Sur les champs gaussiens libres discrets

Tianyi BAI, sous la supervision de M. Zhan SHI

Table des matières

1 Introduction

Dans cet article, on présente brièvement le Champ Gaussien Libre Discret (CGLD) en dimensions deux. Il s'agit d'un modèle développé d'abord par les physiciens dans les recherches des systèmes de spin de la théorie quantique, et il est largement utilisé dans les études de la gravité quantique de Liouville, de la déformation des cristaux, etc.. Le concept est apparu en mathématiques avec Kahane en 1985 [8] lorsqu'il a proposé le chaos multiplicatif. De plus, Dynkin dans [3] a introduit la connexion entre CGLD et le champ de temps d'occupation pour les chaînes de Markov, ce qui conduit à de nombreuses autres applications du CGLD dans les études de probabilités, statistiques et finances. Un des plus utile application en mathématique est théorèmes de type Ray-Knight, voyez par exemple Eisenbaum [4], Marcus-Rosen [9], et pour les progrès actuels voyez par exemple Ding, Lee et Peres [7].
L'idée principale dans l'étude du CGLD est d'analyser les asymptotiques, et on va voir un résultat sur les extrêmes, c'est-à-dire la quantité de composantes qui sont plus grands que la moitié de son extrême. Ensuite, nous affinons le

champ jusqu'à sa limite continue pour le comportement asymptotique. On va le faire dans ce qui suit, et on se concentre sur le cas en dimension deux, parce que le cas dim-2 est le plus utile, et que le cas de plus grande dimension peut être traité par des approches similaires, bien sûr, avec beaucoup plus de calcul. Ce résultat est apparu avec Louidor, Biskup [11].

2 Définitions et propriétés fondamentales

Définition 2.1. *Rappel qu'un ensemble* $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ *est dit connexe si chaque paire de points dans* A *sont reliés par un chemin. De plus son bord est défini par* $\partial A = \{x \in A,$ *on peut quitter* A *en une étape de* $x\}$*.*
Soit V *un ensemble connexe borné (i.e. fini) dans* $\mathbb{Z}^2$*. Pour* $x, y \in V$*, considé -rons une marche aléatoire simple* (S_i) *dans* $\mathbb{Z}^2$ *avec* $S_0 = x$*. On note* $\tau_{\partial V}$ *la première fois qu'elle quitte* V*. Et on se donne la* ***fonction de Green*** $\mathbf{G^V(x, y)}$ *l'espérance du nombre de fois qu'elle arrive à* y*, i.e.,* $G^V(x, y) := \mathbb{E}_x(\sum_0^{\tau_{\partial V}} \mathbf{1}_{S_i=y})$*.*

Définition 2.2. *On s'appelle la variable gaussienne* $\{h^V(x)\}_{x\in V}$ *avec espérance* 0 *et variance* G^V *le* ***Champ Gaussien Libre Discret (CGLD)*** *dans* V*.*

On étudie le CGLD sur une série de domaines qui s'approchent d'un domaine continu:

Définition 2.3. *Soit* D *un ensemble connexe borné dans* $\mathbb{R}^2$*. On note* D_N *l'ensemble* $\{x \in \mathbb{Z}^2, x/N \in D\}$*.*
(Par simplicité, on choisit D *tel que les* D_N *sont touts connexes.)*

L'astuce centrale pour travailler sur un CGLD est la propriété de type Gibbs-Markov qu'il satisfait comme ci-dessous:

Proposition 2.4. *(Type Gibbs-Markov) Soit* $V \subseteq U \subseteq \mathbb{Z}^2$ *ensembles bornés connexes, on a*

$$h^U \overset{d}{=} h^V + \phi^{U,V},$$

où $\phi^{U,V}$ *est une variable gaussienne indépendent de* h^V *avec espérance* 0 *et covariance* $G^U(x, y) - G^V(x, y)$*.*

La preuve peut être effectuée en calculant simplement les variances, car deux variables gaussiennes sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle. (Il est dit de type Gibbs-Markov seulement parce qu'il semble les résultats sur chaines de Markov. Et pour les preuve dans ce papier on peut toujours voir [11].)

Notons que si nous avons une série de domaines contenant chacun un autre, nous pouvons décomposer le CGLD en une somme de parties indépendantes, ce qui suggère des techniques similaires à celles employeés dans les études sur les chaînes de Markov, les marches aléatoires, etc.
Pour mener à bien notre étude, on doit d'abord connaître la fonction G; son nom, la fonction de Green suggère une connexion avec la fonction de Green dans le calcul. En fait, on a la version discrète suivante (la preuve est simple):

Proposition 2.5. *(Dirichlet) La seule solution pour des équations*

$$\begin{cases} \triangle f = 0, x \in A - \partial A \\ f = F, x \in \partial A \end{cases}$$

est $f(x) = \mathbb{E}_x(F(S_\tau))$, *où* $S_i = \sum_1^i X_j$, $\{X_i\}$ *est un marche simple à partir de* x , $\tau = \inf\{j \geq 0, S_j \in \partial A\}$, *et* $\triangle f = \frac{\sum f(x+e_i)}{4} - f(x)$.

Pour continuer avec l'estimation de G, on a besoin de quelques résultats classiques sur le noyau potentiel:

Définition 2.6. *Soit* $G_n(x,y) := \mathbb{E}_x(\sum_1^n \mathbf{1}_{S_i=y})$, *on définit le* ***noyau potentiel*** $a(x) := \lim_{n\to\infty}(G_n(0,0) - G_n(0,x))$.

On remarque que cette définition est seulement valable en dimension deux. Dans les dimensions supérieures, sa contrepartie est $a(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(0,x)$.

Proposition 2.7.
Le noyau potentiel est bien défini (la limite existe) et

$$a(x) = \frac{2}{\pi}\log|x| + k + o(|x|^{-2+\epsilon}),$$

où k *est une constante.*

On omet la preuve de cette proposition puisqu'il s'agit seulement d'un résultat classique de marches aléatoires, et la preuve n'est qu'un calcul long qui s'agit de diviser en parties et donner des estimations élémentaires sur chaque partie.
Et par Markov fort on a:

Proposition 2.8. *Soit* V *un ensemble borné connexe dans* $\mathbb{Z}^2$, $x, y \in V$,

$$G^V(x,y) = -a(x-y) + \sum_{z\in\partial A} H^V(x,z)a(y-z),$$

où $H^V(x,z)$ *désigne la probabilité qu'une marche simple à partir de* $x \in V$ *quitte* V *à* $z \in \partial V$.

Par le théorème de Donsker, les marches simples se rapprochent du mouvement brownien, donc on a des résultats comme

$$\sum_{z\in\partial D_N} H^{D_N}(\lfloor xN\rfloor, z)\delta_{\frac{z}{N}}(\cdot) \xrightarrow{d} \Pi^D(x,\cdot),$$

où $\Pi^D(x, dy)$ est la distrubution de probabilité qu'un mouvement brownien à partir de x quitte D à dy. Cela permet de remplacer H par Π et on obtient:

Proposition 2.9. *Soit $x \neq y, x, y \in D$, et pour la constante $C = \frac{2}{\pi}k$*

$$G^{D_N}(\lfloor xN\rfloor, \lfloor yN\rfloor) = -\frac{2}{\pi}\log|x-y| + \frac{2}{\pi}\int_{\partial D}\Pi^D(x,dz)\log|y-z| + o(1),$$

$$G^{D_N}(\lfloor xN\rfloor, \lfloor xN\rfloor) = \frac{2}{\pi}\log N + C + \frac{2}{\pi}\int_{\partial D}\Pi^D(x,dz)\log|x-z| + o(1).$$

3 Le cas de variance borné

Par l'estimation ci-dessus sur G, on a facilement

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{x\in D_N} h^{D_N}(x) \geq 2\sqrt{2}/\sqrt{\pi}\log N) = 0,$$

et cette borne est asymptotiquement optimale. On a donc la définition suivante:

Définition 3.1. *Fixe $\lambda \in (0,1)$ un paramètre, est soit $\{a_N\}$ une série arbitraire telle que*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{a_N}{\log N} \to \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}},$$

et on définit

$$\Gamma_N^D(b) := \{x \in D_N, h^{D_N}(x) \geq a_N + b\}.$$

Estimer la taille de ce Γ est notre objectif principal, et on remarque que la valeur de λ affecte grandement la difficulté à prouver. Lorsque λ est assez petit, il n'y a pas de problème de convergence, ce que nous présentons ici comme un «cas de variance borné», lorsque λ est grand, la démonstration est complexe et il y a des questions ouvertes concernant le comportement asymptotique lorsque λ tend vers 1.

3.1 Moments

Nous commençons par calculer les premier et second moments de Γ:

Lemme 3.2.
Pour simplifier, soit

$$K_N := \frac{N^2}{\sqrt{\log N}} e^{-\frac{\pi a_N^2}{4\log N}}.$$

(1) Il existe une constante absolue C_0 telle que quel que soient b et $A \subseteq D \in \mathcal{D}$,

$$\mathbb{E}|\{x \in \Gamma_N^D(b), x/N \in A\}| = \frac{K_N \exp(C_0\lambda^2 - \sqrt{2\pi}\lambda b)}{2\sqrt{2\pi}\lambda}\left(\int_A \Psi_\lambda^D(x)dx + o(1)\right),$$

où on définit $\Psi_\lambda^D(x) := \exp(2\lambda^2 \int_{\partial D} \log|x - z|\Pi^D(x, dz))$ pour $x \in D$ (et 0 quand x n'est pas dans D).
(2) Si $A = \{x \in D, dist(x, \partial D) > \epsilon diam D\}$, alors

$$\int_A \Psi_\lambda^D(x)dx = (c(\epsilon) + o(1))(diam D)^{2+2\lambda^2}.$$

Pour la preuve, nous nous développons l'espérance de Γ comme la somme des composants $\sum_x \mathbb{P}(x \in \Gamma)$, puis on estime chaque terme $\mathbb{P}(x \in \Gamma)$ attentivement. Les calculs sont durs mais élémentaires.
Cela montre qu'on peut estimer bien le premier moment, car tout ici est linéaire, et il n'y a pas de problème de convergence.

Lemme 3.3.
(1) Soit $\lambda \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ fixé, $D \in \mathcal{D}$, alors il existe une constante $C(\lambda, D)$ telle que pour tout b fixé, quand N est assez grand,

$$\mathbb{E}(|\Gamma_N^D(b)|^2) \leq CK_N^2.$$

(2) Il existe une constante C qui dépend seulement de λ telle que quel que soit $D \in \mathcal{D}$,

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{K_N^2}\mathbb{E}|\Gamma_N^D(0)|^2 \leq C \int_{D\times D} \left(\frac{(diam D)^2}{|x-y|}\right)^{4\lambda^2} dxdy.$$

Pour le second moment, l'idée est similaire: on développe $\mathbb{E}|\Gamma^2|$ vers $\sum \mathbb{P}_{x,y}(x \in \Gamma, y \in \Gamma)$, et on regarde les x, y qui ne sont pas trop près du bord, comme requis dans le lemme 3.2 (2), puis on utilise la propriété de type Gibbs-Markov et on a

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(h^{D_N}(x) \geq a_N, h^{D_N}(y) \geq a_N)\\ =& \int_0^\infty \mathbb{P}(h^{D_N - \{x\}}(y) \geq a_N - g_x(y)(a_N + s))\mathbb{P}(h^{D_N}(x) - a_N \in ds),\end{aligned} \tag{1}$$

puis on estime les deux probabilités attentivement avec l'aide du calcul des premiers moments, et le résultat suit.
Attention à l'hypothèse $\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$. Sans cela, beaucoup de nos calculs ne se dérouleraient pas, et le moment du second ordre ne serait pas d'ordre K_N^2.

3.2 Mesures aléatoires

Notre tâche finale est d'effectuer $N \to \infty$. Pour cela, nous changeons la notation à une série de mesures:

Définition 3.4.
$$\eta_N^D := \frac{1}{K_N} \sum_{x \in D_N} \delta_{\frac{x}{N}} \otimes \delta_{h^{D_N}(x) - a_N}.$$

On remarque que $\eta_N^D(D \times [b, \infty)) = \frac{1}{K_N} |\Gamma_N^D(b)|$, il contient toutes les informations que nous avons établies, et le dénominateur $1/K_N$ est d'accord avec notre estimation de premier ordre.
Notons que quand b va à l'infini, par l'estimations ci-dessus $\eta_N^D(D \times [b, \infty))$ va à 0, donc la séries de mesures est tendue dans la topologie faible et admit des points limites.
On doit alors prouver l'unicité de la limite. Pour ce faire, on exploit d'abord les propriétés du(des) point(s) limite(s):

Proposition 3.5.
(1) Soit $f_b(x, h) := f(x, h+b) e^{-\sqrt{2\pi}\lambda b}$, alors pour tout $f(x, h) = \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(h)$,
$$< f, \eta^D > = < f_b, \eta^D >, \ a.s.,$$
(2) $\eta^D(dxdh) = Z_\lambda^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}\lambda h} dh$ pour certaine mesure aléatoire Z_λ^D.

On remarque que η_N^D est aléatoire dans x et h, mais après cette limitation, η^D est seulement aléatoire dans x, l'aléatoire dans la deuxième variable disparaît.
On écrit les propriétés de Z_λ^D qu'on peut déduire des contenus ci-dessus ici, comme Z est le concept central dans notre recherche.

Proposition 3.6. *L'ensemble $\{Z_\lambda^D, D \in \mathcal{D}_0\}$ choisi ci-dessus satisfait les propriétés suivantes:*
(1) $Z_\lambda^D(\mathbb{R}^2 - D) = 0$,
(2) $Z_\lambda^D(A) = 0$, pour $Leb(A) = 0$,
(3) il existe c dépend de λ tel que quelque soit $D \in \mathcal{D}_0$ et quelque soit $A \subseteq D$, $\mathbb{E} Z_\lambda^D(A) = c \int_A \Psi_\lambda^D(x) dx$,
(4) $D \cap D' = \emptyset$, then $Z_\lambda^{D \cup D'} \overset{d}{=} Z_\lambda^D + Z_\lambda^{D'}$, avec les deux mesures sur le droit

considérées comme indépendantes,
(5) $D' \subseteq D$, $Leb(D-D')=0$, alors $Z_\lambda^D \overset{d}{=} e^{\sqrt{2\pi}\lambda\Phi^{D,D'}} Z_\lambda^{D'}$, où $\Phi^{D,D'}$ est un champ gaussien continu avec une variance spécifique (on omet ici) considéré comme indépendant de $Z_\lambda^{D'}$,
(6) $Z_\lambda^{a+D}(a+dx) \overset{d}{=} Z_\lambda^D(dx)$,
(7) Quand $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour chaque $r>0$, $S=(0,r)^2$, $\mathbb{E}(Z_\lambda^S(S)^2) \le c(\mathbb{E}Z_\lambda^S(S))^2$,
(8) Quand $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $A \subseteq D$ ouvert, alors $Z_\lambda^D(A) > 0$ a.s..

Toutes les preuves sont simples à l'exception de (7), dans lequel on doit utiliser $\lambda < 1/\sqrt{2}$ et au-dessus des estimations sur les premier/seconde moment pour montrer que les deux termes dans la conclusion sont du même ordre.
Attention de (5), c'est encore un propriété de type Gibbs-Markov, où on sépare D vers D' et $D-D'$ indépendamment. C'est utile dans la section suivant.

3.3 Unicité de la limite

Maintenant, pour la unicité de Z_λ^D, l'idée est de diviser D dans petits morceaux, et utilise l'espérance conditionnelle.
Soit $S_n = (0, 2^{-n})^2$, et divise S_n vers 4^m translations de petits rectangles S_{n+m}, désigné par $S_{n+m}^{(1)}, S_{n+m}^{(2)}, \cdots, S_{n+m}^{(4^m)}$, avec $\widetilde{S_{n,m}} := \cup_i S_{n+m}^{(i)}$ qui diffère de S_n par un «filet» restreint, comme $S_{n+m}^{(i)}$ ne contient pas son bord.
Pour simplicité on va prouver jus l'unicité pour $D=S_n$. Pour cela on écrit explicitement la limite et prouver l'égalité:

Définition 3.7.

$$Y_m^{S_n}(dx) := ce^{\sqrt{2\pi}\lambda\Phi^{S_n,\widetilde{S_{n,m}}}(x)}\Psi_\lambda^{\widetilde{S_{n+m}}}(x)\mathbf{1}_{\widetilde{S_{n+m}}}(x)dx,$$

où $c=c(\lambda)$ est cela de prop 3.6 (3).

Cette définition semble être bizarre, mais en fait ce n'est que l'attente conditionnelle de $Z_\lambda^{S_n}$ sur le filet $S-\widetilde{S}$:

$$\mathbb{E}(< Z_\lambda^{S_n}, f > | \sigma(\Phi^{S_n,\widetilde{S_{n,m}}}(x), x \in \widetilde{S_{n,m}})) = < Y_m^{S_n}, f > .$$

On construit Y parce que la séries $< Y_m, f >$ forme une martingale, donc il converge ver une limite unique.

Lemme 3.8. *Il existe une mesure fini aléatoire $Y_\infty^{S_n}$ tel que pour chaque $f: \bar{D} \to \mathbb{R}$ mesurable borné,*

$$< Y_m^{S_n}, f > \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} < Y_\infty^{S_n}, f >, \quad p.p.$$

Finalement on conclue,

Proposition 3.9. *Soit* $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$*, quelque soit* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$Z_\lambda^{S_n} \stackrel{d}{=} Y_\infty^{S_n}.$$

En particulier, $Z_\lambda^{S_n}$ *est unique.*

On le preuve par la transformation de Laplace, la conclusion est équivalente de:

$$\mathbb{E}e^{-<Z_\lambda^{S_n},f>} \geq \mathbb{E}e^{-<Y_\infty^{S_n},f>}, \mathbb{E}e^{-<Z_\lambda^{S_n},f>} \leq \mathbb{E}e^{-<Y_\infty^{S_n},f>},$$

pour tout f mesurable borné.
Comme Y est l'espérance conditionnel de Z, la première inégalité is trivial. La second est dure. On se développe Z et Y, en utilisant la lemme suivante et faire limite $\epsilon \to 0$ pour abandonner quelques termes sous la supposition $\lambda < 1/\sqrt{2}$:

Lemme 3.10. *Soit* $X_i \geq 0$ *sont indépendants,* $i = 1, \cdots, n$*, alors pour chaque* $\epsilon > 0$*,*

$$\mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^n X_i}) \leq \exp(-e^{-\epsilon} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i \mathbf{1}_{X_i \leq \epsilon})).$$

Notez que, dans le calcul complexe, on a omis, la limite ne fonctionne qu'avec prop 3.6 (7), donc ce cas limité à la variance peut être résolu sans trop d'efforts.

4 Le cas général

Pour le cas général, on a besoin de jeter la supposition $\lambda < 1/\sqrt{2}$. Le second moment donc n'est plus d'ordre K_N^2, et on a besoin d'un autre estimation $\hat{\Gamma}$ et $\hat{\eta}$ pour remplacer Γ, η:

Définition 4.1. *Soit* $\Lambda_r(x) := \{z \in \mathbb{Z}^2, |z - x| \leq r\}$*, rappel* $\phi^{U,V}$ *de Prop*

2.4, on définit

$$
\begin{aligned}
&n(x) := \max\{n \geq 0, \Lambda_{e^{n+1}}(x) \subseteq D_N\},\\
&D_N^\epsilon := \{x \in D_N, dist(x, D_N^c) > \epsilon N\}\\
&\Delta^k(x) := \begin{cases} \emptyset & for\, k = 0 \\ \Lambda_{e^k}(x) & for\, 1 \leq k < n(x) \\ D_N & for\, k = n(x) \end{cases},\\
&S_k(x) := \phi^{D_N, \Delta^k(x)}(x),\\
&k_N := \frac{1}{8}\log K_N\\
&T_{N,M} := \cap_{k=k_N}^{n(x)}\{|S_k(x) - a_N\frac{n(x)-k}{n(x)}| \leq M(n(x)-k)^{3/4}\},\\
&\hat{\eta}_N^{D,M} := \frac{1}{K_N}\sum_{x\in D_N} \mathbf{1}_{T_{N,M}(x)}\delta_{x/N} \otimes \delta_{h^{D_N}(x)-a_N},\\
&\hat{\Gamma}_N^{D,M} := \{x \in D_N, h^{D_N}(x) \geq a_N + b, T_{N,M}(x)\ happens\}.
\end{aligned}
$$

Grossièrement, on divise D_N vers cercles concentriques, et $T_{N,M}$ signifie que chaque zone de torus contribue à h^{D_N} uniformément. La radius e^r et la terme $(n(x) - k)^{3/4}$ dans T sont pour simplicité des futur calculs .
Par les propriété de type Gibbs-Markov, probabilités conditionnelles et estimations dans les intégrales, on est en mesure de comparer les notions ci-dessus avec les anciennes, et de donner une estimation du deuxième moment:

Lemme 4.2. *(1) Pour chaque $0 < \lambda < 1$ et $b_0 > 0$, il existe $c, c' > 0$ tel que, quelque soit $D \in \mathcal{D}$, $b \in [-b_0, b_0]$, $M \geq 1$ et N assez grand,*

$$\mathbb{E}|\Gamma_N^D(b) - \hat{\Gamma}_N^{D,M}(b)| \leq ce^{-c'M^2}(diamD)^{2+2\lambda^2}K_N.$$

(2)

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty} | < \eta_N^D, f > - < \eta_N^{D,M}, f > | = 0.$$

Lemme 4.3. *Soit $\lambda \in (0,1)$, $\epsilon > 0$, $M \geq 0$ et $b > 0$, il existe $c(M, b, \epsilon) \in (1, \infty)$ tel que pour chaque $D \in \mathcal{D}$ et N assez grand,*

$$\mathbb{E}(|\hat{\Gamma}_N^{D,M}(b) \cap D_N^\epsilon|^2) \leq c(diamD)^{4+4\lambda^2}K_N^2.$$

Finalement une preuve semblable à celle du cas variance borné conduit à la caractérisation générale de la mesure Z:

Théorème 4.4. *Soit $\lambda \in (0,1)$, soit $D, D' \in \mathcal{D}$, alors il existe une mesure aléatoire Z_λ^D avec les propriétés suivants:*

(1) $\eta_N^D \xrightarrow{d} Z_\lambda^D(dx) \otimes e^{-\sqrt{2\pi}\lambda h} dh$,
(2) $Z_\lambda^D(\mathbb{R}^2 - D) = 0$,
(3) $Z_\lambda^D(A) = 0$, *for* $Leb(A) = 0$,
(4) il existe c *dépend de* λ *tel que pour chaque* $D \in \mathcal{D}$ *et chaque* $A \subseteq D$ *mesurable,* $\mathbb{E}Z_\lambda^D(A) = c\int_A \Psi_\lambda^D(x)dx$,
(5) $D \cap D' = \emptyset$, *alors* $Z_\lambda^{D\cup D'} \stackrel{d}{=} Z_\lambda^D + Z_\lambda^{D'}$, *avec les deux mesures sur le droit considérées comme indépendantes,*
(6) $D' \subseteq D$, $Leb(D - D') = 0$, *alors* $Z_\lambda^D \stackrel{d}{=} e^{\sqrt{2\pi}\lambda\Phi^{D,D'}} Z_\lambda^{D'}$, *où* $\Phi^{D,D'}$ *est considéré comme indépendant de* Z,
(7) $Z_\lambda^{a+D}(a + dx) \stackrel{d}{=} Z_\lambda^D(dx)$,
(8) $A \subseteq D$ *ouvert, alors* $Z_\lambda^D(A) > 0$ *a.s..*
(9) si $D = S_n$, *alors la distribution de* Z_λ^D *est* $Y_\infty^{S_n}$,
(10) soit $f : D \to f(D)$ *une bijection conforme, alors*

$$Z_\lambda^{f(D)} \circ f(dx) \stackrel{d}{=} |f'(x)|^{2+2\lambda^2} Z_\lambda^D(dx).$$

5 Généralisations

On donne quelques mots sur les moyens possibles d'améliorer le résultat ou de l'utiliser:
(1) Variation de h^V, par exemple changer sa distribution, son variance, etc.
(2) Passez d'un seule λ à plusieurs λs en même temps, ou même un intervalle de λ.
(3) Changer le structure d'ensemble $\{x \in V, h^V(x) > a\}$ vers $\{x \in V, h^V(x) > f(x)\}$.
(5) De la covariance G, nous atteignons au hasard une mesure Z qui a des significations en physique, nous pouvons également commencer par une mesure aléatoire et construire un champ gaussien avec d'autres covariances. Pour ce faire, nous pouvons relier les deux champs et donner une nouvelle expérience (expérimenter avec la variable gaussienne, qui est facile pour les machines multi-cœur, d'éclairer les propriétés de la mesure aléatoire).

References

[1] A.Stöhr. Uber einige lineare partielle differenzengleichungen mit konstanten koeffizienten iii. *Math. Nachr.*, (3):330–357, 1949.

[2] Olivier Daviaud. Extremes of the discrete two-dimensional gaussian free field. *The Annals of Probability*, 34(3):962–986, 2006.

[3] E.B. Dynkin. Gaussian and non-gaussian random fields associated with markov processes. *J. Funct. Anal.*, 55(3):344–376, 1984.

[4] N. Eisenbaum. Dynkin's isomorphism theorem and the ray-knight theorems. *Probab. Theory Relat. Fields*, 99:321–335, 1994.

[5] F.Spitzer. *Principles of Random Walk.* Springer-Verlag, 1976.

[6] G.F.Lawler. *Intersections of Random Walks.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.

[7] Y. Peres J. Ding, J. Lee. Cover times, blanket times, and majorizing measures. *Ann. of Maths.*, 175:1409–1471, 2012.

[8] Jean-Pierre Kahane. Sur le chaos multiplicatif. *Ann. Sc. Math. Québec*, 9(2):105–150, 1985.

[9] J. Rosen M.B. Marcus. *Markov process, Gaussian process, and local times.* Cambridge University Press, 2006.

[10] J.Ding M.Biskup and S.Goswami. Conformal symmetries in the extremal process of two-dimensional discrete gaussian free field. arXiv:1410.4676.

[11] O.Louidor M.Biskup. On intermediate level sets of two-dimensional discrete gaussian free field. arXiv:1612.01424v1.

[12] R.J.Adler. *An introduction to Continuity, Extrema, and Related Topics for General Gaussian Processes.* Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1990.

[13] Giambattista Giacomin Rrwin Bolthausen, Jean-Dominique Deuschel. Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. *The Annals of Probability*, 29(4):1670–1692, 2001.