans l'inégalité de Paley-Zygmund : le principe est d'imposer un certain comportement à la marche aléatoire. On ne s'intéresse qu'aux sommets $x \in V_N$ pour lesquels la marche effectue un certain nombre d'excursions entre différents anneaux centrés en x, pour différentes échelles. On montre que ces points sont bien γ-fréquents et on contrôle leur nombre comme nous l'avions expliqué précédemment. La différence est qu'ici les estimations sur les moments d'ordre 1 et 2 sont bien plus dures à obtenir.

Cette méthode qui consiste à imposer non seulement le point final (ici on souhaite que $l_N(x) \geq \frac{4}{\pi}\gamma \log N$), mais aussi toute une trajectoire (ici on souhaite avoir un nombre d'excursions bien précis, pour plusieurs échelles) apparaît régulièrement dans ce domaine. C'est avec cette même idée que les articles [BDG01] et [Dav06] montrent les théorèmes 1 et 3 respectivement.

Nous finirons ce mémoire par évoquer un autre lien entre le champ libre gaussien et les temps de visite de la marche aléatoire.

Relation de Ray Knight Plaçons-nous maintenant dans un cadre un peu plus général : soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, non orienté, fini, sans boucles (nous pourrions rajouter des poids sur les arêtes). ∂ désignera un sommet particulier de notre graphe. Nous noterons $(Y_t)_{t\geq 0}$ une marche aléatoire sur notre graphe, à temps continu à taux 1. Cette marche part d'un sommet, attend un temps exponentiel de moyenne 1 et saute uniformément sur un des sommets voisins ; puis recommence ce procédé (toutes les variables aléatoires sont indépendantes). Autrement dit, ce n'est rien d'autre qu'une marche aléatoire à temps discret, mais ses temps d'attente dans chacun des sommets est aléatoire et suit une loi exponentielle de moyenne 1.

Soit $u > 0$. Nous notons τ_u le premier instant que la marche passe un temps u en ∂ :

$$\tau_u := \inf \left\{ t > 0 : \int_0^t \mathbf{1}_{\{Y_s = \partial\}} ds \geq u \right\}.$$

Et nous nous intéressons au temps de visite jusqu'à l'instant τ_u :

$$l_x^u := \int_0^{\tau_u} \mathbf{1}_{\{Y_s = x\}} ds.$$

Par exemple, $l_\partial^u = u$. Enfin nous noterons $(\phi_x)_{x\in V}$ le champ libre gaussien sur ce graphe : ici la fonction de covariance en x et y n'est rien d'autre que le temps moyen passé en y, partant de x, avant de toucher ∂. Nous avons introduit toutes ces quantités bizarres pour la raison suivante :

Theorem 7. *Notons $\mathbb{P}_\partial$ la loi de la marche $(Y_t)_{t\geq 0}$ issue de ∂ et notons $\boldsymbol{P}$ la loi du champ libre gaussien ϕ. Nous avons l'égalité suivante en loi :*

$$\left(l_x^u + \frac{1}{2}\phi_x^2 \right)_{x\in V} = \left(\frac{1}{2} \left(\phi_x + \sqrt{2u} \right)^2 \right)_{x \in V} \quad \text{sous } \mathbb{P}_\partial \otimes \boldsymbol{P} \text{ et sous } \boldsymbol{P}.$$

Le lecteur pourra se référer à l'article [ST13] pour une preuve assez courte de ce résultat qui porte le nom de seconde identité généralisée de Ray-Knight. D'autres relations de Ray-Knight existent.

On voit ici une nouvelle manifestation des liens entre les temps de visites l_x^u et la moitié du GFF au carré $\frac{1}{2}\phi_x^2$. C'est encore un problème ouvert que d'explorer ces liens. Par exemple, est-il possible d'utiliser le GFF pour étudier les temps de visite de la marche aléatoire ? Pouvons-nous construire une mesure analogue à μ_γ chargeant les points fréquents de la marche aléatoire ?

Références

[BDG01] Erwin Bolthausen, Jean-Dominique Deuschel, and Giambattista Giacomin. Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic. *Ann. Probab.*, 29(4) :1670–1692, 10 2001.

[Ber16] N. Berestycki. Introduction to the gaussian free field and liouville quantum gravity. Lecture notes. Available on the webpage of the author, 2016.

[Ber17] Nathanaël Berestycki. An elementary approach to gaussian multiplicative chaos. *Electron. Commun. Probab.*, 22 :12 pp., 2017.

[BL16] Marek Biskup and Oren Louidor. On intermediate level sets of two-dimensional discrete Gaussian Free Field. *ArXiv e-prints*, December 2016.

[Cha05] S. Chatterjee. An error bound in the Sudakov-Fernique inequality. *ArXiv Mathematics e-prints*, October 2005.

[Cha14] Sourav Chatterjee. *Superconcentration and Related Topics*. Springer Monographs in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.

[Dav06] Olivier Daviaud. Extremes of the discrete two-dimensional gaussian free field. *Ann. Probab.*, 34(3) :962–986, 05 2006.

[DPRZ01] Amir Dembo, Yuval Peres, Jay Rosen, and Ofer Zeitouni. Thick points for planar brownian motion and the erdős-taylor conjecture on random walk. *Acta Math.*, 186(2) :239–270, 2001.

[Law96] Gregory F. Lawler. *Intersections of Random Walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, 1996.

[Ros05] Jay Rosen. A random walk proof of the erdos-taylor conjecture. *ArXiv e-prints*, March 2005.

[ST13] Christophe Sabot and Pierre Tarrès. Inverting Ray-Knight identity. *ArXiv e-prints*, November 2013.