

# Mesures invariantes sur les ensembles de Julia

Caroline ARVIS  
Sous la direction d'Yves BENOIST  
Juillet 2013

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>L'ensemble de Julia d'une fonction holomorphe sur <math>\hat{\mathbb{C}}</math></b>	<b>3</b>
2.1	Ensemble de Fatou, ensemble de Julia . . . . .	3
2.2	Cycles répulsifs . . . . .	4
2.3	Un exemple : le cas des polynômes de degré 2 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Mesures empiriques et opérateurs équicontinus</b>	<b>6</b>
3.1	Opérateurs de Markov-Feller . . . . .	8
3.2	Mesures empiriques . . . . .	10
3.3	Opérateurs équicontinus . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Equicontinuité de l'opérateur <math>P_f</math></b>	<b>12</b>
4.1	Equicontinuité de $P_f$ sur l'ensemble de Julia . . . . .	12
4.2	Mesures invariantes sur l'ensemble de Julia . . . . .	16
<b>5</b>	<b>Mesures invariantes sur des espaces projectifs</b>	<b>17</b>

## 1 Introduction

Le domaine de recherche concerné est celui des mesures invariantes sur les espaces homogènes. L'objet du texte est l'illustration de l'analogie féconde, découverte par Sullivan, entre l'étude des itérations de fractions rationnelles et de marches aléatoires sur les espaces projectifs.

Nous commencerons par montrer comment l'étude des mesures invariantes peut s'appliquer à l'étude de problèmes datant du début du siècle dernier. L'étude, en dynamique holomorphe, des ensembles de Julia date des travaux de Gaston Julia et

Pierre Fatou au début du XXème siècle ; les résultats cités dans la première partie sont principalement les leurs. De nombreux mathématiciens se sont intéressés à ce domaine depuis ; citons par exemple Douady, Sullivan, Thurston, Milnor, et Yoccoz. Le théorème démontré dans la troisième partie est dû à Lyubich, dans les années 80.

Fixons une fonction  $f$  holomorphe de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  sur elle-même. On considère alors le système dynamique  $(\hat{\mathbb{C}}, f)$ , et les trajectoires inverses de ce système : si on est en un point  $z$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  à un temps  $n$ , on est en une de ses préimages par  $f$  au temps  $n+1$ . Ces trajectoires inverses constituent une marche aléatoire régie par un opérateur de Markov-Feller  $P_f$ , l'opérateur de moyenne sous les préimages :

$$P_f \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \\ \phi \longmapsto z \mapsto \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \phi(w) \end{array} \right. ;$$

en étudiant les mesures de probabilité sur  $\hat{\mathbb{C}}$  invariantes par  $P_f$ , on obtient des résultats d'équidistribution des trajectoires inverses. En se restreignant à l'ensemble de Julia  $J_f$  associé à l'application  $f$ , on montrera qu'il existe une seule mesure  $P_f$ -invariante ; les trajectoires inverses s'équidistribuent sur son support.

Nous énoncerons ensuite des résultats analogues à ceux utilisés dans le cas de la sphère  $\hat{\mathbb{C}}$  dans le cas des marches aléatoires sur des espaces projectifs  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ . On considérera une mesure de probabilité  $\mu$  dont le support engendre un sous-semi-groupe  $\Gamma_\mu$  de  $GL(\mathbb{R}^d)$ , et l'adhérence de Zariski  $G_\mu$  de  $\Gamma_\mu$ . L'action de  $G_\mu$  sur l'espace projectif  $X = \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$  régit une marche aléatoire, par l'opérateur de moyenne  $P_\mu$  :

$$P_\mu \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}^0(X) \longrightarrow \mathcal{C}^0(X) \\ \phi \longmapsto \int_{\Gamma_\mu} \phi(g \cdot x) d\mu(g) \end{array} \right. .$$

On caractérisera l'ensemble des mesures invariantes par cette marche aléatoire. Ces résultats sont développés dans l'article [1].

## Remerciements

Merci à Yves Benoist pour sa sage direction, et ma gratitude infinie envers le Créateur Tout-Puissant, qui dans Sa bonté, permet à l'homme d'explorer les détails de Son oeuvre.



## 2 L'ensemble de Julia d'une fonction holomorphe sur $\hat{\mathbb{C}}$

Notons  $\hat{\mathbb{C}}$  la sphère de Riemann : on a  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ . On cherche à étudier la dynamique des applications  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  holomorphes. Rappelons le résultat suivant d'analyse complexe :

**Théorème 2.1.** *Les fonctions holomorphes sur la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  sont les fonctions rationnelles, i.e. les fonctions de la forme  $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$  où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux.*

Par degré d'une telle application, on entendra la quantité  $d = \max(\deg P, \deg Q)$ . Dans la suite,  $f$  dénotera une fonction holomorphe de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  sur elle-même, de degré au moins 2.

### 2.1 Ensemble de Fatou, ensemble de Julia

On s'intéresse donc aux orbites des points de la sphère de Riemann sous l'action d'une fonction  $f$  ; rappelons que pour un point  $z$  de  $\hat{\mathbb{C}}$ , l'ensemble  $\omega$ -limite de  $z$ , noté  $\omega(z)$ , est l'ensemble des points d'accumulations de son orbite sous l'action de  $f$  :

$$\omega(z) = \bigcap_{p \geq 0} \overline{\{f^n(z) \mid n \geq p\}}.$$

Plusieurs comportements sont possibles : l'orbite de  $z$  peut être périodique ; plus généralement, l'ensemble limite  $\omega(z)$  peut être une orbite périodique ; ou bien le comportement asymptotique de l'orbite de  $z$  peut être plus compliqué. La partition suivante de la sphère  $\hat{\mathbb{C}}$  va aider à comprendre ce problème :

**Définition 2.2.** *L'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_f$  de  $f$  est l'ensemble des points dont il existe un voisinage  $U$  sur lequel la famille  $(f^n)_{n \geq 1}$  est équicontinue. L'ensemble de Julia de  $f$  est son complémentaire :  $J_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}_f$ .*

Par exemple, dans le cas simple d'un monôme  $z \mapsto z^d$ , pour  $d \in \mathbb{N}^*$ , l'ensemble de Julia est simplement le cercle de rayon 1.

Voici quelques propriétés de l'ensemble de Julia, qui sont démontrées dans [7, Ch. 4]. On a tout d'abord une propriété d'invariance sous l'action de  $f$  :

**Proposition 2.3.** *L'ensemble de Julia  $J_f$  d'une application holomorphe  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  est pleinement invariant sous l'action de  $f$ , c'est-à-dire qu'un point  $z$  est dans  $J_f$  si et seulement si son image  $f(z)$  l'est.*

On a le résultat suivant sur les composantes connexes de  $J_f$  :

**Proposition 2.4.** *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une application holomorphe, de degré  $d$  comme on l'a défini plus haut. Supposons  $d \geq 2$ . Alors l'ensemble de Julia  $J_f$  de  $f$  est non-vide, et n'a pas de point isolé. De plus, l'ensemble de Julia de  $f$  soit est connexe soit a une infinité de composantes connexes.*

## 2.2 Cycles répulsifs

On peut en fait décrire beaucoup plus précisément l'ensemble de Julia dans le cas des applications holomorphes sur la sphère de Riemann ; c'est l'objet de la proposition 2.6. Pour cela, il faut décrire les orbites périodiques sous l'action de  $f$ , qu'on appelle des *cycles*.

**Définition 2.5.** Supposons qu'il existe  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  et un entier  $p > 0$  minimal tel que  $f^p(z) = z$ . Alors l'ensemble  $\{f^k(z)\}_{0 \leq k \leq p-1}$  est un *cycle* de  $f$ .

Son *multiplicateur* est la quantité

$$\sigma = (f^p)'(z) = \prod_{k=0}^{p-1} (f'(f^k(z))).$$

Si  $|\sigma| < 1$ , le cycle est dit *attracteur*.

Si  $|\sigma| > 1$ , le cycle est dit *répulsif*.

Si  $|\sigma| = 1$ , le cycle est dit *indifférent*.

Si  $\sigma = e^{2\pi it}$  pour un certain  $t \in \mathbb{Q}$ , le cycle est dit *parabolique*.

Si  $|\sigma| = 0$ , le cycle est dit *super-attracteur*.

Le *bassin d'attraction* d'un cycle attracteur  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des points dont  $\mathcal{C}$  est l'ensemble  $\omega$ -limite.

On appellera *orbite inverse* (en anglais, backward orbit) d'un point  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , notée  $O^-(z)$ , l'ensemble des *prédécesseurs* de  $z$ , c'est-à-dire l'ensemble des points dont l'orbite passe par  $z$  :

$$O^-(z) = \{u \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n(u) = z\}.$$

Par exemple, dans le cas du monôme  $f_0 : z \mapsto z^2$ , les points 0 et  $\infty$  sont des points fixes super-attracteurs, alors que le cycle  $\{e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$  est répulsif ; ce cycle est inclus dans l'ensemble de Julia  $J_{f_0}$ . En fait, tous les cycles répulsifs sont dans l'ensemble de Julia ; c'est l'objet d'un théorème prouvé indépendamment par Fatou et Julia :

**Proposition 2.6.** (FATOU, JULIA) Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Les cycles répulsifs de  $f$  ainsi que leurs orbites inverses sont dans l'ensemble de Julia  $J_f$ . En fait, l'ensemble de Julia est égal à l'adhérence de l'union des cycles répulsifs et de leurs orbites inverses.

Cette proposition est démontrée dans [7, Ch. 14]. De plus, on a la propriété suivante, montrée dans [7, 4.10] :

**Proposition 2.7.** Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , et  $z$  dans l'ensemble de Julia  $J_f$ . Alors l'orbite inverse  $O^-(z) = \{u \in \hat{\mathbb{C}} \mid \exists n \in \mathbb{N} : f^n(u) = z\}$  est dense dans  $J_f$ .

Citons enfin un dernier résultat, également prouvé dans [7, Ch. 4], permettant de comprendre mieux l'ensemble de Fatou.

**Proposition 2.8.** Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle. Soit  $\mathcal{A}$  le bassin d'attraction d'un cycle attracteur de  $f$ . Alors  $\mathcal{A}$  est inclus dans l'ensemble de Fatou  $\mathcal{F}_f$  de  $f$ . Chaque composante connexe de  $\mathcal{F}_f$  est soit incluse dans  $\mathcal{A}$ , soit disjointe de  $\mathcal{A}$ . De plus, la frontière  $\partial\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}}$  de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est égal à l'ensemble de Julia  $J_f$ .

Ainsi, dans l'exemple de  $f_0$ , le disque ouvert  $\mathbb{D}$  de rayon 1 est le bassin d'attraction du point fixe 0 ; l'ensemble des nombres complexes de module strictement supérieur à 1 est le bassin d'attraction du point  $\infty$ . Ce sont les deux composantes connexes de l'ensemble de Fatou, et elles ont bien pour frontière l'ensemble de Julia  $J_{f_0}$ .

### 2.3 Un exemple : le cas des polynômes de degré 2

L'exemple des polynômes quadratiques, de la forme

$$f_c \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{C}} \\ z & \longmapsto & z^2 + c \end{cases}$$

pour un complexe  $c \in \mathbb{C}$ , est étudié depuis longtemps ; des cours de Douady et Hubbard ([3]), ainsi que de Lyubich ([4]) traitent de cette famille en détail. Dans le cas où  $c = 0$ , l'ensemble de Julia  $J_0$  est le cercle de rayon 1, et il existe deux points fixes attracteurs, 0 et  $\infty$ . En prenant l'orbite inverse du point 1, on constate effectivement qu'elle est dense dans  $J_0$ . En fait, quand  $c$  est assez petit, l'ensemble de Julia est homéomorphe au cercle. Mais en général, c'est un ensemble très compliqué, comme le montrent les exemples qui suivent.

Dans la figure 1, c'est le cas  $c = i$  qui est représenté : dans ce cas, le seul cycle attracteur est le point fixe  $\{\infty\}$ . La figure 2 donne l'ensemble de Julia pour  $c = -1$ .

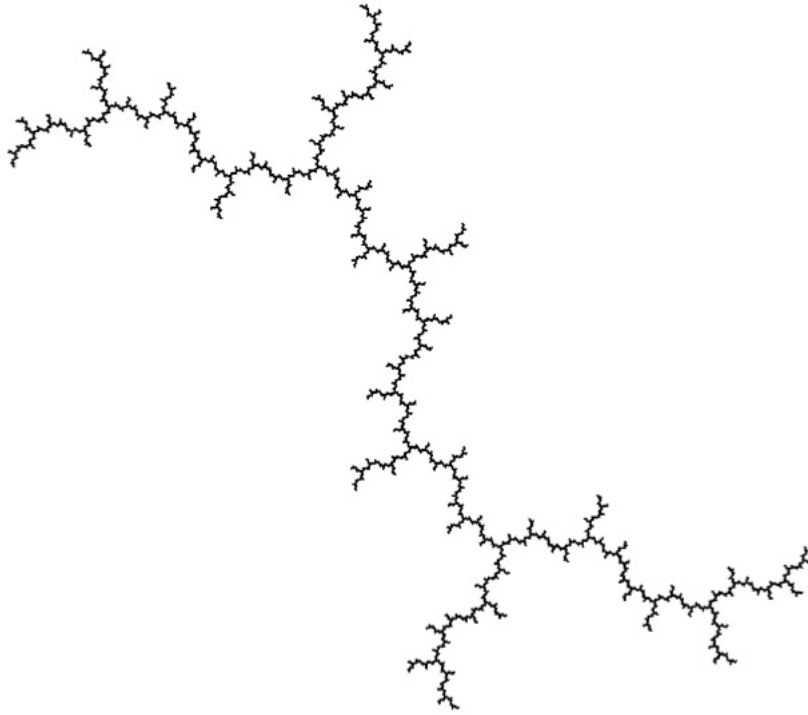


FIGURE 1 – L'ensemble de Julia pour  $c = i$ . Source : [7].

Le cycle  $\{0, -1\}$  est alors attracteur : 0 est dans la composante principale, et  $-1$  dans la composante de gauche. Ces deux exemples concernaient des ensembles de Julia connexes ; la figure 3 donne un paramètre dont l'ensemble de Julia a une infinité de composantes connexes, et où celles-ci sont réduites à des points.

### 3 Mesures empiriques et opérateurs équicontinus

Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fonction holomorphe de degré  $d$ . Pour étudier la question de la répartition des orbites, on va utiliser une méthode un peu détournée, en utilisant des résultats énoncés dans la deuxième partie de l'article [1]. L'idée est d'étudier le système dynamique  $(\hat{\mathbb{C}}, f)$  à l'aide d'un opérateur de Markov-Feller sur  $\mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}})$  ; dans

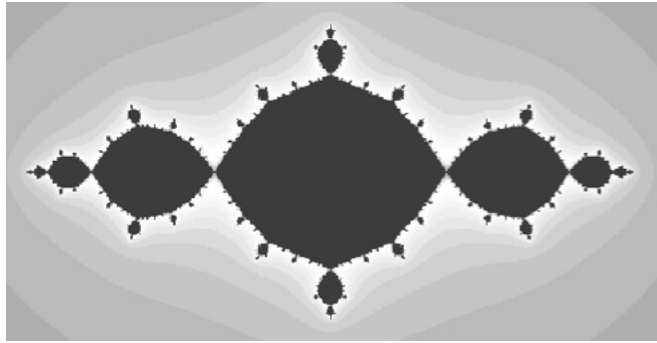


FIGURE 2 – L'ensemble de Julia pour  $c = -1$ . Source : [6].



FIGURE 3 – Un ensemble de Julia dont les composantes connexes sont des points, pour  $c = -0.765 + 0.12i$ . Source : [7].

cette partie, nous expliquerons que si l'action de cet opérateur est assez régulière, c'est-à-dire s'il est équicontinu, il existe des mesures de probabilité permettant de comprendre les préimages des points de l'ensemble de Julia  $J_f$ .

L'opérateur considéré sera l'opérateur de moyenne sur les pré-images, noté  $P_f$  :

$$P_f \begin{cases} \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \\ \phi & \longmapsto & z \mapsto \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \phi(w) \end{cases} .$$

Comme  $J_f$  est stable par  $f$  et  $f^{-1}$ , les marches aléatoires régies par  $P_f$  partant d'un point  $x$  dans  $J_f$  ont des trajectoires qui restent dans  $J_f$ .

### 3.1 Opérateurs de Markov-Feller

Soit  $X$  un espace métrique compact. Soit  $E = \mathcal{C}^0(X)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

D'après le théorème de représentation de Riesz, qu'on peut trouver dans [9, Ch. 6],  $E^*$  s'identifie à  $\mathcal{M}(X)$ , où  $\mathcal{M}(X)$  est l'espace des mesures complexes sur  $X$ , via l'application

$$\begin{cases} \mathcal{M}(X) & \longrightarrow & E^* \\ \mu & \longmapsto & (g \mapsto \int_X g d\mu) \end{cases} .$$

Notons  $\mathcal{P}(X)$  l'espace des mesures de probabilité sur  $X$ .

**Définition 3.1.** Un *opérateur de Markov-Feller* est une application

$$P : \mathcal{C}^0(X) \rightarrow \mathcal{C}^0(X)$$

vérifiant les trois conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|P\| \leq 1 \\ P1 = 1 \\ \forall g \in \mathcal{C}^0(X), g \geq 0 \Rightarrow Pg \geq 0 \end{cases} .$$

On peut reformuler cette définition de la manière suivante :

**Proposition 3.2.** La donnée d'une application continue

$$\begin{cases} X & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ x & \longmapsto & P_x \end{cases}$$

est équivalente à la donnée d'un opérateur de Markov-Feller  $P$  sur  $X$  via l'égalité

$$\forall x \in X, \forall g \in \mathcal{C}^0(X), (Pg)(x) = P_x(g).$$



On peut associer une marche aléatoire à de tels opérateurs. Considérons  $\underline{X}$  l'ensemble des suites  $X^{\mathbb{N}}$ , muni de l'ensemble de mesures de probabilité  $(\mathbb{P}_x)_{x \in X}$  défini comme suit : soit  $x \in X$ . Soit  $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \underline{X}$  une suite d'éléments de  $x$ . On a  $\mathbb{P}_x(x_0 = x) = 1$ , c'est-à-dire que la suite  $\underline{x}$  part du point  $x$  avec probabilité 1 pour la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_x$ . On a ensuite  $\mathbb{P}_x(x_0 = x, x_1 = y) = P_x(y)$  ; le deuxième point de la trajectoire issue de  $x$  est donné par la mesure  $P_x$ . En continuant, on a  $\mathbb{P}_x(x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z) = P_x(y)P_y(z)$ , et ainsi de suite, par récurrence. Le couple  $(\underline{X}, (\mathbb{P}_x)_{x \in X})$  définit une marche aléatoire sur  $X$ .

Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fonction holomorphe de degré  $d$ . Considérons à nouveau l'opérateur  $P_f$  de moyenne sur les préimages :

$$P_f \begin{cases} \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \\ \phi & \longmapsto & z \mapsto \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \phi(w) \end{cases} .$$

Comme fonction continue de  $\hat{\mathbb{C}}$  dans  $\mathcal{P}(\hat{\mathbb{C}})$ ,  $P_f$  s'écrit

$$P_f \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\hat{\mathbb{C}}) \\ z & \longmapsto & \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \delta_w \end{cases} .$$

La marche aléatoire associée peut donc être décrite ainsi : si on est en un point  $z$  de  $\hat{\mathbb{C}}$  au temps  $n$ , on a une probabilité  $\frac{1}{d}$  d'être en chacune de ses préimages par  $f$  au temps  $n + 1$ . Ainsi, si  $f$  est la fonction  $z \mapsto z^2$ , la seule trajectoire inverse, c'est-à-dire la seule trajectoire associée à  $P_f$ , partant de 0 est la suite  $(0, 0, 0, \dots)$ . Une trajectoire inverse partant de 1 est  $(1, 1, 1, \dots)$  ; une autre est  $(1, -1, -i, \dots)$ . Si on est en 1 au temps  $n$ , on a une chance sur deux d'être en 1 et une chance sur deux d'être en  $-1$  au temps  $n + 1$ . Si  $f$  est la fonction  $z \mapsto z^2(z + 1)$ , si on est en 0 au temps  $n$ , on a une chance sur 3 d'être en  $-1$ , et deux chances sur trois d'être en 0 au temps  $n + 1$ .

Dans la suite,  $P$  désignera un opérateur de Markov-Feller . Définissons à présent une notion d'invariance des mesures :

**Définition 3.3.** Soit  $\nu \in \mathcal{P}(X)$ . On dit que  $\nu$  est  $P$ -invariante (ou *stationnaire*, ou *harmonique*) si, quand  $\nu$  est vue comme un élément de  $\mathcal{C}^0(X)^*$ , on a  $\nu P = \nu$ .

Une question se pose immédiatement : comment se répartissent les trajectoires ? Dans le cas de l'opérateur  $P_f$  défini plus haut, on peut se demander si les trajectoires s'équirépartissent. S'intéresser aux trajectoires inverses, celles de la marche aléatoire associée à  $P_f$  plutôt qu'aux trajectoires directes, c'est-à-dire aux suites  $(z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots)$  permet d'adopter un point de vue probabiliste et d'utiliser les opérateurs de Markov-Feller.

### 3.2 Mesures empiriques

Notons  $\underline{X} = X^{\mathbb{N}}$ , et  $\mathbb{P}_x$  la loi de probabilité des trajectoires de la chaîne de Markov partant de  $x \in X$  associée à  $P$ . L'espace  $\mathcal{P}(X)$  est muni de la topologie faible-\*. Commençons par donner un nom aux mesures qu'on veut étudier, celles dont le support est une trajectoire :

**Définition 3.4.** La *mesure empirique* associée à un  $\underline{x} \in \underline{X}$  et un  $n \geq 1$  est la mesure donnée par

$$\nu_{\underline{x},n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}.$$

On peut alors écrire le résultat de convergence suivant, dont la démonstration est l'objet de l'article [2] :

**Théorème 3.5.** (*Loi des grands nombres de BREIMAN*) Soit  $X$  un espace compact métrisable, et  $P$  un opérateur de Markov-Feller sur  $X$ .

Alors pour tout  $x \in X$ ,  $\mathbb{P}_x$ -presque pour tout  $\underline{x} \in \underline{X}$ , toute valeur d'adhérence faible-\* de la suite  $(\nu_{\underline{x},n})_n$  est  $P$ -invariante.

De plus, si  $P$  est *uniquement ergodique*, c'est-à-dire qu'il existe une unique mesure  $P$ -invariante  $\nu$ , alors pour tout  $x \in X$ , pour  $\mathbb{P}_x$ -presque toute trajectoire  $\underline{x}$  dans  $\underline{X}$ , la suite des mesures empiriques converge vers  $\nu$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{\underline{x},n} = \nu.$$

On dit que l'opérateur  $P$  est *uniquement ergodique* si  $X$  admet une unique mesure de probabilité  $P$ -invariante. Ce théorème répond en partie à la question : dans le cas où  $P$  est *uniquement ergodique*, l'unique mesure invariante  $\nu$  a pour support l'ensemble limite de toutes les trajectoires.

### 3.3 Opérateurs équicontinus

Pour avoir un résultat plus général, on a besoin d'une autre propriété pour l'opérateur étudié :

**Définition 3.6.** Soit  $P$  un opérateur de Markov-Feller sur  $X$ . On dit que  $P$  est *équicontinu* si pour tout  $g \in C^0(X)$ , la famille  $(P^n g)_n$  est équicontinue.

Reformulons les concepts de minimalité et d'ergodicité pour la vision en termes d'opérateurs du système dynamique :

**Définition 3.7.** Soit  $P$  un opérateur de Markov-Feller, et  $F \subset X$  un fermé. Le fermé  $F$  est dit  $P$ -invariant si pour tout  $x \in F$ ,  $F$  est de mesure  $P_x$  pleine :  $P_x(F) = 1$ . Il est de plus dit  $P$ -minimal s'il est minimal parmi les ensembles  $P$ -invariants non-vides.

**Définition 3.8.** Une mesure est dite  $P$ -ergodique si elle est extrémale dans l'ensemble des mesures  $P$ -invariantes.

Alors on a un résultat plus fort, dans le cas où l'opérateur de Markov-Feller  $P$  est équicontinu, dû à Albert Raugi, et démontré dans [8] et [1, pg. 12] :

**Proposition 3.9.** (RAUGI) Soit  $X$  un espace compact métrisable et  $P$  un opérateur de Markov-Feller équicontinu sur  $X$  ; soit  $Y$  l'adhérence de l'union des fermés  $P$ -minimaux de  $X$ . Alors le support de toute mesure  $P$ -ergodique est un fermé  $P$ -minimal. Réciproquement, tout fermé  $P$ -minimal supporte une unique mesure  $P$ -ergodique.

De plus, pour tout  $x \in X$ , la limite

$$\nu_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_x P^k$$

existe : c'est une mesure de probabilité  $P$ -invariante ;  $x \mapsto \nu_x$  est continue en  $x$ .

Pour tout  $x \in X$ ,  $\mathbb{P}_x$ -presque pour tout  $\underline{x} \in \underline{X}$ , la limite

$$\nu_{\underline{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{x_k}$$

existe, est  $P$ -invariante et  $P$ -ergodique, et vérifie

$$\nu_x = \int_{\underline{X}} \nu_{\underline{x}} d\mathbb{P}_x(\underline{x}).$$

Les mesures  $\nu_x$  ainsi définies sont celles qu'on recherche ; l'enjeu maintenant est d'étudier, pour une fonction rationnelle  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , l'équicontinuité de l'opérateur de Markov-Feller  $P_f$  :

$$P_f \begin{cases} \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \\ \phi & \longmapsto & z \mapsto \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \phi(w) \end{cases} .$$

## 4 Equicontinuité de l'opérateur $P_f$

Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle, de degré  $d \geq 2$ .

### 4.1 Equicontinuité de $P_f$ sur l'ensemble de Julia

Considérons l'opérateur de Markov-Feller  $P_f$ , défini de la manière suivante :

$$P_f \begin{cases} \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\hat{\mathbb{C}}) \\ \phi & \longmapsto & z \mapsto \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \phi(w) \end{cases} ,$$

où les préimages sont comptées avec multiplicité. On appellera *trajectoire inverse* les trajectoires de la marche aléatoire associée à  $P_f$ , pour éviter toute confusion avec les trajectoires associées à l'opérateur  $z \mapsto \delta_{f(z)}$ . On se demande si cet opérateur est équicontinu. La réponse à cette question va dépendre d'un ensemble  $E$ , appelé *ensemble exceptionnel*, qui comprend moins de trois points.

**Définition 4.1.** L'ensemble exceptionnel de  $f$  est le plus grand ensemble fini égal à sa préimage par  $f$ , c'est-à-dire le plus grand ensemble fini  $E_f$  vérifiant

$$f^{-1}(E_f) = E_f.$$

Nous admettrons que le cardinal de l'ensemble exceptionnel vaut 1, 2, ou 0 ; il vaut 2 si et seulement si  $f$  est conjugué à une fraction de la forme  $z \mapsto az^d$  pour un  $a \in \mathbb{C}$  et un  $d \in \mathbb{Z}^*$  ; s'il vaut 1, alors  $f$  est nécessairement un polynôme.

Alors on a le résultat suivant :

**Théorème 4.2.** (LYUBICH) *Soit  $f$  une fraction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2. Si  $E_f$  est vide, l'opérateur  $P$  est équicontinu. Si  $E_f$  est égal au singleton  $\{\infty\}$ , alors, si on prend un rayon  $R \geq 0$  tel que la boule centrée en 0, de rayon  $R$ ,  $B_R$  contient sa préimage, c'est-à-dire  $f^{-1}(B_R) \subset B_R$ ,  $P$  est équicontinu sur  $B_R$ .*

Avant de démontrer ce théorème, expliquons le résultat sur un exemple, dans le cas de la famille  $(f_c)_{c \in \mathbb{C}}$  de la section 2.3. Si le paramètre  $c$  est nul, dans le cas de  $f_0$ , l'ensemble exceptionnel  $E_{f_0}$  est constitué de deux points :

$$E_{f_0} = \{0, \infty\}.$$

Si on part d'un nombre  $z$  de module inférieur à 1, alors les trajectoires inverses de la marche aléatoire s'éloignent du point 0 ; si on part d'un nombre  $w$  de module

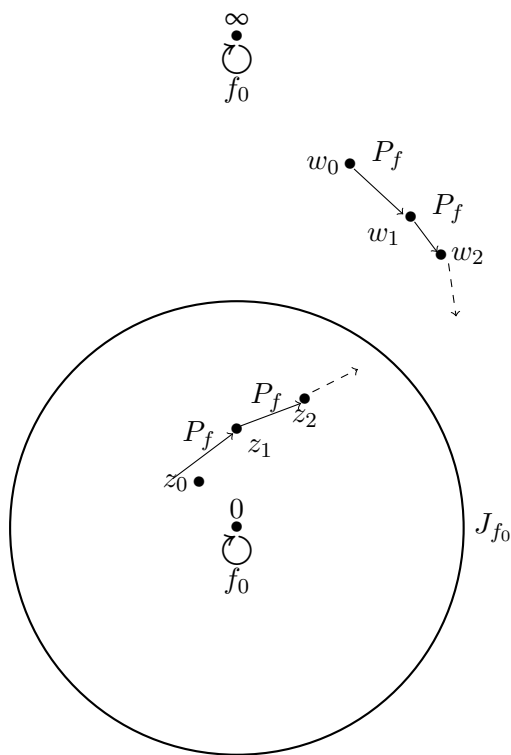


FIGURE 4 – Les points 0 et  $\infty$  sont fixes, mais les trajectoires inverses partant de points avoisinants, respectivement  $(z_0, z_1, \dots)$  et  $(w_0, w_1, \dots)$  s'en éloignent.

supérieur à 1, alors les trajectoires inverses de la marche aléatoire s'éloignent du point  $\infty$ , comme le montre la figure 4.

Les trajectoires inverses s'éloignent de 0, mais le fermé  $\{0\}$  est minimal pour l'opérateur  $P_{f_0}$ , et donc  $P_{f_0}$  ne peut pas être équicontinu sur la sphère de Riemann toute entière. Il en est de même pour le point à l'infini : il est fixe, mais les trajectoires inverses de la marche aléatoire s'en éloignent.

Dans le cas où le paramètre  $c \in \mathbb{C}$  est différent de 0, l'ensemble exceptionnel est constitué uniquement du point à l'infini. Le théorème dit qu'une fois éliminée cette obstruction qu'est le point fixe à l'infini, l'opérateur est effectivement équicontinu.

Démontrons le théorème 4.2.

**Preuve** Fixons  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle, notons  $J$  son ensemble de Julia, et supposons que l'ensemble exceptionnel est de cardinal 1, réduit à  $\{\infty\}$ , ce qui est possible après conjugaison. Notons  $C = f(\{z \mid df(z) = 0\})$  l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ . Notons  $\tau$  le cardinal de  $C$ . Notons  $O^+(C)$  l'orbite positive des éléments de  $C$ . Fixons un  $R$  tel que  $f^{-1}(B_R) \subset B_R$ . Soit  $\phi \in \mathcal{C}^0(B_R)$ , non-nulle. Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall z, w \in J, |z - w| < \delta \Rightarrow |\phi(z) - \phi(w)| < \epsilon.$$

Fixons  $z_0 \in B_R$ . Montrons que la famille  $(P^n \phi)_{n \geq 1}$  est équicontinue en  $z_0$ . On va considérer trois cas :

*Premier cas* :  $z_0 \notin O^+(C)$ . Soit  $l$  un entier vérifiant

$$\frac{4\|\phi\|\tau}{\epsilon} \leq d^l.$$

Il existe un disque  $D$  inclus dans  $B_R$  contenant  $z_0$  tel que  $D$  a  $d$  pré-images disjointes par  $f$  et tel qu'il existe  $d^l$  fonctions inverses de  $f^l$  sur  $D$ . Notons  $\sigma_n$  le nombre de fonctions inverses de  $f^n$  sur  $D$ . On a les relations de récurrence :

$$\begin{cases} \sigma_n = d^n & \text{si } n \leq l \\ \sigma_{n+1} \geq (\sigma_n - \tau)d & \end{cases}.$$

Par récurrence on obtient la minoration

$$\sigma_n \geq d^n - \tau \left( \sum_{j=1}^{n-l} d^j \right),$$

et on en déduit

$$\frac{\sigma_n}{d^n} \geq 1 - \frac{\epsilon}{2\|\phi\|}.$$

En appliquant le théorème de Montel, on obtient que la famille des fonctions inverses  $(f_j^{-n})_{n \geq 1}$  est normale, donc équicontinue sur  $D$ . Il existe donc un réel  $\rho > 0$  tel que

$$\forall z, w \in D, \forall n \in \mathbb{N}, |z - w| < \delta \Rightarrow |f_j^n(z) - f_j^n(w)| < \delta.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , pour tous  $z$  et  $w$  dans  $D$ , on a

$$\begin{aligned} |P^n \phi(z) - P^n \phi(w)| &\leq \frac{1}{d^n} \sum_{j=1}^{\sigma_n} |\phi(f_j^{-n})(z) - \phi(f_j^{-n})(w)| + \frac{2}{d^n} \|\phi\| (d^n - \sigma) \\ &\leq \frac{1}{d^n} (\sigma_n \epsilon + 2d^n \|\phi\| \frac{\epsilon}{2\|\phi\|}) \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

*Deuxième cas* :  $z_0 \in O^+(C)$  et  $z_0$  n'est pas périodique. Alors il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $f^{-n}(z_0) \cap C = \emptyset$ . On est alors ramené au premier cas.

*Troisième cas* :  $z_0 \in O^+(C)$  et  $z_0$  est périodique de période  $p$ . Si le multiplicateur  $(f^p)'$  du cycle associé est non-nul, alors pour tout entier  $k$ ,  $z_0$  a multiplicité 1 comme racine de l'équation  $f^{-pk}(z) = z_0$ , et les autres racines ne sont pas périodiques ; on est ramené au deuxième cas. Si le multiplicateur est nul, comme  $z_0$  n'est pas dans l'ensemble exceptionnel, sa multiplicité comme racine de  $f^p(z) = z_0$  est inférieure ou égale à  $d^p - 1$ . Pour tout  $k$ , sa multiplicité comme racine de  $f^{-pk}(z) = z_0$  est inférieure ou égale à  $(d^p - 1)^k$ , et toutes les autres racines ne sont pas périodiques. Comme la quantité  $\frac{(d^p - 1)^k}{d^p}$  tend vers 0, on peut conclure.

Quand l'ensemble exceptionnel est vide, on applique le même raisonnement en enlevant trois points à la sphère de Riemann pour appliquer le théorème de Montel ; on peut le faire grâce à la propriété 2.8.

□

De ce théorème, on peut déduire le corollaire suivant :

**Corollaire 4.3.** *L'opérateur  $P_f$  est équicontinu sur l'ensemble de Julia  $J_f$ .*

**Preuve** Dans le cas où  $E_f$  est de cardinal 0 ou 1, comme l'ensemble de Julia est compact, le théorème 4.2 donne le résultat. Dans le cas où  $E_f$  est de cardinal 2, on peut montrer que  $f$  est, à conjugaison près, de la forme  $z \mapsto az^d$  pour un entier naturel  $d$ .  $J_f$  est alors le cercle  $\mathbb{T}$ , et l'opérateur  $P_f$  s'écrit, sur  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,

$$P_f : x \mapsto \sum_{k=0}^{d-1} \delta_{\frac{x+k}{d}}.$$

Il est équicontinu. □

## 4.2 Mesures invariantes sur l'ensemble de Julia

D'après la propriété 2.7, si  $z$  est dans  $J_f$ , alors  $O^-(z)$  est dense dans  $J_f$ . On sait que  $J_f$  est  $P_f$ -invariant par la proposition 2.3. Si  $F$  est un fermé  $P_f$ -minimal dans  $J_f$ , alors pour tout  $z \in F$ ,  $O^-(z)$  est inclus dans  $F$ ; donc  $J_f$  est contenu dans  $F$ , et on a :

**Lemme 4.4.** *L'ensemble de Julia  $J_f$  est  $P_f$ -minimal.*

Alors, d'après la proposition 3.9,  $J_f$  supporte une unique mesure  $P_f$ -invariante. On en déduit, d'après la proposition 3.9 :

**Proposition 4.5.** *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une fraction rationnelle de degré supérieur ou égal à 2. Soit  $z$  dans l'ensemble de Julia  $J_f$ . Alors la mesure limite  $\nu_z$  est égale à une mesure  $\lambda$ , appelée mesure de Lyubich, invariante par  $P_f$  :*

$$\nu_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z P_f^k} = \lambda.$$

De plus, presque toute trajectoire inverse  $\underline{z} = (z_k)_{n \geq 1}$  partant de  $z$  de la marche aléatoire associée à  $P_f$  vérifie

$$\nu_{\underline{z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{z_k} = \lambda.$$

Ainsi, les orbites inverses des éléments de  $J_f$  sont équidistribuées dans  $J_f$ .



## 5 Mesures invariantes sur des espaces projectifs

Considérons le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V = \mathbb{R}^d$ , pour un entier naturel non-nul  $d$ , et l'espace projectif associé  $X = \mathbb{P}(V)$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité borélienne sur le groupe linéaire de  $V$ , noté  $\mathrm{GL}(V)$ . Notons  $\Gamma_\mu$  le plus petit sous-semi-groupe de  $\mathrm{GL}(V)$  tel que  $\mu(\Gamma_\mu) = 1$ , et  $G_\mu$  son adhérence pour la topologie de Zariski; rappelons que l'adhérence de Zariski d'un semi-groupe est un groupe : en particulier,  $G_\mu$  est un groupe.

On définit avec le groupe  $G_\mu$  une marche aléatoire sur l'espace  $X = \mathbb{P}(V)$  : en effet, considérons l'espace  $B = G_\mu^{\mathbb{N}^*}$  muni de la mesure de probabilité  $\beta = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$ . Si la suite issue du point  $x \in X$  est, au temps  $n$ , en un point  $x_n$ , elle est en  $x_{n+1} = A_n \cdot x_n$  au temps  $n + 1$ , où  $A_n$  est une matrice de  $\mathrm{GL}(V)$ ; la suite des  $(A_n)_{n \geq 1}$  est donnée par la loi  $\beta$ . Cette marche aléatoire est régie par l'opérateur de moyenne  $P_\mu$  :

$$P_\mu \begin{cases} \mathcal{C}^0(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(X) \\ \phi & \longmapsto & \int_{\Gamma_\mu} \phi(g \cdot x) d\mu(g) \end{cases} .$$

Par exemple, prenons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et  $\Gamma$  le sous-semigroupe de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  engendré par  $A$  et  $B$ . Considérons  $\mu = \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B)$  la mesure définie sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  de support  $\{A, B\}$ , et une représentation réelle  $(V, \rho)$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . La marche aléatoire associée sur  $X = \mathbb{P}(V)$  est celle où, si la suite issue du point  $x \in X$  est, au temps  $n$ , en un point  $x_n$ , elle a une chance sur deux d'être en  $Ax_n$  au temps  $n + 1$ , et une chance sur deux d'être en  $Bx_n$ .

Dans ce type de configuration, on a un résultat analogue à la proposition 3.9 :

**Théorème 5.1.** (*Mesures stationnaires*) Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $V = \mathbb{R}^d$  et  $X = \mathbb{P}(V)$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathrm{GL}(V)$  telle que  $\Gamma_\mu$  est d'adhérence de Zariski semi-simple. Alors l'application suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \{ \text{mesures de probabilité } \mu\text{-ergodiques sur } X \} &\longleftrightarrow \{ \text{fermés } \Gamma_\mu\text{-minimaux de } X \} \\ \nu &\longmapsto \mathrm{Supp} \nu \end{aligned}$$

Ce théorème est démontré dans l'article [1].

On peut ajouter un complément à cette proposition :

**Proposition 5.2.** *Soit  $G$  un sous-groupe algébrique de  $\mathrm{GL}(V)$ , qu'on suppose isomorphe à  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  pour un entier  $m \in \mathbb{N}^*$  ; soit  $\Gamma$  un sous-semi-groupe Zariski-dense de  $G$  ; soit  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$ . Notons  $T_0$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures dans  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ , et  $T$  son image  $G$ . Les cinq énoncés suivants sont équivalents :*

1.  $G/H$  contient un compact  $\Gamma$ -invariant
2.  $G/H$  est compact
3.  $H$  contient un conjugué de  $AN$
4.  $(G/H)^T$  est non-vide.
5.  $(G/H)^T$  est un singleton.

On aboutit à un théorème, prouvé dans [1], permettant de classifier les mesures invariantes sur un espace projectif :

**Théorème 5.3.** *Soit  $d \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $V = \mathbb{R}^d$  et  $X = \mathbb{P}(V)$ . Soit  $\Gamma \subset \mathrm{GL}(V)$  un sous-semi-groupe de  $\mathrm{GL}(V)$  telle que l'action de  $\Gamma$  sur  $V$  soit semi-simple, d'adhérence de Zariski  $G$  semi-simple. Notons  $AN$  un sous-groupe résoluble déployé (Zariski-connexe) maximal de  $G$ ,  $P$  son normalisateur, et  $M$  l'ensemble  $P/AN$ . Alors  $M$  agit sur  $X^{AN}$ , qui est l'ensemble des points fixes de l'action de  $AN$  sur  $X$ , et l'application suivante est alors une bijection :*

$$\begin{aligned} \{\text{fermés } \Gamma\text{-minimaux de } X\} &\longleftrightarrow \{M\text{-orbites dans } X^{AN}\} \\ F &\longmapsto G \cdot F \cap X^{AN} \end{aligned}$$

Dans le cas où le groupe  $G$ , l'adhérence de  $\Gamma$ , est isomorphe à  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  pour un certain entier  $m$ , l'ensemble  $M$  est trivial, et la classification des mesures ergodiques est très simple :

**Théorème 5.4.** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $(V = \mathbb{R}^d, \rho)$  une représentation réelle de  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ . Notons  $G = \rho(\mathrm{SL}(m, \mathbb{R}))$  ; soit  $\Gamma \subset G$  un sous-semi-groupe de  $G$  telle que l'action de  $\Gamma$  sur  $V$  soit semi-simple, d'adhérence de Zariski  $G$ . Notons  $AN$  le sous-groupe des matrices triangulaires dans  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ , et  $X^{AN}$  l'ensemble des points fixes de l'action de  $\rho(AN)$  sur  $X$ . L'application suivante est alors une bijection :*

$$\begin{aligned} \{\text{mesures de probabilité } \mu\text{-ergodiques sur } X\} &\longleftrightarrow X^{AN} \\ \nu &\longmapsto (G \cdot \mathrm{Supp} \nu) \cap X^{AN} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $d$  et  $m$  sont égaux,  $X^{AN}$  est un singleton, et il n'y a qu'une seule mesure invariante. Mais ce n'est pas nécessairement le cas : on peut par exemple prendre, pour représentation de  $\mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ , la puissance extérieure  $\Lambda^k \mathbb{R}^m$  pour un entier  $k$  supérieur ou égal à 2. Cette représentation est aussi irréductible, donc semi-simple. La dimension  $d$  est alors égale à  $\binom{m}{k}$ . On a alors en général plus d'une de mesures ergodiques, et donc une infinité de mesures invariantes.

Ainsi, dans l'exemple de l'action des deux matrices  $A$  et  $B$ , on peut montrer que l'adhérence de Zariski du semi-groupe engendré par  $A$  et  $B$  est  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  ; en prenant son action sur  $X = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ , on montre, puisqu'il y a un seul point fixe sous l'action des matrices triangulaires supérieures, qu'il y a une unique mesure stationnaire, appelée mesure de Furstenberg : les marches aléatoires s'équidistribuent sur son support. Ce support peut être l'espace tout entier, mais il peut aussi, par exemple, être un espace de Cantor. Furstenberg a montré qu'on pouvait trouver des semi-groupes pour lesquels la mesure de Furstenberg est égale à la mesure de Haar.

Dans le cas des marches aléatoires sur les espaces  $\mathbb{R}^d$ , on a le résultat suivant :

**Théorème 5.5.** (POLYA) *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ , à support compact, centrée. Alors la marche aléatoire correspondante sur  $\mathbb{R}^d$  est récurrente, c'est-à-dire que presque toute trajectoire revient infiniment souvent dans un compact contenant l'origine, si et seulement si  $d$  vaut 1 ou 2.*

Une question se pose alors : ce résultat se transpose-t-il au contexte des marches aléatoires sur les espaces homogènes ? Posons  $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$ , ou plus généralement choisissons un groupe de Lie algébrique réel. Quels sont les sous-groupes algébriques  $H$  de  $G$  pour lesquels il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$  dont le support engendre un sous-groupe Zariski-dense dans  $G$  et tels que la marche aléatoire sur  $G/H$  correspondante est récurrente ?

Les éléments de réponse suivants sont déjà connus : il est suffisant que  $G/H$  soit compact, et, quand  $m = 2$ , et  $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , cette condition est aussi nécessaire. Existe-t-il des exemples d'espaces homogènes  $G/H$  non compacts, avec  $G = \mathrm{SL}(m, \mathbb{R})$  et  $H$  un sous-groupe algébrique de  $G$  pour lesquels la marche est récurrente ?

## Références

- [1] Y. Benoist and J.-F. Quint. Random walks on projective spaces. 2012.
- [2] L. Breiman. The strong law of large numbers for a class of markov chains. *Ann. Math. Statist.*, 31 :801–803, 1960.
- [3] A. Douady and J. H. Hubbard. *Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes.* Societe Mathematique de France, 2007.
- [4] M. Lyubich. Conformal geometry and dynamics of quadratic polynomials.
- [5] M. Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the riemann sphere. *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, pages 351–385, Septembre 1983.
- [6] M. Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials, i-ii. *Acta Math.*, 1997.
- [7] J. Milnor. *Dynamics in One Complex Variable.*
- [8] A. Raugi. Théorie spectrale d’un opérateur de transition sur un espace métrique compact. *Annales de l’IHP*, 28(2) :281–309, 1992.
- [9] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1973.
- [10] N. Steinmetz. *Rational Iteration.* de Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 1993.