Introduction au domaine de RECHERCHE

Formation Interuniversitaire de Mathémariques Fondamentales et Appliquées
Diplôme de l'École Normale Supérieure de Paris

Équation d'Euler et principe de moindre action

Auteur :
Aymeric Baradat

Encadrant :
Yann Brenier

16 décembre 2015

Sommaire

Introduction

Les équations d'Euler incompressibles, établie par Léonhard Euler en 1755, régissent le mouvement d'un fluide **parfait** (c'est à dire sans viscosité ou en d'autres termes sans frottement interne) et **non compressible** (c'est à dire dont chaque partie conserve son volume durant le mouvement). Plus précisément, elles donnent les lois selon lesquelles se transforme le champ de vitesse d'un fluide parfait et incompressible au cours de son évolution. Dans un domaine D de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et pour des temps appartenant à un intervalle I de $\mathbb{R}$, si $v(t,x)$ dénote la vitesse du fluide au temps $t \in I$ et à la position $x \in D$, les équations d'Euler prennent la forme suivante :

$$\partial_t v(t,x) + v(t,x) \cdot \nabla v(t,x) = -\nabla p(t,x) + F(t,x) \text{ dans } I \times D \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0 \text{ dans } I \times D \tag{2}$$

$$v(t,x) \text{ est tangent au bord } D \text{ sur } I \times \partial D. \tag{3}$$

Dans (1), F dénote la somme des forces extérieures s'appliquant au fluide et p le champ scalaire de pression. C'est d'ailleurs la seule fois que l'on écrira les forces extérieures car dans la plupart des cas (forces conservatives), il est facile de se ramener au cas de forces extérieures nulles en modifiant quelque peu la pression. Cette équation n'est ni plus ni moins que le principe fondamental de la dynamique appliqué à une "particule de fluide" situé à l'instant t à la position x. L'équation (2) exprime de façon locale la contrainte d'incompressibilité. L'équation (3), quant à elle, exprime le fait que le fluide ne peut pas sortir du domaine D.
Revenons sur le champ de pression p. Ce qu'il est important de comprendre, c'est que le champ de pression *n'est pas* indépendant de l'évolution, et ne peut se calculer indépendamment des solutions elles-mêmes. En fait $-\nabla p$ est une force s'appliquant au fluide du fait de son incompressibilité. Si l'on applique formellement l'opérateur divergence à (1), on observe que :

$$-\Delta p(t,x) = \partial_t \operatorname{div} v(t,x) + \operatorname{tr}(Dv \cdot Dv) + v(t,x) \cdot \nabla \operatorname{div} v(t,x).$$

Donc en utilisant (2), on voit que :

$$-\Delta p(t,x) = \operatorname{tr}(Dv \cdot Dv),$$

c'est à dire que la pression est la solution d'un problème elliptique faisant intervenir le champ de vitesse. Ce phénomène participe de façon déterminante dans la difficulté que représente l'étude des équations d'Euler.
La reformulation des problèmes de l'hydrodynamique par le biais du principe de moindre action apporte un regard différent sur cette notion de pression, comme on va le voir dans les paragraphes suivants.

Notes bibliographiques Euler a publié en 1757 le mémoire [11] dans lequel les équations portant son nom sont exposées pour la première fois. Par la suite ces équations ont donné lieu à une énorme quantité d'études parmis lesquelles on retiendra les travaux de Gunter ([12]) et Lichtenstein ([13]) au cours desquels les auteurs prouvent l'existence et l'unicité de solutions localement en temps. Dans les années 60, une grande avancée a été faite lorsque Kato et Yudovich ont démontré l'existence de solutions en dimension 2 pour des temps arbitrairement longs (voir par exemple [17]).

1 Les équations d'Euler comme équations extrémales du principe de moindre action

Le outils modernes de mécanique nous poussent à vouloir écrire un principe de moindre action pour un fluide en mouvement. Il faut alors se demander ce qu'est l'*état* d'un fluide. Si le fluide se meut dans un domaine D (disons de $\mathbb{R}^d$ même si toute la théorie fonctionne dans le cadre des variétés riemaniennes), décrire un état correspond à donner la position de chacune des particules formant le fluide. Si on dispose d'un ensemble $\mathcal{I}$ indexant chacune des particules, un état est donc une simple application de $\mathcal{I}$ dans D. Mais n'importe quelle application ne convient pas. Un état n'est admissible que s'il satisfait la contrainte d'incompressibilité. Comment la définir ? Une façon commode est de choisir (de façon arbitraire !) une configuration possible du fluide, disons $\phi_0 : \mathcal{I} \to D$, et donc incompressible. Les autres états du fluides sont décris par les applications $\phi : \mathcal{I} \to D$ telles que $F := \phi \circ \phi_0^{-1} : D \to D$ preserve le volume. De façon classique, on dit qu'une application F de D dans D préserve le volume si c'est un difféomorphisme satisfaisant la contrainte d'incompressibilité locale :

$$\det(\mathrm{d}\, F) \equiv 1 \text{ sur } D. \tag{4}$$

Modulo le choix d'indexation, l'ensemble des états d'un fluide est donc isomorphe à l'ensemble des difféomorphismes de D satisfaisant (4), dans la composante connexe de l'identité. On note cet ensemble $\mathrm{SDiff}(D)$, et le considérer plutôt que de considérer les applications de $\mathcal{I}$ dans D revient à choisir une façon d'indexer l'ensemble des particules par D lui-même. L'espace $\mathrm{SDiff}(D)$ dispose d'une structure (formelle) de groupe de Lie de dimension infinie. Premièrement, il est clair que $\mathrm{SDiff}(D)$ est un groupe pour la composition. Ensuite, un chemin lisse $\Phi = (\phi_t)_{t\in I}$ tracé sur $\mathrm{SDiff}(D)$ (que l'on appellera un "flot") représente une trajectoire possible pour le fluide. Le chemin $(\phi_t(a))_{t\in I}$ correspond au trajet suivi par la particule indexée par $a \in D$. En conséquence, on peut représenter de façon naturelle la dérivée temporelle de Φ à l'instant t par le champ de vecteurs qui en un point z de D est égal à la vitesse de la particule située en z à l'instant t :

$$\begin{cases} v_\Phi(t,z) & = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\phi_t(y), \\ \phi_t(y) & = z. \end{cases}$$

Ce champ de vecteur est visiblement tangent au bord de D. Il est également à divergence nulle puisqu'en dérivant (4) par rapport au temps, on obtient en tout $t \in I$, et tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \det(\mathrm{d}\,\phi_t(x)) = \det(\mathrm{d}\,\phi_t(x)) \operatorname{tr} \left[\mathrm{d}\,\phi_t(x)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \mathrm{d}\,\phi_t(x) \right] \\
&= \operatorname{tr} \left[\mathrm{d}\,\phi_t(x)^{-1} \mathrm{d}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \phi_t(x) \right] \\
&= \operatorname{tr} \left[\mathrm{d}\,\phi_t(x)^{-1} \mathrm{d}[v(t, \phi_t(x))] \right] \\
&= \operatorname{tr} \left[\mathrm{d}\,\phi_t(x)^{-1} \mathrm{d}\, v_\Phi(t, \phi_t(x))\, \mathrm{d}\,\phi_t(x) \right] \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{d}\, v_\Phi(t, \phi_t(x))) = \operatorname{div} v_\Phi(t, \phi_t(x)).
\end{aligned}$$

De plus, tout champ de vecteur tangent au bord et à divergence nulle est la représentation de la dérivée temporelle d'un flot passant par ϕ_t à l'instant t. Il suffit en effet de considérer le flot (au sens solution de l'équation différentielle) induit par ce champ de vecteur partant de ϕ_t à l'instant t et de vérifier qu'il est bien incompressible.
On a donc l'isomorphisme linéaire :

$$\mathcal{T}_\phi \operatorname{SDiff}(D) \simeq \{\text{champs de vecteurs à divergence nulle sur } D\}.$$

Cet isomorphisme est *invariant à droite*, c'est à dire que si $h \in \operatorname{SDiff}(D)$, la dérivée temporelle de $(\phi_t \circ h)_{t \in I}$ à l'instant t dispose de la même représentation que celle de Φ à l'instant t, ce qui correspond bien à l'idée selon laquelle le champ de vitesse observé au cours du mouvement d'un fluide ne dépend pas de la façon d'indexer les particules du fluide. Définissons alors l'énergie cinétique du fluide suivant le flot Φ à l'instant t :

$$E(\Phi, t) := \int_D |v_\Phi(t, x)|^2 \,\mathrm{d}\, x.$$

Cette énergie est également invariante à droite.
Le principe de moindre action appliqué au mouvement d'un fluide dans l'état ϕ_0 à l'instant initial et dans l'état ϕ_T à l'instant T prévoit donc que le mouvement se fera selon une trajectoire Φ minimisant l'action :

$$\mathcal{A}(\Phi) := \int_0^T E(\Phi, t) \,\mathrm{d}\, t \leq \int_0^T E(\tilde{\Phi}, t) \,\mathrm{d}\, t =: \mathcal{A}(\tilde{\Phi}),$$

où $\tilde{\Phi}$ est n'importe quelle trajectoire joignant ϕ_0 à ϕ_T en temps T (on écrit $\tilde{\Phi} \in \operatorname{Adm}(\phi_0, \phi_T)$). On a ramené notre problème à l'étude des géodésiques d'un groupe de Lie de dimension infinie munit d'une métrique invariante à droite.
Montrons que si un tel minimiseur Φ existe, le champ de vecteurs qui lui est associé est solution des équations d'Euler. Comme on a déjà vu que ce champ de vecteurs est tangent au bord et à divergence nulle, montrons qu'il satisfait (1). Pour ce faire, choisissons un champ de vecteurs ξ dépendant du temps et satisfaisant les conditions :

$$\begin{gathered}
\forall t \in [0, T],\ \operatorname{div} \xi_t \equiv 0 \text{ sur } D, \\
\xi_0 = \xi_T = 0 \text{ sur } D, \\
\forall t \in [0, T],\ \xi_t \text{ est tangent au bord de } D.
\end{gathered}$$

On utilise ce champ de vecteurs pour modifier légèrement Φ. Pour $\epsilon > 0$, on définit :

$$\Phi^\epsilon := \left(\exp_{\xi_t}(\epsilon, \phi_t)\right)_{t\in[0,T]},$$

où $\exp_\xi(t,x)$ est le point atteint par la solution de l'équation différentielle associée à ξ partant de x à l'instant t. Φ^ϵ est un flot joignant ϕ_0 à ϕ_T en temps T, le principe de moindre action implique donc que pour chaque ϵ :

$$\mathcal{A}(\Phi) \leq \mathcal{A}(\Phi^\epsilon).$$

Mais alors du simple calcul différentiel montre que :

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathcal{A}(\Phi^\epsilon) - \mathcal{A}(\Phi)}{\epsilon} &= \int_0^T \int_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\phi_t(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[\xi_t(\phi_t(x))\right] \mathrm{d}\,t \,\mathrm{d}\,x \\ &= -\int_0^T \int_D \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\phi_t(x) \cdot \xi_t(\phi_t(x)) \,\mathrm{d}\,t \,\mathrm{d}\,x. \end{aligned}$$

Or on remarque que :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,t^2}\phi_t(x) = \partial_t v_\Phi(t, \phi_t(x)) + v_\Phi(t, \phi_t(x)) \cdot \nabla v_\Phi(t, \phi_t(x)),$$

de sorte qu'en changeant de variable et en utilisant l'incompressibilité de ϕ_t, on obtient pour tout ξ satisfaisant les propriétés décrites précédemment :

$$\int_0^T \int_D \left[\partial_t v_\Phi(t,x) + v_\Phi(t,x) \cdot \nabla v_\Phi(t,x)\right] \cdot \xi_t(x) \,\mathrm{d}\,t \,\mathrm{d}\,x = 0.$$

En conséquence, en choisissant correctement ξ, on voit que pour tout t dans $]0,T[$ et pour tout champ de vecteurs à divergence nulle ψ :

$$\int_D \left[\partial_t v_\Phi(t,x) + v_\Phi(t,x) \cdot \nabla v_\Phi(t,x)\right] \cdot \psi(x) \,\mathrm{d}\,x = 0,$$

et un résultat classique de géométrie différentielle implique que

$$\partial_t v_\Phi(t,x) + v_\Phi(t,x) \cdot \nabla v_\Phi(t,x)$$

est le gradient d'un champ scalaire, que l'on note $p(t,x)$ et que l'on appelle la pression. On a bien vérifié que le champ de vecteurs v_Φ statisfaisait (1).
D'autre part, un résultat plus difficile montre que toutes les solutions lisses des équations d'Euler sont des minimiseurs de l'action à conditions aux limites fixées (au moins localement en temps), j'en reparlerai au paragraphe 4.
On peut donc caractériser les solutions lisses des équations d'Euler comme des géodésiques sur l'espace des difféomorphismes préservant le volume munis de sa métrique naturelle.

Notes bibliographiques C'est Vladimir Arnol'd qui propose cette interprétation des équations d'Euler dans [4]. Il exposera ces idées à nouveau dans le livre très complet [5]. De façon bien plus générale que ce que j'ai écrit, il montre que les géodésiques des groupes de Lie de dimension infinie munis d'une métrique invariante à droite satisfont certaines équations. Dans le cas où le groupe de Lie est le groupe des difféomorphismes préservant le volume d'une variété riemanienne, ces équations coïncident avec les équations d'Euler. Plus tard, Ebin et Mardsen publieront l'article [10] dans lequel ils prouvent l'existence et l'unicité de telles géodésiques dans le cas où les points extrémaux sont proches dans une norme Sobolev d'indice élevé.

2 Le cadre lisse présente des lacunes

Cependant, le formalisme développé dans la section précédente a des limites. Outre le fait qu'il est difficile de montrer des résultats d'existence à cause du manque de complétude de $\mathrm{SDiff}(D)$, il est même possible de démontrer qu'en dimension 3, certains difféomorphismes ϕ de $\mathrm{SDiff}([0,1]^3)$ ont la propriété suivante :

> Pour tout chemin lisse Φ tracé sur $\mathrm{SDiff}(D)$ joignant l'identité à ϕ en temps 1, il existe un chemin lisse $\tilde{\Phi}$ tracé sur $\mathrm{SDiff}(D)$ joignant l'identité à ϕ en temps 1 vérifiant :
>
> $$\mathcal{A}(\tilde{\Phi}) < \mathcal{A}(\Phi).$$

Pour n'en dire qu'un mot, le contre-exemple est construit en choisissant un difféomorphisme h de $[0,1]^2$ pour lequel la contrainte selon laquelle les particules ne peuvent pas se croiser (l'injectivité des difféomorphismes) est très restrictive du point de vue de l'action. En conséquence, en choisissant :

$$\phi(x_1, x_2, x_3) := (h(x_1, x_2), x_3),$$

et en exploitant la troisième dimension on peut construire des flots dont ϕ est la condition finale d'actions strictement plus petites que n'importe quel flot menant à h en dimension 2. Mais alors un flot menant à ϕ avec une action basse ne conserve pas les plans horizontaux, et si Φ est un tel flot, on peut construire un flot $\tilde{\Phi}$ au cours duquel les particules ont des mouvements verticaux moins amples, ce qui réduit l'action et donne le résultat.
Ce résultat, bien qu'il n'affirme rien quant à l'existence ou à la non-existence de solutions pour le problème dans sa formulation sous forme d'équation aux dérivées partielles avec condition initiale, donne envie de comprendre s'il existe un cadre dans lequel toute condition finale peut être atteinte par un flot minimisant l'énergie, et si oui par quel type de flot. En d'autres termes, on voudrait définir un cadre dans lequel une suite minimisante de chemins de difféomorphismes convergerait. C'est ce que l'on va faire dans le paragraphe suivant.

Notes bibliographiques La construction de ce contre-exemple est dû à Shnirelman et a été publiée dans [15].

3 Définition de deux modèles plus généraux

Une façon classique de trouver une solution à un problème variationnel est d'élargir la classe des objets admissibles, et de la munir d'une topologie telle que la fonctionnelle que l'on veut minimiser soit semi-continue inférieurement et propre. L'existence de minimiseurs est alors une évidence, et le problème difficile devient celui de comprendre leur comportement, et en particulier leur régularité. Pour le problème d'Euler, on peut le faire de deux façons différentes : ou bien on adopte le point de vue lagrangien, c'est à dire que l'on suit le mouvement de chacune des particules, ou bien on adopte le point de vue eulérien dans lequel on s'interesse au champ de vecteurs représentant la vitesse des particules. Ce changement de cadre va appeler de nouvelles notions que l'on commence par définir.

Notations Dans la suite, on définira des flots généralisés sur l'espace temporel $I := [0, T]$. On dénotera par :

— $\Omega(D)$ l'ensemble des chemins continus $\omega : [0, T] \to D$ munis de la topologie de la convergence uniforme,

— e_t l'application de $\Omega(D)$ dans D qui à ω associe $\omega(t)$,

— A l'application semi-continue inférieurement sur $\Omega(D)$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} A: & \Omega(D) & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & \omega & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T |\dot\omega(t)|^2 \,\mathrm{d}\, t & \text{si } \omega \in W^{1,2}([0,T];D), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \end{array}$$

— $f \sharp \mu$ la mesure image d'une mesure μ sur un espace mesurable $(X, \mathcal{F}_X)$ par une application mesurable $f : (X, \mathcal{F}_X) \to (Y, \mathcal{F}_Y)$. C'est une mesure sur Y satisfaisant :

$$\forall F \in \mathcal{F}_Y,\ f \sharp \mu(F) = \mu(f^{-1}(A)).$$

En outre, une famille de mesures $(\mu_y)_{y \in Y}$ sur un même espace mesurable $(X, \mathcal{F}_X)$ indexée par un espace mesuré $(Y, \mathcal{F}_Y, \nu)$ sera dite mesurable si pour toute application borélienne $f : X \to \mathbb{R}$:

$$y \to \int_X f(x) \mu_y(\mathrm{d}\, x)$$

est une application mesurable. On note alors :

$$\int_Y \mu_y \nu(\mathrm{d}\, y)$$

la mesure sur X qui pour toute fonction mesurable positive $f : X \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\int_X f(x) \left[\int_Y \mu_y \nu(\mathrm{d}\, y)\right](\mathrm{d}\, x) = \int_Y \left[\int_X f(x) \mu_y(\mathrm{d}\, x)\right] \nu(\mathrm{d}\, y).$$

Le point de vue lagrangien Ici, on généralise la notion de chemin de difféomorphismes $\Phi = (\phi_t)_{t \in I}$ préservant la mesure de Lebesgue λ_D sur un domaine D de $\mathbb{R}^d$. Un tel flot correspond à une façon d'indexer une famille de chemins tracés sur D : à chaque $x \in D$ est associé le chemin $t \mapsto \phi_t(x)$. Ces chemins satisfont la contrainte d'incompressibilité, que l'on va ici écrire de la façon suivante :

$$\forall t \in I,\ \phi_t \sharp \lambda_D = \lambda_D.$$

Ils satisfont aussi la condition aux limites correspondant au fait que le chemin associé à la particule x va de $\phi_0(x)$ à $\phi_T(x)$. Par contre, ces chemins satisfont aussi certaines contraintes qui ne semblent pas intrinsèques au problème au sens où il n'y a pas de raison a priori pour que la nature de l'équation impose ces propriétés à ses solutions. Par exemple, deux chemins ne peuvent pas se croiser, se réunir, se diviser, ils doivent être lisses... On veut donc trouver une autre façon d'indexer des chemins en relaxant ces contraintes paraissant restrictives. A une particule (c'est à dire à un point x de D), on n'associe plus un chemin mais *une mesure de probabilité η_x sur l'ensemble des chemins tracés sur D*, un flot n'est donc plus un chemin de difféomorphismes mais *une famille* $\boldsymbol{\eta} := (\eta_x)_{x \in D}$ (mesurable, on va voir tout de suite pourquoi) *de mesures de probabilité sur $\Omega(D)$, indexée par D* (ce choix étant d'ailleurs complètement arbitraire). On autorise donc aux particules de se diffuser en suivant plusieurs chemins distincts. La position de la particule x à un instant t n'est plus déterminée par un point, mais par la mesure de probabilité :

$$e_t \sharp \eta_x.$$

De plus, les seules contraintes que l'on impose reliant les mesures associées à différentes particules seront des généralisations des contraintes d'incompressibilité et de condition aux limites, de sorte que les particules sont autorisées à suivre des chemins non-lisses ou à se croiser.

Refléchissons à la façon de définir ces contraintes grâce à la mesurabilité de $\boldsymbol{\eta}$. En ce qui concerne l'incompressibilité, on voit que l'on doit imposer que la superposition de chacunes des mesures représentant la position des particules conduise à λ_D. En d'autres termes :

$$\int_D e_t \sharp \eta_x \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = e_t \sharp \int_D \eta_x \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = \lambda_D.$$

Pour ce qui est des conditions aux limites, comme dans le cas d'un flot classique, elle doit donner la position initiale et finale de chaque particule. Comme désormais, cette position est déterminée par une mesure, cela revient pour chaque $x \in D$, à prescrire :

$$e_0 \sharp \eta_x \quad \text{et} \quad e_T \sharp \eta_x.$$

Dans ce modèle, l'action d'une particule au cours du mouvement n'est plus :

$$A(t \to \phi_t(x))$$

mais son analogue direct correspondant à la somme des énergies des chemins suivis par la particule :

$$\int_{\Omega(D)} A(\omega)\eta_x(\mathrm{d}\,\omega).$$

En conséquence, l'action totale du flot est donnée par :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{2}\int_D \int_{\Omega(D)} A(\omega)\eta_x(\mathrm{d}\,\omega)\,\mathrm{d}\,x,$$

de sorte que l'on peut donner la définition suivante :

Définition 3.1 (Solution généralisée au problème d'Euler, version lagrangienne)**.** Soient $\boldsymbol{\mu}^i := (\mu_x^i)_{x\in D}$ et $\boldsymbol{\mu}^f := (\mu_x^f)_{x\in D}$ deux familles mesurables de mesures de probabilité sur D satisfaisant :

$$\int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = \int_D \mu_x^f \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = \lambda_D.$$

1. On dit que $\boldsymbol{\eta} := (\eta_x)_{x\in D}$ est un flot lagrangien admissible entre $\boldsymbol{\mu^i}$ et $\boldsymbol{\mu^f}$ et on note $\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$ si c'est une famille mesurable de mesures de probabilité telle que :
   — pour presque tout $x \in D$,
   $$e_0 \sharp\, \eta_x = \mu_x^i \quad \text{et} \quad e_T \sharp\, \eta_x = \mu_x^f,$$
   — pour tout $t \in [0, T]$,
   $$\int_D e_t \sharp\, \eta_x \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = e_t \sharp \int_D \eta_x \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = \lambda_D.$$
   —
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) < \infty.$$
2. $\boldsymbol{\eta}$ est une solution lagrangienne du problème d'Euler généralisé entre $\boldsymbol{\mu}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^f$ si :
   —
   $$\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f),$$
   — pour tout $\tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$:
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \le \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{\eta}}).$$

Remarque 3.1

On a imposé des conditions initiales et finales pour presque tout x *car c'est le maximum que l'on peut obtenir des méthodes variationnelles que l'on utilise pour construire des solutions. En revanche, toutes les grandeurs calculables à partir des flots dépendent de l'intégrale en* x *des* η_x *et donc ne souffrent* *pas d'un changement de ceux-ci sur un ensemble negligeable de x.*

Remarque 3.2

Si on dispose de deux difféomorphismes ϕ^i et ϕ^f, on peut en déduire des conditions initiales et finales pour le problème généralisé en regardant pour chaque x de D :

$$\mu_x^i := \delta_{\phi^i(x)} \quad \text{et} \quad \mu_x^f := \delta_{\phi^f(x)}.$$

Si de plus on connait un chemin de difféomorphismes $(\phi_t)_{t\in[0,T]}$, on peut en déduire un flot lagrangien admissible entre $(\mu_x^i)_{x\in D}$ et $(\mu_x^f)_{x\in D}$ en considérant pour chaque x de D :

$$\eta_x := \delta_{t\mapsto\phi_t(x)}.$$

Le point de vue eulérien Une autre généralisation possible pour le problème d'Euler consiste à travailler sur les champs de vitesses des particules en autorisant le fait que deux particules différentes, même au même point, peuvent suivre des vecteurs différents. C'est aussi une façon d'autoriser des phénomènes tels que le croisement de deux particules. Pour faire cela, on décrit la position d'une particule x à l'instant t par une mesure de probabilité μ_x^t sur D de sorte que pour chaque t, $(\mu_x^t)_{x\in D}$ soit mesurable, et on suppose que cette mesure de probabilité évolue sous l'action du champ de vecteurs v_x^t (champ ayant quelques propriétés d'integrabilités et de mesurabilité en x) dépendant de la particule. Cela signifie qu'au sens des distributions :

$$\partial_t \mu_x^t + \operatorname{div}(v_x^t \mu_x^t) = 0.$$

Il est alors facile d'imposer une contrainte liée à l'incompressibilité :

$$\forall t \in [0,T], \quad \int_D \mu_x^t \,\mathrm{d}\, x = \lambda_D,$$

et une contrainte liée aux conditions au bord en prescrivant μ_0^x et μ_x^t pour presque chaque x. L'action du fluide au cours de son mouvement se généralise également naturellement sous la forme :

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}\int_D \int_0^T \int_D |v_x^t(y)|^2 \mu_x^t(\mathrm{d}\, y)\,\mathrm{d}\, t\,\mathrm{d}\, x,$$

où $\boldsymbol{\mu} := (\mu_x^t)_{t\in[0,T],x\in D}$ et $\boldsymbol{v} := (v_x^t)_{t\in[0,T],x\in D}$. On peut alors donner la définition d'une solution du problème généralisé dans sa version eulérienne :

Définition 3.2 (Solution généralisée au problème d'Euler, version eulérienne)**.** Soient $\boldsymbol{\mu}^i := (\mu_x^i)_{x\in D}$ et $\boldsymbol{\mu}^f := (\mu_x^f)_{x\in D}$ deux familles mesurables de mesures de probabilité sur D satisfaisant :

$$\int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = \int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = \lambda_D.$$

1. Un flot eulérien est un couple $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v})$ composé d'une famille mesurable de mesures de probabilité dépendant du temps $\boldsymbol{\mu} := (\mu_x^t)_{t\in[0,T],x\in D}$ et d'une famille mesurable de champs de vecteurs dépendant du temps $\boldsymbol{v} := (v_x^t)_{t\in[0,T],x\in D}$ telles que pour presque tout x :
$$\int_0^T |v_x^t(y)|\mu_x^t(\mathrm{d}\, y)\,\mathrm{d}\, t < \infty,$$
$$\partial_t \mu_x^t + \mathrm{div}(v_x^t \mu_x^t) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[\times D).$$
2. On dit qu'un flot eulérien $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v})$ est admissible pour le problème d'Euler généralisé entre $\boldsymbol{\mu}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^f$ et on écrit $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{Adm}_e(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$ si :
   - pour presque tout $x \in D$,
   $$\mu_x^0 = \mu_x^i \quad \text{et} \quad \mu_x^T = \mu_x^f,$$
   - pour tout $t \in [0,T]$,
   $$\int_D \mu_x^t \,\mathrm{d}\, x = \lambda_D,$$
   -
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) < \infty.$$
3. $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v})$ est une solution eulérienne au problème généralisé entre $\boldsymbol{\mu}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^f$ si :
   -
   $$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{Adm}_e(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f),$$
   - pour tout $(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{v}}) \in \mathrm{Adm}_e(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$:
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \leq \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{v}}).$$

Remarque 3.3

On peut obtenir des conditions aux limites généralisées à partir de conditions aux limites classiques comme expliqué dans la remarque 3.2. Ensuite, si $\Phi := (\phi_t)_{t\in[0,T]}$ est un chemin de difféomorphismes, on peut en déduire un flot eulérien en considérant pour chaque x de D :
$$\mu_x^t := \delta_{\phi_t(x)} \quad \text{et} \quad v_x := v_\Phi.$$

Equivalence des deux modèles En fait, on remarque que les deux modèles sont équivalents au sens suivants :

Théorème 3.1. *Soient $\boldsymbol{\mu}^i := (\mu_x^i)_{x\in D}$ et $\boldsymbol{\mu}^f := (\mu_x^f)_{x\in D}$ deux familles mesurables de mesures de probabilité sur D satisfaisant :*
$$\int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = \int_D \mu_x^f \lambda_D(\mathrm{d}\, x) = \lambda_D.$$

1. *Si* $\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$ *alors il existe* $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{Adm}_e(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$ *tel que :*
   — *pour presque tout* $x \in D$*, pour tout* $t \in [0, T]$ *:*
   $$\mu_x^t = e_t \sharp \eta_x,$$
   —
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \leq \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}).$$
2. *Pour tout* $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}) \in \mathrm{Adm}_e(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$*, il existe* $\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\mu}^i, \boldsymbol{\mu}^f)$ *tel que :*
   — *pour presque tout* $x \in D$*, pour tout* $t \in [0, T]$ *:*
   $$\mu_x^t = e_t \sharp \eta_x,$$
   —
   $$\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) \leq \mathcal{A}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}).$$

En conséquence, les actions respectives de flots optimaux dans les cas lagrangiens et eulériens sont égales, et la plupart des résultats sur un des deux modèles présente un analogue dans l'autre modèle.

Notes bibliographiques La version lagrangienne du problème généralisé a été présentée pour la première fois par Brenier dans [6] et étendue dans la forme que j'ai décrite ici par Ambrosio et Figalli dans [3]. La version eulérienne du problème généralisée a été introduite par Brenier dans [8]. L'équivalence entre les deux modèles a été établie dans [3] grâce à une théorie de l'équation de continuité développée par DiPerna et Lions dans [9] et réinterprétée par Ambrosio, par exemple dans [1]. Ces résultats, croisés avec un autre article d'Ambrosio et Figalli ([2]) ont permis de déduire un résultat d'existence, d'unicité et de régularité du champ de pression.

4 Résultats connus

En calcul des variations, lorsque l'on relaxe un problème de minimisation auquel on n'arrive pas à trouver de solution, on essaye toujours de démontrer les résultats suivants sur le problème généralisé :

— le problème généralisé a des solutions (c'est en général très facile puisqu'on relaxe le problème de façon à ce que la fonctionnelle à minimiser soit semicontinue inférieurement et propre),

— les solutions classiques du problème sont aussi des solutions du problème généralisé,

— les solutions du problème généralisé ont une certaine régularité (sont classiques, approximables par des solutions classiques, solution d'une équation aux dérivées partielles au sens des distributions ...).

Voyons ce qu'il en est pour notre problème d'Euler généralisé.

Existence de solutions Effectivement, on a le résultat suivant, qui repose sur des arguments classiques de semi-continuité inférieure (bien que le fait qu'il existe des flots admissibles soit un peu technique) :

Théorème 4.1. *On suppose que D est une image lipshitz du cube de dimension d ou du tore de dimension d. Soient $\boldsymbol{\mu}^i := (\mu_x^i)_{x\in D}$ et $\boldsymbol{\mu}^f := (\mu_x^f)_{x\in D}$ deux familles mesurables de mesures de probabilité sur D satisfaisant :*

$$\int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = \int_D \mu_x^i \lambda_D(\mathrm{d}\,x) = \lambda_D.$$

Il existe $\boldsymbol{\eta}$ et $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v})$ respectivement des solutions lagrangienne et eulérienne au problème d'Euler généralisé entre $\boldsymbol{\mu}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^f$.

Solutions classiques et solutions généralisées Les liens existant entre solutions classiques et solutions généralisées est très intéressant : une solution classique est une solution généralisée, et elle est de plus unique dans la classe des solutions généralisées, au moins localement en temps. Une forme faible de ce théorème peut être comprise comme une conséquence du résultat suivant de calcul différentiel :

Théorème 4.2. *Soit f une fonction C^2 sur $\mathbb{R} \times D$ telle qu'en tout point (t, x) de $[0, T] \times D$, la différentielle spatiale seconde de f soit majorée au sens des matrices symétriques par un réel positif C. Supposons également que :*

$$T < \frac{\pi}{\sqrt{C}}.$$

Alors toute solution z_0 de l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) = -\nabla f(t, y(t))$$

est l'unique minimiseur de la fonctionnelle :

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{B}: & H^1([0,T], D) & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \displaystyle\int_0^T \left[\frac{1}{2}|y'(t)|^2 - f(t, y(t))\right] \mathrm{d}\,t \end{array}$$

parmis les courbes z de $H^1([0, T], D)$ satisfaisant $z(0) = z_0(0)$ et $z(T) = z_0(T)$.

En effet, une fois ce résultat connu, si $\Phi := (\phi_t)_{t\in[0,T]}$ est une solution classique et si p est son champ de pression (construit comme au paragraphe 1), pour chaque x de D, $t \mapsto \phi_t(x)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{y}(t) = -\nabla p(t, y(t)).$$

Donc si T est suffisamment petit par rapport à la différentielle seconde de p, c'est l'unique minimiseur de B à extrémités fixées. En conséquence, si $\boldsymbol{\eta}$ est un flot lagrangien satisfaisant les mêmes conditions au bord (pour presque tout x, $e_0 \sharp \eta_x = \delta_{\phi_0(x)}$ et $e_T \sharp \eta_x = \delta_{\phi_T(x)}$), alors pour presque tout x :

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2}|\partial_t \phi_t(x)|^2 - p(t, \phi_t(x))\right] \mathrm{d}\, t \leq \int_D \int_0^T \left[\frac{1}{2}|\dot\omega(t)|^2 - p(t, \omega(t))\right] \mathrm{d}\, t\, \eta_x(\mathrm{d}\, \omega),$$

avec égalité si et seulement si pour presque tout x, $\eta_x = \delta_{t\mapsto\phi_t(x)}$. En intégrant sur D et en utilisant l'incompressibilité de Φ et de $\boldsymbol{\eta}$, on obtient le résultat annoncé.

Densité des flots réguliers Enfin, le dernier résultat dont je voudrais parler concernant le problème d'Euler est le suivant : en dimension $d \geq 3$, les solutions du problème généralisé lagrangien sont approximables par des chemins de difféomorphismes *ayant les mêmes conditions au bord.* Plus précisément :

Théorème 4.3. *Si $d \geq 3$, et si $\boldsymbol{\eta}$ est une solution du problème généralisé entre deux difféomorphismes $\phi^i \in \mathrm{SDiff}(D)$ et $\phi^f \in \mathrm{SDiff}(D)$ (au sens donné par la remarque 3.2), alors il existe une suite de chemins de difféomorphismes $\Phi^k := (\phi^k_t)_{t\in[0,T]}$ joignant ϕ^i à ϕ^f vérifiant :*

1. *pour toute fonction F continue et bornée sur $\Omega(D)$:*

$$\int_D F(t \mapsto \phi^k_t(x))\, \mathrm{d}\, x \underset{k\to\infty}{\to} \int_D \int_{\Omega(D)} F(\omega)\eta_x(\mathrm{d}\, \omega)\, \mathrm{d}\, x,$$

2.

$$\mathcal{A}(\Phi^k) \underset{k\to\infty}{\to} \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}).$$

En particulier, on a le résultat important suivant :

en dimension supérieure ou égale à trois, pour tout ϕ^i et ϕ^f dans $\mathrm{SDiff}(D)$, en notant $\boldsymbol{\delta}_{\phi^i} := (\delta_{\phi^i(x)})_{x\in D}$ et $\boldsymbol{\delta}_{\phi^f} := (\delta_{\phi^f(x)})_{x\in D}$:

$$\min_{\boldsymbol{\eta}\in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\delta}_{\phi^i}, \boldsymbol{\delta}_{\phi^f})} \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta}) = \inf_{\Phi\in \mathrm{Adm}(\phi^i, \phi^f)} \mathcal{A}(\Phi).$$

On dit qu'il n'y a pas de phénomène de gap.
Que se passe-t-il en dimension 2 ?
Là, un phénomène de gap se produit. On peut même démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.4. 1. *Il existe $\phi^f \in \mathrm{SDiff}([0,1]^2)$ tel que pour tout chemin lisse Φ tracé sur $\mathrm{SDiff}(D)$ joignant Id_D à ϕ^f :*

$$\mathcal{A}(\Phi) = \infty.$$

2. *Sur $[0,1]^2$:*

$$\sup_{\boldsymbol{\eta}^i, \boldsymbol{\eta}^f} \left[\min_{\boldsymbol{\eta}\in \mathrm{Adm}_l(\boldsymbol{\eta}^i, \boldsymbol{\eta}^f)} \mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})\right] < \infty.$$

Notes bibliographiques L'existence de solutions pour les problèmes généralisés ont été démontrées par Brenier dans les articles où ils ont été introduits, respectivement [6] pour le problème lagrangien, et [8] pour le problème eulérien. Le fait que les solutions classiques sont des solutions du problème généralisé uniques dans la classe des solutions généralisées a également été établi dans [6]. Enfin, les résultats d'approximation des solutions généralisés par des flots classiques sont issus des résultats très techniques des articles de Schnirelman [15] et [16].

5 Perspective : vers l'équation de Navier-Stokes

Aujourd'hui, la théorie généralisée a atteint un stade relativement mature : si elle n'a pas pour l'instant permis des avancées majeures dans le cadre classique (construction de nouvelles solutions, résultats d'existence de solutions en temps long...), au moins ses propriétés les plus indispensables (celles décrites au paragraphe 4) sont-elles connues. Elle a également permis de développer de nouvelles méthodes de calcul numérique (voir [14]). En revanche, ce type de généralisation pourrait s'appliquer à d'autres équations, et en particulier à l'équation de Navier-Stokes. Pourtant, à ce jour, très peu de choses ont été faites. Au cours de mon mémoire de master 2, sous l'encadrement de Y. Brenier puis de L. Ambrosio, j'ai travaillé sur un modèle préliminaire à une généralisation de type eulérienne du problème de Navier-Stokes, qui correspond au modèle eulérien décrit au paragraphe 3, mais avec un nombre fini de phases. J'ai considéré le problème suivant :

> étant données $2M$ mesures boréliennes sur le tore $\mathbb{T}^d$ $(\mu_k^i)_{k\in[\![1,M]\!]}$ et $(\mu_k^f)_{k\in[\![1,M]\!]}$ satisfaisant :
>
> $$\forall k \in [\![1,M]\!], \quad \mu_k^i(\mathbb{T}^d) = \mu_k^f(\mathbb{T}^d),$$
>
> trouver M mesures boréliennes dépendant du temps $(\mu_k^t)_{k\in[\![1,M]\!],\, t\in[0,T]}$ et M champs de vecteurs dépendant du temps $(v_k^t)_{k\in[\![1,M]\!],\, t\in[0,T]}$ satisfaisant :
>
> $$\forall k \in [\![1,M]\!], \quad \mu_k^0 = \mu_k^i \quad \text{et} \quad \mu_k^T = \mu_k^f, \tag{5}$$
>
> $$\forall k \in [\![1,M]\!], \quad \partial_t \mu_k^t + \operatorname{div}(v_k^t \mu_k^t) + \nu \Delta \mu_k^t = 0, \tag{6}$$
>
> pour lesquels l'action définie par :
>
> $$\mathcal{A}((\mu_k^t, v_k^t)_{k\in[\![1,M]\!],\, t\in[0,T]}) := \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |v_k^t(x)|^2 \mu_k^t(\mathrm{d}\, x)$$
>
> est minimale.

J'ai montré que s'il existait $(\mu_k^t, v_k^t)_{k\in[\![1,M]\!],\, t\in[0,T]}$ satisfaisant (5) et (6) avec action finie, alors il existait une solution au problème. Puis sous des hypothèses (malheureusement assez restrictives), j'ai montré qu'il existait une distribution p, dont la régularité pouvait être étudiée, et telle que pour chaque k de $[\![1, M]\!]$:

$$\partial_t v_k^t(x) + v_k^t(x) \cdot \nabla v_k^t(x) - \nu \Delta v_k^t(x) = -\nabla p(t, x) \text{ dans } \mathcal{D}'(]0, T[\times D).$$

Ceci n'est qu'une étape, et l'objectif de cette démarche est de donner des pistes pour l'étude de ce type de modèles mais avec un nombre infini de phases. On voudrait également définir un modèle généralisé lagrangien de l'équation de Navier-Stokes sur le modèle de celui développé pour l'équation d'Euler, mais comprenant de la diffusion.

Notes bibliographiques Au cours de mes travaux, j'ai repris et adapté les idées de l'article de Brenier [7] dans lequel l'auteur résout le problème d'Euler avec un nombre fini de phases dans l'hypothèse où celles-ci présentent des propriétés d'"homogénéité forte".

Références

[1] Luigi Ambrosio. Transport equation and cauchy problem for non-smooth vector fields. In *Calculus of variations and nonlinear partial differential equations*, pages 1–41. Springer, 2008.

[2] Luigi Ambrosio and Alessio Figalli. On the regularity of the pressure field of brenier's weak solutions to incompressible euler equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 31(4) :497–509, 2008.

[3] Luigi Ambrosio and Alessio Figalli. Geodesics in the space of measure-preserving maps and plans. *Archive for rational mechanics and analysis*, 194(2) :421–462, 2009.

[4] Vladimir Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 16, pages 319–361. Institut Fourier, 1966.

[5] Vladimir I Arnold. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125. Springer, 1998.

[6] Yann Brenier. The least action principle and the related concept of generalized flows for incompressible perfect fluids. *J. Amer. Math. Soc*, 2(2) :225–255, 1989.

[7] Yann Brenier. A homogenized model for vortex sheets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 138(4) :319–353, 1997.

[8] Yann Brenier. Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the euler equations. *Communications on pure and applied mathematics*, 52(4) :411–452, 1999.

[9] Ronald J DiPerna and Pierre-Louis Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3) :511–547, 1989.

[10] David G Ebin and Jerrold Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. *Annals of Mathematics*, pages 102–163, 1970.

[11] L Euler. Principes généraux du mouvement des fluides, acad. roy. sci. belles-lett. berlin (1755).

[12] N.M. Gunter. On the motion of fluid confined in a moving vessel. *USSR Academy of Science Izvestia*, pages 1323–1348, 1503–1532, 1926.

[13] Leon Lichtenstein. Über einige existenzprobleme der hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser flüssigkeiten und die helmholtzschen wirbelsätze. *Mathematische Zeitschrift*, 23(1) :89–154, 1925.

[14] Quentin Mérigot and Jean-Marie Mirebeau. Minimal geodesics along volume preserving maps, through semi-discrete optimal transport. *arXiv preprint arXiv :1505.03306*, 2015.

[15] Alexander I Shnirelman. On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 56(1) :79, 1987.

[16] Alexander I Shnirelman. Generalized fluid flows, their approximation and applications. *Geometric And Functional Analysis*, 4(5) :586–620, 1994.

[17] Victor Iosifovich Yudovich. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 3(6) :1032–1066, 1963.