École Normale Supérieure
Département de maths **Mémoire**

Sous la direction d'Ilia Itenberg (UPMC,ENS)

Introduction au domaine de recherche : géométrie énumérative et tropicale

Thomas Blomme

Paris, 2015

1 Un peu de géométrie tropicale

1.1 Le semi-corps tropical

Dans la suite, on notera $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. L'appellation *"semi-corps tropical"* désigne cet ensemble muni des opérations "max" et "+", parfois notée "$\oplus$" et "$\otimes$". On trouve parfois d'autres conventions dans la littérature : on préfère parfois utiliser "min" à la place de "max" et travailler juste dans $\mathbb{R}$ à la place de $\mathbb{T}$, dans ce cas, $\mathbb{R}$ joue un rôle similaire à celui du tore complexe $\mathbb{C}^*$.

En deux mots, la géométrie tropicale étudie la géométrie faite sur le semi-corps tropical $\mathbb{T}$. Comme on travaille sur un semi-corps et non pas un corps, les choses sont singulièrement différentes de la géométrie classique, ce qui n'empêche pas la présence de grandes similarités. Un des enjeux de la géométrie tropicale est de généraliser les résultats de géométrie classique au cadre tropical. On dit alors qu'ils passent à la tropicalisation. Grâce à sa nature combinatoire, les démonstrations des énoncés tropicaux sont souvent plus faciles. On peut alors espérer dans un second temps que la démonstration tropicale permette de fournir une preuve du résultat usuel. On peut citer à titre d'exemple le théorème de Bezout qui affirme que dans le plan, une courbe de degré d et une courbe de degré d' ont dd' points d'intersection.

Pour finir, expliquons brièvement l'origine des opérations tropicales. Bien qu'usuelles, celles-ci peuvent sembler tomber du ciel. Soit $(\mathbb{K}, \nu)$ un corps muni d'une valuation. On parle aussi de corps non-archimédien. Pour des raisons pratiques, le corps sera toujours supposé algébriquement clos. Par exemple le corps des séries de Puiseux $\mathbb{C}\{\{t\}\} = \bigcup_{k \geqslant 1} \mathbb{C}[[t^{\frac{1}{k}}]]$ muni de la valuation t-adique est un corps valué, tout comme le corps des complexes p-adiques. Les opérations tropicales sont alors la transposition des opérations usuelles lorsqu'on applique la valuation :

- $\nu(0) = -\infty$,
- $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$,
- $\nu(x + y) \leqslant \max(\nu(x), \nu(y))$ avec égalité si $\nu(x) \neq \nu(y)$. (ou min suivant les conventions)

La présence d'une inégalité dans le dernier point à la place d'une égalité est tout à fait normale, autrement la valuation serait un morphisme et $\mathbb{T}$ serait un corps, ce qui n'est pas le cas. Bien qu'a priori gênante, cette inégalité est en fait au cœur de la géométrie tropicale car c'est elle qui va permettre de définir les objets tropicaux, tels les courbes.

1.2 Les polynômes tropicaux

Les polynômes tropicaux sont un exemple flagrant des pathologies qui peuvent survenir dans le monde tropical : un polynôme tropical n'est pas déterminé de manière unique par sa fonction polynomiale associée. C'est une des raisons pour laquelle la dénomination *"polynôme tropical"* désignera la fonction polynomiale associée.

Définition 1. *Un polynôme tropical est une fonction du type*

$$P : x \in \mathbb{T} \longmapsto \bigoplus_{i=0}^{d} a_i x^i = \max_{i=0}^{d}(a_i + ix)$$

où les a_i sont des réels éventuellement égaux à $-\infty$.

On s'aperçoit alors que les polynômes tropicaux sont des fonctions convexes affines par morceaux, à pentes entières et avec un nombre fini de morceaux. La réciproque étant vraie car il est facile d'écrire une telle fonction comme le max des différentes fonctions affines qui la composent.

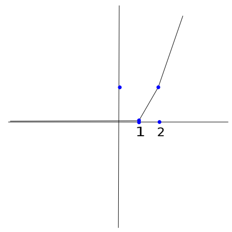


FIGURE 1 – Graphe du polynôme tropical $-4x^3 \oplus -2x^2 \oplus 0$

Proposition 1. *Les polynômes tropicaux sont exactement les fonctions convexes affines par morceaux à pente entière et avec un nombre fini de morceaux.*

Lorsqu'on parle de polynômes, l'un des premiers concepts clé est celui de racine. La notion de racine dans le cadre tropical est légèrement différente de son analogue classique puisque si l'on tente naïvement de résoudre l'équation $P(x) = -\infty$, il n'y a pas de solution.

Définition 2. *Soit P un polynôme tropical. Un réel x est racine de P si P est non dérivable au point x. On appelle alors multiplicité de la racine la différence des pentes à droite et à gauche. $-\infty$ est racine de P si la pente en $-\infty$ est non nulle, elle devient alors la multiplicité de $-\infty$ comme racine.*

Remarque De manière équivalente, on peut dire que x est racine si au moins deux monômes atteignent la valeur de P. La valeur de P est en effet donnée comme le min/max de différentes fonctions affines : les monômes de P, on désire que deux au moins fournissent la valeur. $\Diamond$

Exemple Voici sur 1 le graphe du polynôme $-4x^3 \oplus -2x^2 \oplus 0$. Ses racines sont 1 qui est racine double et 2 qui est racine simple.

$\blacklozenge$

Cette définition de racine permet de montrer que le semi-corps tropical est algébriquement clos. Cette définition est non seulement légitime mais aussi intuitive : lorsqu'on regarde le graphe du polynôme, les points anguleux s'imposent comme l'ensemble de points intéressants le plus immédiat. De plus, cette définition de racine donne le théorème de correspondance suivant :

Théorème 1. *Soit $P = \sum_0^d a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme usuel à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. On note $trop(P) = \bigoplus_0^d \nu(a_i)x^i$ le polynôme tropical obtenu en remplaçant les coefficients par leurs valuations. Les racines de $trop(P)$ sont alors exactement les valuations des racines de P :*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ racine de } trop(P)\} = \{\nu(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}\ P(\alpha) = 0\}.$$

Il est facile de montrer que la valuation d'une racine donne une racine tropicale. Le fait que $\nu\left(\sum a_i x^i\right) = \nu(0) = -\infty$ impose que deux au moins des termes aient une valuation minimale. Pour le sens réciproque, on effectue une remontée modulaire en construisant au fur-et -à-mesure une racine. Il faut également supposer que le corps résiduel de $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

1.3 Les courbes tropicales

Généralités Après une brève étude des polynômes en une variable, il est naturel de se demander ce qu'il advient en dimension plus grande. On regarde donc les polynômes en deux variables, qui permettent de définir les courbes tropicales dans le plan comme le lieu des points anguleux du polynôme considéré.

Définition 3. *Soit $P(x, y)$ un polynôme tropical en deux variables. La courbe définie par P est l'ensemble des points où P n'est pas différentiable, c'est à dire l'ensemble des points où la valeur de P est atteinte par au moins deux des monômes (fonctions affines) qui la composent.*

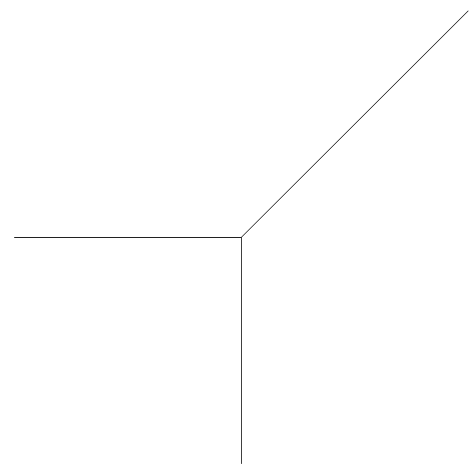


Figure 2 – Une droite tropicale

Exemple

- On peut voir sur 2 une droite tropicale, c'est à dire la courbe donnée par un polynôme de la forme $ax \oplus by \oplus c$. Le sommet de la courbe a pour coordonnées $(c-a, c-b)$.
- Sur 3 se trouve une conique tropicale, c'est à dire un exemple de courbe donnée par un polynôme de degré 2 en x et en y.

♦

Remarque Étant donné le polynôme tropical, tracer la courbe peut s'avérer être une activité quelque peu laborieuse car il faut pour chaque couple de monômes trouver l'intervalle sur lequel il réalisent la valeur du polynôme, ce qui donne un segment de droite à tracer, l'union des segments (éventuellement infinis) donnant la courbe. Par exemple, pour la droite, chacune des trois arêtes infinies est donnée par une ligne du système suivant :

$$\begin{cases} a+x=c \geqslant b+y \\ b+y=c \geqslant a+x \\ a+x=b+y \geqslant c \end{cases}$$

Ainsi, la ligne $a+x=c \geqslant b+y$ correspond à l'arête infinie partant vers le bas, et à la domination des monômes "ax" et "c". ♢

On peut remarquer que les courbes tropicales dans le plan sont des graphes finis (avec certes des arêtes infinies), à pentes rationnelles. Chaque composante connexe du complémentaire de la courbe correspond à une région où un certain monôme domine dans le polynôme. Les arêtes correspondent alors au lieu d'égalité des deux monômes dont les régions bordent l'arête. En regardant de plus près, on peut alors définir une multiplicité à chaque arête : la longueur entière du segment entier reliant les deux exposants des monômes dont le lieu d'égalité est précisément l'arête en question. La courbe tropicale devient alors un graphe dit équilibré au sens où si en en sommet on note v_i des vecteurs directeurs entiers primitifs (pgcd des coordonnées égal à 1) sortant et w_i le poids des arêtes, on a $\sum_i w_i v_i = 0$. C'est la relation d'équilibre. Réciproquement, un tel graphe est bien une courbe tropicale, la condition d'équilibre permettant de définir correctement un polynôme tropical donnant la courbe.

Théorème 2. *Les courbes tropicales sont exactement les graphes finis à pentes rationnelles et équilibrés.*

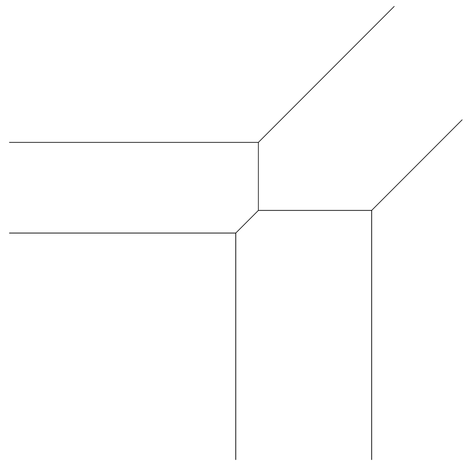


FIGURE 3 – Une conique tropicale

Subdivisions du polygone de Newton On peut également formuler les observations précédentes sous la forme plus nébuleuse : les courbes tropicales sont duales à une subdivision du polygone de Newton du polynôme qui les définit. Expliquons point par point ce que cela signifie.

- Le polygone de Newton d'un polynôme est l'enveloppe convexe des exposants intervenant dans son écriture.

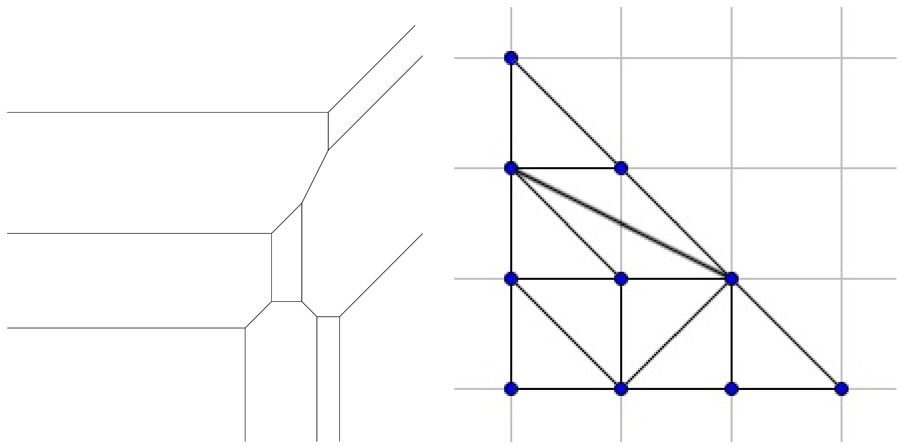
  Exemple $1 + x + y + xy$ a pour polygone de Newton le carré de côté 1, et $1 + x + y + x^2 - 2y^2$ a pour polygone le triangle dont les sommets sont 0, $(0, 2)$ et $(2, 0)$. ♦

- Si l'on se donne un polynôme tropical $P = \sum a_{i,j} x^i y^j$, il induit une subdivision de son polygone de Newton. On peut la voir de deux manières.
  - Soit on considère l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^3$ des $(i, j, a_{i,j})$ et on prend la projection des faces inférieures/supérieures suivant que l'on travaille avec min ou max,
  - soit on prend la subdivision $\mathcal{S}$ dont les cellules sont les enveloppes convexes des ensembles de points vérifiant la propriété suivante : soit E un ensemble de points du polygone de Newton (i.e. d'exposants de monômes apparaissant dans l'écriture du polynôme), $\mathrm{Conv}(E) \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}^2$ tel que les monômes de E réalisent tous la valeur de P en x.

  Exemple On peut voir sur 5 et 4 deux exemples de courbes tropicales accompagnées de la subdivision duale du polygone de Newton d'un polygone qui les définit.

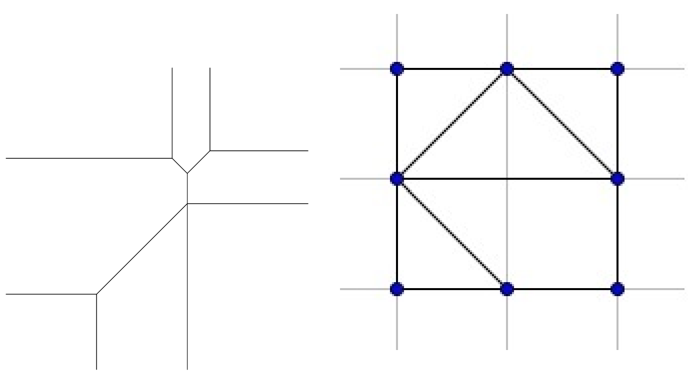
  ♦

- On obtient une subdivision duale à la courbe au sens suivant :
  — A chaque sommet de la courbe tropical correspond un polygone dans la subdivision : il s'agit du polygone dont les sommets sont les exposants des monômes qui réalisent la valeur du polynôme tropical au sommet de la courbe.
  — A chaque composante connexe du complémentaire de la courbe tropicale correspond un sommet de la subdivision du polygone de Newton : le polynôme est une fonction affine sur la région en question, le sommet dual est l'exposant du monôme (fonction affine) auquel le polynôme est alors égal.
  — A chaque arête de la courbe tropicale, bornée ou non, correspond une arête de la subdivision duale qui lui est orthogonale. Il s'agit de l'arête reliant les deux exposants des monômes tropicaux qui donnent le polynôme sur les deux régions que l'arête de la courbe sépare.



(a) (b)

FIGURE 4 – Une cubique et sa subdivision duale



(a) (b)

FIGURE 5 – Une biconique et sa subdivision duale

Miscellanées Voici maintenant un rapide inventaire des objets utiles associés à une courbe tropicale :

- Le degré : il s'agit de l'enveloppe convexe des exposants des monômes présents, encore appelé le polygone de Newton. On dit qu'une courbe est de degré d si le polygone de Newton est le triangle $\mathrm{Conv}(0, de_1, de_2)$.
- L'irréductibilité : une courbe est irréductible si elle n'est pas l'union de deux courbes tropicales distinctes.
- Le genre : la définition du genre pour une courbe tropicale plane n'est pas immédiate, de même que le genre d'une courbe algébrique n'est pas défini simplement. Tout comme la réductibilité, le genre est intrinsèque à la courbe et aurait donc plus de sens s'il était défini pour des courbes tropicales abstraites. On reporte donc quelque peu sa définition, mais elle existe.
- La semi-stabilité : une courbe tropicale est dite semi-stable si ses sommets sont trivalents. Encore une fois, la semi-stabilité est une propriété de la courbe et donc ne dépend pas de la manière dont laquelle elle est envoyée dans le plan.

Il n'est pas toujours facile de définir les alter-egos des objets classiques dans le monde tropical. Déjà les définitions précédentes cachent des subtilités. Le degré est une propriété de sous-objet : on peut parler du degré d'une courbe dans le plan, mais pas du degré d'une courbe en général. Pour ce qui est du genre, irréductibilité et semi-stabilité, c'est une autre histoire car ce sont des propriétés intrinsèques à la courbe. Pour définir correctement ces notions, il faut parler de courbes tropicales abstraites.

Définition 4. *Une courbe tropicale abstraite est un graphe métrique privé de ses sommets univalents.*

- *On dit qu'une courbe est irréductible si son graphe est connexe.*
- *Le genre d'une courbe irréductible Γ est son genre en tant que graphe : $g = 1 - \chi(\Gamma)$ où χ est la caractéristique d'Euler.*
- *Une courbe est dite semi-stable si elle est trivalente.*

Les courbes tropicales abstraites peuvent servir à paramétrer les courbes planes. La condition d'équilibre a disparu de la définition car elle n'a de sens que si la courbe est envoyée dans un certain $\mathbb{R}^n$, mais celle-ci revient dans la définition d'une paramétrisation.

Définition 5. *Une paramétrisation d'une courbe tropicale plane par une courbe tropicale abstraite Γ est une application $h : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^2$, affine entière (dérivée dans $\mathbb{Z}^2$)sur chaque arête, et qui vérifie la condition d'équilibre en chaque sommet.*

Remarque En particulier, on n'exige pas que les différentielles soient non nulles. Une arête peut donc très bien être envoyée sur un même point. $\Diamond$

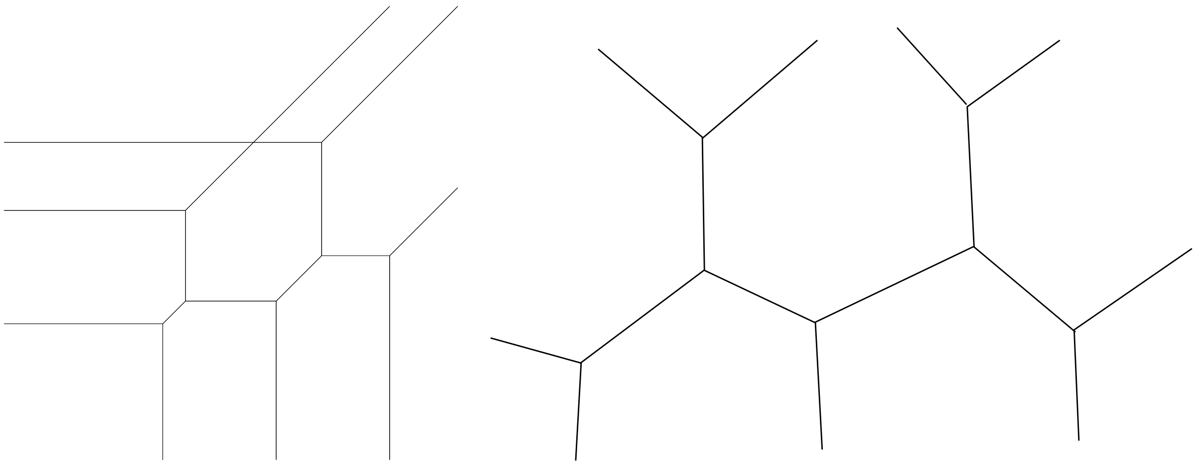
Exemple Sur 6 on a à gauche une cubique singulière possédant un point double. Elle est donc de genre 0 car il est possible de la paramétrer par un graphe de genre 0 qui est représenté sur la droite. On a en quelque sorte résolu la singularité en oubliant le sommet tétravalent et fait comme si il résultait du croisement de deux arêtes.

$\blacklozenge$

On peut maintenant aisément définir la réductibilité et le genre d'une courbe tropicale plane :

Définition 6. *Une courbe tropicale plane est réductible s'il existe une paramétrisation réductible. Elle est irréductible dans le cas contraire.*

Définition 7. *Le genre d'une courbe tropicale plane est le minimum des genres sur les courbes pouvant paramétrer la courbe plane.*



(a) (b)

Figure 6 – Une cubique singulière et un graphe de genre 0 servant à la paramétrer

Remarque Une remarque sur le genre des courbes planes : comme dans le cas usuel, il est possible de relier le genre d'une courbe tropical à son degré pourvu qu'elle soit non singulière. Dans le cas des courbes tropicales, cela signifie trivalente sans arête multiple. Dans ce cas, le genre est égal au nombre de points intérieurs du polygone de Newton, et on obtient ce résultat par simple dualité. Par exemple, une courbe de degré d a pour genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$. ♢

Points doubles d'une courbe tropicale Pour finir, mentionnons le fait que l'on peut parler de points doubles d'une courbe tropicale.

Définition 8. *Une courbe tropicale est dite singulière si elle est la tropicalisation d'une courbe singulière.*

Remarque Cela ne veut pas dire, et c'est d'ailleurs complètement faux, que toute courbe se tropicalisant sur une courbe tropicale singulière est singulière. Cependant, comme la tropicalisation ne sera vue que dans la section suivante, on préfèrera momentanément la définition suivante, brièvement mentionnée dans la section précédente. ♢

Définition 9. *Une courbe tropicale est singulière si elle n'est pas de genre maximal pour son degré.*

Sans trop de détails, voici les principales choses à retenir sur les points doubles.

- Une courbe est singulière si elle n'est pas trivalente ou si elle possède une arête multiple.
- On a comme dans le plan la formule $\delta + g = g_{\max}$ où g est le genre de la courbe, δ le nombre de points doubles et $g_{\max}$ le nombre de points intérieurs au polygone de Newton, c'est à dire le genre maximal d'une courbe de même degré.

Ces définitions nous serviront juste à donner un sens dans le monde tropical à un problème énumératif que nous chercherons à résoudre plus tard.

2 Tropicalisation et dé-tropicalisation

2.1 Tropicalisation

On va brièvement décrire comment passer du monde que l'on qualifiera d'"usuel", i.e. sur un corps non-archimédien $\mathbb{K}$ muni d'une valuation ν, au monde tropical. Pour obtenir des objets tropicaux, il suffit de prendre la valuation des objets "usuels". On a alors des théorèmes de correspondance comme celui de tout à l'heure qui affirmait que les racines tropicales du polynômes tropical étaient les valuations des racines du polynôme usuel. Ce théorème, dit de Kapranov, reste vrai en dimension plus grande :

Théorème 3. *Soit $P = \sum_0^d a_i X^i \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme. On note trop$(P) = \bigoplus_0^d \nu(a_i)x^i$. On suppose la valuation ν surjective. Le polynôme trop(P) définit une hypersurface tropicale dans $\mathbb{R}^n$: l'ensemble des points où elle n'est pas différentiable. Cet ensemble est égal à $\nu(\{x \in (\mathbb{K})^{*n} \mid P(x) = 0\}$.*

Le théorème reste vrai lorsqu'on remplace l'hypersurface par une sous-variété algébrique quelconque de l'espace affine $\mathbb{A}^n$ ou du tore $\mathbb{T}^n = \text{Spec}\mathbb{K}[X_1^{\pm 1}, \ldots, X_n^{\pm 1}]$. La démonstration devient cependant beaucoup plus compliquée et commence à faire apparaître de nouvelles pathologies tropicales. Il est en effet facile de définir la tropicalisation d'une sous-variété algébrique, c'est au choix la valuation des points, ou l'intersection des hypersurfaces tropicales définies par les tropicalisations des polynômes présents dans l'idéal définissant la sous-variété. Le théorème garantit alors l'égalité des deux ensembles. On peut ensuite montrer que la sous-variété tropicale est un complexe polyédral fini, à pentes rationnelles et équilibré en un certain sens. On est tenté de dire que tout objet de cette forme survient comme tropicalisation d'une certaine sous-variété mais il n'en est rien. C'est uniquement le cas pour les hypersurfaces. Certains auteurs préfèrent alors définir les objets tropicaux comme les tropicalisations des objets usuels, et d'autres préfèrent les définir de manière intrinsèque comme des complexes polyédraux rationnels équilibrés.

Certains auteurs ne travaillent pas sur un corps non-archimédien et utilisent le corps des complexes $\mathbb{C}$, mais dans ce cas, on ne considère pas une unique courbe mais une famille de courbe. Cela revient tacitement à travailler sur le corps des séries de Puiseux $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ et psychologiquement évaluer t en un nombre complexe pour obtenir une famille de courbes complexes dépendant du paramètre t.

2.2 Retour dans le monde "usuel"

Tropicaliser est une chose aisée, faire le chemin inverse est une chose plus compliquée, quoique ...Étant donné une courbe tropicale, on cherche des courbes standards se tropicalisant dessus. Dans le plan, il est facile de trouver ce genre de courbe car le théorème de Kapranov nous dit qu'il suffit de relever les coefficients d'un polynôme tropical définissant la courbe pour obtenir une solution. Le problème est plus compliqué/intéressant lorsque l'on impose des conditions sur les courbes recherchées, typiquement posséder un certain nombre de points doubles, et passer par un certain nombre de points fixés du plan. Par exemple, si la courbe tropicale est réductible, on peut chercher des courbes réductibles, de même avec des courbes singulières. On obtient alors des problèmes de géométrie énumérative du type

— Combien de droites passent par deux points du plan ?
— Combien de cubiques singulières passent par neuf points du plan ?
— Combien de courbes de degré d passent par $\frac{d(d+3)}{2}$ points du plan ?
— Combien de cubiques nodales passent par 8 points du plan ?
— Combien de courbes rationnelles de degré d passent par $3d - 1$ points du plan ?
— Combien de courbes de degré d et genre g passent par $3d - 1 + g$ points du plan ?

Ces problèmes, dont le dernier est en fait la généralisation des précédents, trouvent une solution grâce à la géométrie tropicale. On peut en effet montrer que ces problèmes ont un sens dans le monde usuel (la réponse est un nombre fini) comme dans le monde tropical. De plus, un théorème assure que si les courbes tropicales sont comptées avec une multiplicité appropriée (décrite dans la section suivante), les réponses sont identiques. Les nombres ainsi calculés sont appelés les invariants de Gromov-Witten du plan projectif.

Le théorème de correspondance fonctionne pour les courbes de genre quelconque dans le plan. On peut montrer un autre théorème de correspondance valable pour les courbes rationnelles (genre 0) en dimension quelconque. Le cas du genre quelconque en dimension quelconque reste encore ouvert à ce jour et les problèmes qui se posent sont liés à l'existence de courbes "tropicales" qui ne sont pas la tropicalisation de courbes usuelles.

3 Présentation de quelques invariants

3.1 Invariants de Gromov-Witten

Essayons maintenant de répondre plus en détails aux questions de tout à l'heure : combien de courbes de genre g et de degré d passent par $3d-1+g$ points du plan ? Le théorème de correspondance de Mikhalkin nous assure que la réponse dans le cadre tropical est la même que dans le cas usuel sous réserve de compter les courbes tropicales avec une multiplicité que nous allons maintenant décrire.

Définition 10. *Soit Γ une courbe tropicale plane.*

- *Une courbe tropicale est dite simple si ses sommets sont trivalents ou tétravalents résultant de l'intersection de deux arêtes.*
- *La multiplicité d'une courbe simple est par définition le produit des multiplicités de ses sommets trivalents où la multiplicité d'un sommet est la valeur absolue du déterminant de deux des vecteurs directeurs sortant du sommet, c'est à dire le double de l'aire du polygone associé dans la subdivision duale.*

$$\mu_{\mathbb{C}}(\Gamma) = \prod_{v \text{ } trivalent} \mu(v)$$

Remarque Les courbes tropicales simples jouent en quelque sorte le rôle des courbes nodales dans les problèmes énumératifs rencontrés. Pour rappel, une courbe nodale est une courbe dont les seules singularités sont des points doubles. $\diamondsuit$

Théorème 4. *Soit $d, g \geqslant 0$, soit x une configuration générique de $3d-1+g$ points dans $(\mathbb{K}^*)^n$ telle que la configuration des valuations de ces points $\nu(x)$ soit également en position générique dans $\mathbb{R}^n$. Alors le nombre de courbes de degré d et genre g passant par x est égal au nombre de courbes tropicales de degré d et genre g passant par $\nu(x)$ comptées avec la multiplicité de Mikhalkin et est indépendant de la configuration x choisie. On note ce nombre $N_{d,g}$.*

Armé du théorème de correspondance, il faut maintenant trouver une méthode pour énumérer les courbes tropicales répondant à notre problème. Mais ceci devient maintenant un problème combinatoire indépendant auquel le théorème de correspondance nous a permis de nous ramener. Il existe plusieurs méthodes pour énumérer les courbes tropicales de genre fixé passant par des points fixés. On peut mentionner l'algorithme des chemins et les diagrammes en étage. Sinon, comme on ne présentera pas ici de méthode efficace pour énumérer les courbes tropicales possible, il est toujours possible de se convaincre de la faisabilité de la chose en observant qu'il n'existe qu'un nombre fini de types combinatoires possible de courbes d'un degré donné (i.e. subdivisions du polygone de Newton, ou encore un squelette possible de courbe), et pour chaque type combinatoire, au plus une courbe peut satisfaire aux conditions demandées (le problème devient linéaire en les longueurs des arêtes de la courbe une fois le type combinatoire fixé). Les méthodes mentionnées ci-dessus ne sont en fait que des ruses visant à éliminer d'office un grand nombre de types combinatoires dont on sait qu'ils ne pourront pas survenir pour une configuration de points bien choisie.

3.2 Invariants de Welschinger

Les invariants de Gromov-Witten donnent le nombre de courbes complexes qui répondent aux problèmes de tout à l'heure : combien de courbes de degré d et de genre g passent par $3d-1+g$ points du plan ? Les choses se passent bien car le corps est algébriquement clos. Il en est autrement sur $\mathbb{R}$. Le résultat n'est alors plus indépendant de la configuration de points choisie. On peut néanmoins introduire un invariant : l'invariant de Welschinger, qui donne une minoration du nombre de courbes réelles solutions du problème énumératif. De plus, on peut aussi les calculer par des méthodes tropicales.

Plus précisément, l'idée de Welschinger est de compter les courbes réelles avec un signe qui dépend de la nature des points doubles qui apparaissent. Une courbe réelle nodale possède trois types de points doubles :

- ∘ les points doubles complexes qui arrivent par paires et sont conjugués l'un de l'autre,
- ∘ les points doubles dits elliptiques, localement l'intersection de deux branches complexes conjuguées l'une de l'autre : $x^2 + y^2 = 0$,
- ∘ les points doubles dits hyperboliques, localement l'intersection de deux branches réelles : $x^2 - y^2 = 0$.

En comptant les courbes réelles avec le signe de Welschinger $(-1)^s$ où s est le nombre de points doubles hyperboliques, on a le théorème suivant :

Théorème 5. *Soit x une configuration de $3d-1$ points dans le plan réel. On note $\mathcal{C}(x)$ l'ensemble des courbes rationnelles réelles passant par la configuration x. La quantité suivante est alors indépendante de la configuration de points choisie et est appelée invariant de Welschinger :*

$$W_d = \sum_{C \in \mathcal{C}(x)} (-1)^{s(C)}.$$

Il est clair que la valeur absolue de W_d (dont la positivité n'est pas assurée) donne une minoration au nombre de courbes réelles passant par une configuration réelle de points. On peut également définir des invariants de Welschinger lorsque la configuration de points comporte des points réels et des paires de points complexes. En revanche les invariants ne sont pas bien définis pour des courbes de genre g.

Comme pour les invariants de Gromov-Witten $N_{d,g}$, il est possible de calculer tropicalement les invariants W_d, il s'agit de trouver la bonne multiplicité.

Théorème 6. *Dans le cas des courbes de genre 0, si les courbes tropicales sont comptées avec la multiplicité suivante, le résultat donne l'invariant de Welschinger W_d.*

$$\mu_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \begin{cases} 0 \text{ si } \Gamma \text{ a une arête de poids pair} \\ (-1)^s \text{ où } s \text{ est le nombre de sommets de multiplicité congrue à } 3 \text{ modulo } 4 \text{ sinon} \end{cases}$$

Il est assez facile de montrer l'invariance des W_d dans le monde tropical, la preuve marche même en genre quelconque. On n'a d'ailleurs pas utilisé le fait que la courbe soit de genre nul pour définir sa multiplicité réelle. On peut donc définir des invariants tropicaux de Welschinger $W_{d,g}$ pour des genres positifs bien que leur signification en dehors du monde tropical ne soit pas entièrement claire.

3.3 Invariants de Block-Goëttsche

La moralité des deux sections précédentes est qu'il est possible d'obtenir des invariants tropicaux, qui se trouvent parfois être des invariants usuels, en comptant les courbes tropicales avec des multiplicités adéquates. Donnons un dernier exemple de telles multiplicités. On va cette fois associer une multiplicité polynomiale aux courbes tropicales. La multiplicité sera à valeurs dans l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients entiers $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. L'évaluation du polynôme en ± 1 redonnera les invariants $N_{d,g}$ et W_d. Il s'agit des invariants de Block-Goëttsche.

Définition 11. *On se place dans l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. La multiplicité de Block-Goëttsche d'une courbe simple est un polynôme en q, et par définition le produit des q-analogues des multiplicités des sommets trivalents de la courbe.*

$$BG(\Gamma) := \prod_v \frac{q^{\frac{\mu(v)}{2}} - q^{-\frac{\mu(v)}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}.$$

Pour les courbes de degré d dans le plan, on peut vérifier que c'est bien un polynôme de Laurent en q, ce qui n'est a priori pas forcément le cas. Il peut d'arriver pour d'autres degrés que les exposants soient demi-entiers. On a le théorème d'invariance suivant :

Théorème 7. *La somme des polynômes de Block-Goëttsche des courbes tropicales de genre g et degré d passant par $3d - 1 + g$ points est un invariant au sens où elle est indépendante de la configuration de points choisie pourvu qu'elle soit générique.*

4 Et après ?

Bien que relativement récents, les résultats évoqués jusqu'à présent datent un peu. Voici donc une liste des diverses directions qu'il est possible de suivre pour pousser plus loin chacun des points développés jusqu'à présent.

- On peut d'abord augmenter la dimension et essayer de calculer les invariants de Gromov-Witten de variétés complexes de plus grande dimension. Toutefois, il manque un théorème de correspondance pour les courbes de genre strictement positif.
- Pour les courbes rationnelles, le problème évoqué au point précédent se ramène à l'énumération des courbes tropicales de genre 0 vérifiant un certain nombre de contraintes. L'algorithme des chemins évoqué plus haut pêche maintenant car il exploitait le fait qu'en dimension deux, les courbes sont également les hypersurfaces. Toutefois, les décompositions en étages restent valides, même si elles deviennent plus compliquées.
- Dans une optique toute autre, on peut s'intéresser aux hypersurfaces en dimension plus grande au lieu de s'intéresser aux courbes.
- Les invariants de Welschinger sont aussi définis en dimension plus grande bien que définis différemment. On peut toujours les calculer de manière tropicale.
- C'est une question ouverte de savoir si les polynômes de Block-Goëttsche existent aussi en dimension plus grande. Leur existence et leur invariance dans le plan est assez simple car elle se passe "localement". Heuristiquement, pour montrer l'invariance, on fait légèrement bouger la famille de points, ce qui fait bouger les courbes de la famille, et si on les bouge suffisamment, certaines arêtes peuvent disparaître, mais les contributions de chaque sommet se compensent de sorte que le total est invariant pour chaque courbe de la famille, et en chaque sommet. C'est beaucoup plus incertain en dimension plus grande car par exemple les définitions des multiplicités ne s'obtiennent plus par un simple produit sur les multiplicités des sommets, ensuite, les disparitions d'arêtes peuvent survenir sur plusieurs courbes en même temps et les compensations ne s'effectuer que globalement. De plus, à l'heure actuelle, on ne peut que supputer des idées de multiplicité polynomiales.
- Pour finir, l'utilisation de diagrammes en étage peut permettre de fournir des estimations sur les invariants. Par exemple, on a pour le plan

$$\ln W_d \sim \ln N_d \sim 3d \ln d.$$