Géométrie des variétés de représentations dans des groupes de Lie résolubles - Introduction au domaine de Recherche

Clément Berat

sous la direction de
Louis Funar
Catherine Gille

2017

Table des matières

Introduction

Le but de ce document est de présenter les notions nécessaires à l'étude de l'espace des représentations du groupe fondamental d'une surface dans un groupe de Lie résoluble, c'est-à-dire l'espace des morphismes à conjugaison près. Il s'agit donc de donner différentes manière d'aborder ces espaces, notamment en introduisant une interprétation topologique d'une classe de morphismes : il s'agit des fibrés plats. Un ingrédient fondamental est la cohomologie des groupes, que ce soit du groupe fondamental de la surface ou celle du groupe de Lie. Il est également important d'avoir en tête la géométrie des groupes de Lie que nous considérons c'est-à-dire des groupes résolubles. Enfin, l'étude d'une théorie de la cohomologie (appelée cohomologie *bornée*) est un outil puissant pour étudier les fibrés plats, et donc l'espace des représentations.

Chapitre 1

Cohomologie des groupes

1.1 Généralités

Il est possible de définir une notion de cohomologie pour les groupes, qui coïncide en fait avec la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane [1].

Fixons un groupe G, que l'on notera multiplicativement. Nous noterons dans la suite $\mathbb{Z}\mathrm{G}$ l'anneau du groupe G, c'est-à-dire le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par G, avec la multiplication induite par celle de G.

Définition 1.1.1.

— Une résolution libre d'un G-module M est un quasi-isomorphisme de complexes $\mathrm{L}_\bullet \to \mathrm{M}$ où M est vu comme le complexe avec M en degré 0, et 0 ailleurs, avec L_n un G-module libre pour tout n.

— La cohomologie de G à valeur dans un G-module M est la cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{L}_\bullet, \mathrm{M})$ pour une résolution libre $\mathrm{L}_\bullet$ du G-module trivial $\mathbb{Z}$. On la note $\mathrm{H}^*(\mathrm{G}; \mathrm{M})$.

Proposition 1.1.2. *La cohomologie de* G *ne dépend pas de la résolution choisie.*

Nous cherchons donc une résolution libre (donc en particulier projective) du $\mathbb{Z}\mathrm{G}$-module trivial $\mathbb{Z}$.

Définition 1.1.3. Un G-complexe est un CW-complexe X muni d'une action de G par des homéomorphismes cellulaires (c'est-à-dire une permutation des cellules). Le G-complexe X est dit *libre* si l'action de G sur les cellules de X est libre.

Proposition 1.1.4. *Si* X *est un* G*-complexe, alors l'action de* G *sur* X *induit une action de* G *sur le complexe de chaînes cellulaire* $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{X})$*. Si* X *est de plus libre, alors* $\mathrm{C}_\bullet(\mathrm{X})$ *admet une* $\mathbb{Z}$*-base permutée librement par* G*. C'est donc un* G*-module libre (une* $\mathbb{Z}\mathrm{G}$*-base de* $\mathrm{C}_n(\mathrm{X})$ *est donnée par les orbites des n-cellules).*

Proposition 1.1.5. *Si* X *est contractile, alors le complexe cellulaire de* X *augmenté*

$$\cdots \to \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{X}) \to \mathrm{C}_n(\mathrm{X}) \to \cdots \to \mathrm{C}_1(\mathrm{X}) \to \mathrm{C}_0(\mathrm{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

est une résolution libre de $\mathbb{Z}$ *en tant que* $\mathbb{Z}\mathrm{G}$*-module.*

L'objectif est donc de construire des G-complexes. Un exemple important est illustré par la propriété suivante

Proposition 1.1.6. *Soit $p : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ un revêtement, avec X un CW-complexe, tel que le groupe des automorphismes de revêtement de $\tilde{\mathrm{X}}$ est isomorphe à G. Alors $\tilde{\mathrm{X}}$ peut être muni d'une structure de CW-complexe, et c'est alors clairement un G-complexe.*

Les cellules ouvertes de $\tilde{\mathrm{X}}$ sont les composantes connexes de $p^{-1}(\sigma)$ pour σ une cellule ouverte de X. Alors une $\mathbb{Z}\mathrm{G}$-base de $\mathrm{C}_n(\tilde{\mathrm{X}})$ est donnée par les n-cellules de X. Un tel revêtement existe-t-il réellement ? Oui, c'est le cas si $\mathrm{G} = \pi_1(\mathrm{X})$: on prend alors un revêtement universel.

Théorème 1.1.7. *Soient Y un $\mathrm{K}(\mathrm{G}, 1)$ et $p : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un revêtement universel. Alors $\mathrm{C}_n(\mathrm{Y}) \simeq \mathrm{C}_n(\mathrm{X})_{\mathrm{G}}$, et donc $\mathrm{H}^*(\mathrm{G}; \mathrm{M}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{Y}; \mathrm{M})$ (le dernier terme est la cohomologie cellulaire de Y).*

Conclusion Si G est isomorphe au groupe fondamental d'un CW-complexe dont le revêtement universel est contractile (ie : $\pi_i(\mathrm{X}) = 0 \ \forall i \geq 2$), alors on a une résolution libre de $\mathbb{Z}$ en tant que $\mathbb{Z}\mathrm{G}$-module. C'est le cas en particulier des $\pi_1(\Sigma_g)$ où Σ_g est une surface orientable de genre $g \geq 1$.

1.2 Résolution standard

Soient G un groupe, et M un $\mathbb{Z}\mathrm{G}$-module.

Définition 1.2.1. Notons $\mathrm{F}_n = \mathbb{Z}[\mathrm{G}^{n+1}]$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les éléments de G^{n+1}, muni de l'action de G terme-à-terme :

$$\forall g \in \mathrm{G} \ \forall (g_0, \ldots, g_n) \in \mathrm{F}_n \quad g\dot{(}g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n)$$

Proposition 1.2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est un G-module libre, dont une base est donnée par les éléments de la forme*

$$[g_1 | \cdots | g_n] = \left(1, g_1, g_1 g_2, \ldots, \prod_{i=1}^{n} g_i \right)$$

Définition 1.2.3. Définissons, pour $0 \leq i \leq n$, $d_i : \mathrm{F}_n \to \mathrm{F}_{n-1}$ par :

$$d_i((g_0, \ldots, g_n)) = (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_n)$$

c'est-à-dire avec la notation précédente :

$$d_i([g_1 | \cdots | g_n]) = \begin{cases} g_1 \cdot [g_2 | \cdots | g_n] & \text{si } i = 0 \\ [g_1 | \cdots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \cdots | g_n] & \text{si } 1 \leq i < n \\ [g_1 | \cdots | g_{n-1}] & \text{si } i = n \end{cases}$$

La différentielle est alors :

$$\partial : \begin{cases} \mathrm{F}_n & \to & \mathrm{F}_{n-1} \\ x & \mapsto & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(x) \end{cases}$$

Proposition 1.2.4. *Une résolution libre du G-module trivial $\mathbb{Z}$ est définie via l'augmentation $\varepsilon : \mathrm{F}_0 \to \mathbb{Z}$ par*

$$\varepsilon \left(\sum_{g \in \mathrm{G}} n_g g \right) = \sum_{g \in \mathrm{G}} n_g$$

Démonstration. Nous allons en fait montrer que le complexe augmenté $\mathrm{F}_\bullet \to \mathbb{Z}$ est contractile. Définissons, pour $n \geq 0$, $h : \mathrm{F}_n \to \mathrm{F}_{n+1}$ par

$$h(g_0, \dots, g_n) = (1, g_0, \dots, g_n)$$

et sur $\mathrm{F}_{-1} = \mathbb{Z}$:

$$h(1) = 1 \in \mathrm{G}$$

Nous obtenons alors pour $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
(\partial h + h\partial)(g_0, \dots, g_n) &= \partial(1, g_0, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \\
&= (g_0, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (1, g_0, \dots, \widehat{g_{i-1}}, \dots, g_n) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \\
&= (g_0, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} (1, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \\
&= (g_0, \dots, g_n)
\end{aligned}$$

et pour $n = -1$

$$\varepsilon h(1) = \varepsilon(1) = 1 \in \mathbb{Z}.$$

Nous trouvons donc toujours

$$\partial h + h\partial = \mathrm{id},$$

de sorte que h est une homotopie entre id et 0. Nous en déduisons que le complexe augmenté a une homologie triviale. Donc $\mathrm{F}_\bullet$ est bien une résolution projective de $\mathbb{Z}$. □

Définition 1.2.5. On note pour $n \geq 0$

$$\mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\mathrm{G}^n, \mathrm{M})$$

avec la différentielle $\delta : \mathrm{C}^{n-1}(\mathrm{G}, \mathrm{M}) \to \mathrm{C}^n(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ définie pour $f \in \mathrm{C}^{n-1}(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ par

$$\begin{aligned}
\delta f(g_1, g_2, \dots, g_n) = g_1 \dot{f}(g_2, \dots, g_n) - f(g_1 g_2, g_3, \dots, g_n) + \dots + \\
+ (-1)^{n-1} f(g_1, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} g_n) + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}).
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.6. *Soit* M *un* G*-module. Alors le complexe* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{F}_\bullet, \mathrm{M})$ *s'identifie avec le complexe* $\mathrm{C}^{n+1}(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ *défini ci-dessus.*

Proposition 1.2.7. *La cohomologie de* G *à valeurs dans* M *est isomorphe à la cohomologie du complexe ci-dessus.*

Un exemple de calcul des cocycles et des cobords en dimension 1 sera utile dans la suite.

Exemple 1.2.8 :

— Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{G};\mathrm{M})$, alors f est un élément $u_0 \in \mathrm{M}$, et on a

$$\delta f(g) = g \cdot u_0 - u_0$$

— Soit $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G};\mathrm{M})$, alors

$$\delta f(g,h) = g \cdot f(h) - f(gh) + f(g).$$

En particulier, f est un cocycle si et seulement si f vérifie la condition

$$f(gh) = f(g) + g \cdot f(h).$$

Pour plus de détails sur la cohomologie des groupes, le lecteur pourra consulter avec intérêt [1].

Chapitre 2

Fibrés plats

2.1 Introduction

Dans la suite, X désigne un CW-complexe fini (ou en particulier une variété) connexe, π son groupe fondamental, et G un groupe de Lie.

Définition 2.1.1.

a) Un fibré ξ au-dessus de X est *virtuellement trivial* s'il existe un revêtement fini $p : \hat{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ tel que $p^*\xi$ est trivial.

b) Un fibré principal de groupe G au-dessus de X est *plat* si son groupe de transformations se réduit à un sous-groupe totalement discontinu $\Gamma \subset \mathrm{G}$. Le groupe Γ est appelé le *groupe d'holonomie* du fibré.

c) Un fibré vectoriel au-dessus de X est *plat* si son fibré principal associé est plat.

Proposition 2.1.2. *Soit $h : \pi \to \mathrm{G}$ un morphisme. Alors h induit un fibré plat de groupe* G *au-dessus de* X*, noté $h_\flat$.*

Démonstration. Soit $p : \tilde{\mathrm{X}} \to \mathrm{X}$ un revêtement universel. Identifions π au groupe des endomorphismes de revêtement de $\tilde{\mathrm{X}}$. Le groupe π agit sur $\tilde{\mathrm{X}} \times \mathrm{G}$ par : $\forall \gamma \in \pi$, $\gamma \cdot (\tilde{x}, g) = (\gamma(\tilde{x}), h(\gamma)g)$. Nous obtenons alors une factorisation

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathrm{X}} \times \mathrm{G} \arrow[r, "p \circ \mathrm{pr}_1"] \arrow[d, two heads] & \mathrm{X} \\ \frac{\tilde{\mathrm{X}} \times \mathrm{G}}{\pi} \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Alors q est une fibration au-dessus de X, et le groupe d'holonomie est $h(\pi)$.

En effet, la fibre au-dessus d'un point $x \in \mathrm{X}$ est $(p^{-1}(x) \times \mathrm{G})/\pi$ qui est homéomorphe à G. Il est clair que q est une fibration de groupe $h(\pi) \subset \mathrm{G}$, qui est totalement discontinu puisque π est discret. $\square$

Proposition 2.1.3. *Un fibré plat de groupe* G *donne un morphisme $\pi \to \mathrm{G}$, bien défini à conjugaison (dans G) près.*

Démonstration. [6] Nous allons définir le transport de la fibre le long d'un chemin : soient $x_0, x_1 \in \mathrm{X}$, et soit γ un chemin de x_0 à x_1. Donnons-nous un isomorphisme $h_0 : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_0 := \xi|_{\{x_0\}}$. Nous avons alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \times \mathrm{I} \arrow[r, dotted, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & \xi \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{I} \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillés est donnée par le théorème de relèvement des homotopies, vérifiant : $\tilde{\gamma}(g, 0) = h_0(g)$ et $p \circ \tilde{\gamma}(g, t) = \gamma(t)$. Notons pour $t \in \mathrm{I}$, $h_t := \tilde{\gamma}(\cdot, t)$ et $\mathrm{G}_t := \xi|_{\{\gamma(t)\}}$. Posons $\mathrm{T}_t := h_t \circ h_0^{-1} : \mathrm{G}_0 \to \mathrm{G}_t$ le transport de la fibre G_0 le long du chemin γ.

Le transport est bien défini car le groupe de transformations Γ du fibré est totalement discontinu. En effet, quitte à prendre une subdivision suffisamment fine de I, nous pouvons supposer que $\gamma(\mathrm{I})$ est contenu dans un ouvert de trivialisation U de ξ. Alors si h et $\tilde{h}$ sont deux applications $\mathrm{G} \times \mathrm{U} \to \xi$ qui sont des homéomorphismes sur leur image et qui coïncident au-dessus de x_0, nous avons pour $g \in \mathrm{G}$: $\tilde{h} \circ h^{-1}|_{\{\gamma(t)\}} : \mathrm{G}_t \to \mathrm{G}_t$ est dans Γ. Alors comme ceci est l'identité pour $t = 0$, c'est le cas pour tout $t \in \mathrm{I}$.

Pour γ un chemin de x_0 à x_1, posons $\gamma^\sharp : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_0$ obtenu par transport le long de γ^{-1}. La composition de deux transports est obtenue en transportant le long de l'inverse de la concaténation des chemins, et nous obtenons

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\sharp = \gamma_1^\sharp \cdot \gamma_2^\sharp$$

Si γ_1 et γ_2 sont des chemins homotopes de x_0 à x_1, alors le théorème de relèvement d'homotopie nous permet d'obtenir une application $\tilde{h} : \mathrm{G} \times \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \xi$ telle que $h = \tilde{h}|_{\mathrm{G} \times \mathrm{I} \times \{0\}}$ est un morphisme de fibrés au-dessus de γ_1 et $h' = \tilde{h}|_{\mathrm{G} \times \mathrm{I} \times \{1\}}$ est un morphisme de fibrés au-dessus de γ_2. Alors h et h' coïncident pour $t = 0$ et $t = 1$, puisque l'homotopie est stationnaire en x_0 et x_1. Donc $\gamma_1^\sharp = \gamma_2^\sharp$.

En prenant des *lacets*, nous obtenons donc un morphisme $\pi \to \mathrm{G}_0$. Posons $\chi : \pi \to \mathrm{G}$, $\chi(\alpha) = \phi^{-1} \alpha^\sharp \phi$. Nous identifierons dans la suite α et $\alpha^\sharp$. Cependant, ce morphisme dépend de l'homéomorphisme $\phi : \mathrm{G} \to \xi|_{\{x_0\}}$ choisi. Cependant, si ψ est un autre homéomorphisme, nous avons

$$\forall \alpha \in \pi,\ \psi^{-1} \alpha \psi = \psi^{-1} \phi \left(\phi^{-1} \alpha \phi\right) \phi^{-1} \psi = g^{-1} \chi(\alpha) g$$

Donc un autre choix de ϕ donne lieu à un morphisme conjugué à χ. □

Lemme 2.1.4. *Soit $(h_t)_{0 \leq t \leq 1}$ une famille continue de morphismes $\pi \to \mathrm{G}$. Alors $(h_0)_\flat$ et $(h_1)_\flat$ sont isomorphes (en tant que fibrés). En d'autres termes, deux morphismes homotopes $\pi \to \mathrm{G}$ donnent des fibrés isomorphes.*

Remarque 2.1.5. En particulier, si h_0 est le morphisme trivial, le lemme implique que $(h_1)_\flat$ est le fibré trivial.

Démonstration. Donnons-nous un fibré ξ au-dessus de $\mathrm{X} \times [0, 1]$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $\xi|_{\mathrm{M} \times \{t\}} \cong (h_t)_\flat$. Par le théorème de relèvement des homotopies, les fibrés $(h_0)_\flat$ et $(h_1)_\flat$ sont homotopes, donc isomorphes. □

Lemme 2.1.6. *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme entre groupes de Lie, qui est aussi une équivalence d'homotopie. Alors pour tout morphisme* $h : \pi \to \mathrm{G}$*, si* $(\phi \circ h)_\flat$ *est trivial alors* $h_\flat$ *aussi.*

2.2 Groupes d'homotopie des groupes de Lie

Pour la théorie de l'obstruction, nous aurons besoin de prendre l'homologie d'un espace à valeurs dans les groupes d'homotopie d'un groupe de Lie. Nous cherchons donc ici à étudier ces groupes, notamment la commutativité du groupe fondamental, ainsi que l'invariance par changement de base. Cette section est grandement inspirée de [6].

Dans la suite, on fixe un groupe de Lie connexe G, que nous noterons multiplicativement. La loi des groupes d'homotopie sera notée additivement. La relation d'homotopie est notée $\sim$, et l'homotopie relativement à un sous-espace A est notée $\sim_{\mathrm{A}}$ ou $\sim$ rel.A.

Lemme 2.2.1. *Soient* $f_1, f_2 : (\mathrm{I}^n, \partial \mathrm{I}^n) \to (\mathrm{G}, 1)$ *des applications continues. Alors* $f_1 \cdot f_2 \sim_{\partial \mathrm{I}^n} f_1 + f_2$*.*

Démonstration. Rappelons que $f_1 \cdot f_2$ est définie pour $t \in \mathrm{I}^n$ par : $(f_1 \cdot f_2)(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$. Soit f_0 l'application $\mathrm{I}^n \to \mathrm{G}$ constante égale à 1. Nous avons alors

$$(f_1 + f_0) \sim_{\partial \mathrm{I}^n} f_1, \quad (f_0 + f_2) \sim_{\partial \mathrm{I}^n} f_2.$$

De plus, par continuité du produit de G, nous en déduisons

$$(f_1 + f_0) \cdot (f_0 + f_2) \sim_{\partial \mathrm{I}^n} f_1 \cdot f_2.$$

Mais en écrivant $t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathrm{I}^n$, nous avons par définition de la somme

$$\begin{aligned} (f_1 + f_0) \cdot (f_0 + f_2)(t) &= \left\{ \begin{array}{ll} f_1(2t_1, t_2, \ldots, t_n) \cdot 1 & \text{si } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ 1 \cdot f_2(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } t_1 \geq \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ &= (f_1 + f_2)(t). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc bien le résultat

$$f_1 \cdot f_2 \sim f_1 + f_2 \quad \text{rel.} \partial \mathrm{I}^n.$$

□

Lemme 2.2.2. *Soient* $g_0 \in \mathrm{G}$*, et soit* γ *une courbe de* 1 *à* g_0*. Alors l'isomorphisme associé à* γ*, noté* $\gamma^\sharp$ *entre* $\pi_n(\mathrm{G}, 1)$ *et* $\pi_n(\mathrm{G}, g_0)$ *coïncide avec la translation à gauche par* g_0*.*

Démonstration. Soit $f : (\mathrm{I}^n, \partial \mathrm{I}^n) \to (\mathrm{G}, 1)$ continue. Posons pour $\tau \in \mathrm{I}, t \in \mathrm{I}^n$

$$h(\tau, t) = \gamma(1 - \tau) \cdot f(t).$$

C'est clairement une homotopie de G entre f et $g_0 \cdot f$. De plus, cette homotopie déplace le point image de $\partial \mathrm{I}^n$ le long de γ^{-1}. Alors $\gamma^\sharp$ est équivalent à la multiplication à gauche par g_0. □

Théorème 2.2.3. *Pour tout point $g_0 \in \mathrm{G}$, le groupe $\pi_1(\mathrm{G}, g_0)$ agit trivialement sur $\pi_n(\mathrm{G}, g_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, $\pi_n(\mathrm{G})$ est bien défini sans référence au point base, et $\pi_1(\mathrm{G})$ est abélien.*

Démonstration. Commençons par le cas où $g_0 = 1$. Si γ est une courbe fermée basée en 1, alors par le lemme précédent $\gamma^\sharp$ est l'identité sur $\pi_n(\mathrm{G}, 1)$, et donc l'action de $\pi_1(\mathrm{G}, 1)$ sur $\pi_n(\mathrm{G}, 1)$ est triviale. Pour le cas général, la translation par g_0 est un homéomorphisme de $(\mathrm{G}, 1)$ dans (G, g_0), qui préserve donc l'action de π_1 sur π_n. $\square$

2.3 Cas des groupes résolubles

Donnons-nous un groupe de Lie G résoluble de dimension n, connexe et simplement connexe, et notons $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Lemme 2.3.1. *Il existe une suite de sous-algèbres $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathfrak{g}$ telles que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n-1} \supset \mathfrak{g}_n = 0$$

et $\mathfrak{g}_i$ est un idéal de $\mathfrak{g}_{i+1}$ de codimension 1.

Démonstration. Notons $\mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}]$, avec $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$. Alors par définition d'un groupe résoluble, $\mathfrak{g}^k$ est nul pour k suffisemment grand. De plus, pour tout k, $\mathfrak{g}^{(k+1)}$ est un idéal de $\mathfrak{g}^{(k)}$. Il suffit alors d'intercaller des sous-espaces vectoriels qui conviennent. En effet, si nous avons

$$\mathfrak{g}^{(k)} \supset \mathfrak{g}_i \supset \mathfrak{g}_j \supset \mathfrak{g}^{k+1}$$

alors

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}] = \mathfrak{g}^{(k+1)}$$

Ceci montre à la fois que les $\mathfrak{g}_i$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$. $\square$

Théorème 2.3.2. *Il existe une suite de sous-groupes fermés $(\mathrm{G}_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G tels que*

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \supset \mathrm{G}_1 \supset \cdots \supset \mathrm{G}_{n-1} \supset \mathrm{G}_n = 1$$

et pour tout i, G_{i+1} est distingué dans G_i et $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_{i+1} \rtimes \mathbb{R}$.

Démonstration. Donnons-nous une suites de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ comme dans 2.3.1. Soit X_i un élément de $\mathfrak{g}_i$ qui n'est pas dans $\mathfrak{g}_{i+1}$. Alors $\mathfrak{g}_i$ est clairement le produit semi-direct de $\mathfrak{g}_{i+1}$ et de $\mathbb{R}$. Notons $\tau : \mathbb{R} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_{i+1})$ le morphisme d'algèbres de Lie associé. Comme G est simplement connexe, nous pouvons trouver un morphisme de groupes lisse $\overline{\tau} : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}\mathfrak{g}_{i+1}$ tel que $\mathrm{d}\overline{\tau} = \tau$. Comme $\mathbb{R}$ est simplement connexe, pour tout $g \in \mathrm{G}_{i+1}$ il existe un automorphisme $\varphi(g)$ de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}\varphi(g) = \overline{\tau}$. La différentielle de $\varphi(g_1 g_2)$ et celle de $\varphi(g_1)\varphi(g_2)$ valent toutes les deux $(\tau)(g_1 g_2)$, nous pouvons donc déduire que φ est un morphisme de groupes. Il reste maintenant à vérifier que $\varphi : \mathrm{G}_{i+1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lisse, ce se fait en utilisant des coordonnées exponentielles. $\square$

Corollaire 2.3.3. *Un groupe de Lie résoluble simplement connexe est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Corollaire 2.3.4. *Les groupes d'homotopie d'un groupe de Lie connexe résoluble G vérifient*

$$\pi_k(\mathrm{G}) = 0 \quad \forall k \geq 2$$

2.4 Groupes nilpotents

Comme tout groupe nilpotent est résoluble, ce que nous avons vu au paragraphe précédent s'applique. Nous avons cependant un résultat supplémentaire sur le difféomorphisme entre un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et un groupe euclidien.

Théorème 2.4.1. *Soit* G *un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe. Alors l'exponentielle* $\mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ *est un difféomorphisme.*

Démonstration (idée). Notons Z le sous-groupe connexe de G associé à $\mathfrak{z}$, qui est central. Supposons par récurrence que exp est bijective pour tout groupe nilpotent simplement connexe de dimension strictement inférieure à n (le cas de la dimension 1 est trivial). Le quotient G/Z est encore nilpotent, et est simplement connexe. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurence à G/Z.

Soient $\mathrm{X}, \mathrm{X}' \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp(\mathrm{X}) = \exp(\mathrm{X}')$. Alors dans le quotient, on a : $\exp(\mathrm{X}+\mathfrak{z}) = \exp(\mathrm{X}'+\mathfrak{z})$ et donc $\mathrm{X}-\mathrm{X}' \in \mathfrak{z}$. On en déduit que $\mathrm{X}-\mathrm{X}'$ commute avec X', et donc

$$\exp(\mathrm{X}) = \exp(\mathrm{X}' + (\mathrm{X}-\mathrm{X}')) = \exp(\mathrm{X}')\exp(\mathrm{X}-\mathrm{X}')$$

Alors $\exp(\mathrm{X}-\mathrm{X}') = 1$, et nous pouvons conclure grâce au cas de la dimension 1 que $\mathrm{X}-\mathrm{X}' = 0$.

Étant donné $x \in \mathrm{G}$, on cherche $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ tel que $x = \exp(\mathrm{X})$. En notant $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{N}$ l'application quotient, l'hypothèse de récurence nous fournit une classe $\mathrm{X}+\mathfrak{z} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{z}$ telle que $\exp(\mathrm{X}+\mathfrak{z}) = p(x)$. Nous avons donc : $\exp(\mathrm{X}) = xz$ pour un $z \in \mathrm{Z}$. Comme Z est connexe et abélien, l'hypothèse de récurence nous assure l'existence d'un $\mathrm{X}' \in \mathfrak{z}$ tel que $\exp(\mathrm{X}') = z$, et donc $x = \exp(\mathrm{X})\exp(\mathrm{X}') = \exp(\mathrm{X}+\mathrm{X}')$ (puisque X' commute avec X).

Il reste à démontrer que l'expentielle est régulière, ce qui est fait en prenant des coordonnées adaptées. □

2.5 Théorie de l'obstruction

Donnons-nous (X, A) un CW-complexe relatif ($\mathrm{X}^{(-1)} = \mathrm{A}$), et $p : \xi \to \mathrm{X}$ un fibré principal de groupe G. L'objectif est d'étendre une section $s : \mathrm{X}^{(n)} \to \xi$ en une section définie sur $\mathrm{X}^{(n+1)}$.

Définition 2.5.1. Le *cocycle d'obstruction* de s est défini par

$$c(s) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{C}_{n+1}(\mathrm{X}) & \to & \pi_n(\mathrm{G}) \\ \sigma & \mapsto & \phi_\sigma|_{\partial \mathrm{B}^{n+1}} \end{array} \right.$$

où nous avons noté ϕ_σ l'application caractéristique de la cellule σ, c'est-à-dire l'application $(\mathrm{B}^{n+1}, \partial \mathrm{B}^{n+1}) \to (\mathrm{X}, \mathrm{X}^{(n)})$.

Proposition 2.5.2. *L'application* $c(s)$ *est un cocycle de* $\mathrm{C}^{n+1}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \pi_n(\mathrm{G}))$.

Théorème 2.5.3. *Soit* $s : \mathrm{X}^{(n)} \to \xi$ *une section de* ξ. *Alors* s *peut être étendue à* $\mathrm{X}^{(n+1)}$ *si et seulement si* $c(s) = 0$. *De plus, nous pouvons étendre* $s|_{\mathrm{X}^{(n-1)}}$ *à* $\mathrm{X}^{(n+1)}$ *si et seulement si* $c(s)$ *est un cobord.*

Pour plus de détails sur la théorie de l'obstruction, le lecteur pourra consulter [6, 5].

Chapitre 3

Cohomologie bornée

3.1 Introduction

L'étude des fibrés plats principaux sur les surfaces, et notamment la question de savoir si un fibré est trivial après l'avoir tiré en arrière par un revêtement fini, est fortement liée à la cohomologie du groupe structurel muni de la topologie discrète. Plus précisément, si G est un groupe de Lie connexe, et si G^δ désigne G muni de la topologie discrète, il existe une application continue $\mathcal{B}\imath : \mathcal{B}\mathrm{G} \to \mathcal{B}\mathrm{G}^\delta$. Rappelons que tout fibré principal admet une application dite *classifiante* définie sur la base de la fibration et à valeurs dans $\mathcal{B}\mathrm{G}$ telle que le tiré en arrière du fibré universel $\mathcal{E}\mathrm{G} \to \mathcal{B}\mathrm{G}$ par cette application est isomorphe au fibré de départ. Un fibré au dessus de X est alors plat si et seulement si son application classifiante $f : \mathrm{X} \to \mathcal{B}\mathrm{G}$ se factorise par

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \mathcal{B}\mathrm{G}^\delta \arrow[r, "\mathcal{B}\imath"] & \mathcal{B}\mathrm{G} \end{tikzcd} .$$

La cohomologie de cet espace $\mathcal{B}\mathrm{G}$ est isomorphe à celle de G en tant que groupe.

La cohomologie bornée de cet espace a été largement étudiée par M. Gromov dans [4].

3.2 Généralités

Soit G un groupe de Lie connexe. Nous noterons G^δ le groupe G muni de la topologie discrète. Soit A un $\mathbb{Z}$-module muni d'une métrique (dans les cas $\mathrm{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$ nous utiliserons la métrique usuelle sauf mention explicite du contraire). Nous avons alors une application continue entre espaces classifiants $\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta \to \mathcal{B}\mathrm{G}$, obtenue en appliquant à chaque fibre de $\mathcal{E}\mathrm{G}^\delta$ l'identité $\imath : \mathrm{G}^\delta \to \mathrm{G}$, et en prenant l'application classifiante de ce G-fibré principal. Nous en déduisons un morphisme d'anneaux $\imath^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G}; \mathrm{A}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta; \mathrm{A})$.

Rappelons que $\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta$ est un $\mathrm{K}(\mathrm{G}, 1)$ (en utilisant la suite exacte des groupes d'homotopie d'une fibration). Alors $\mathrm{H}^n(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta; \mathrm{A}) = \mathrm{H}^n(\mathrm{G}, \mathrm{A})$.

Définition 3.2.1. Une classe $\alpha \in \mathrm{H}^n(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta; \mathrm{A})$ est dite *bornée* si elle peut être représentée par un cocycle $c : \mathrm{G}^n \to \mathrm{A}$ dont l'image est bornée (pour la métrique de A). Définissons une fonction sous-additive sur $\mathrm{H}^n(\mathrm{G};\mathrm{A})$ par

$$\|\alpha\|_\infty := \inf_{[c]=\alpha} \left\{ \sup_{g_i \in \mathrm{G}} \{|c(g_1, \cdots, g_n)|\} \right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Remarquons qu'une classe α est bornée si et seulement si $\|\alpha\|_\infty$ est fini. Dans la formule, si $\mathrm{A} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$, on utilise la valeur absolue. Si A est de type fini, $|\cdot|$ désigne la longueur par rapport à un système de générateurs, c'est-à-dire : si A est engendré par un ensemble symétrique S, et si $x \in \mathrm{A}$, $|x|$ est le plus petit nombre d'éléments nécessaires pour écrire x comme produit d'éléments de S.

Exemple 3.2.2 :
Soit $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{R})$, telle que l'image de α via l'application $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{R})$ est bornée. Soit $\phi : \Sigma_g \to \mathcal{B}\mathrm{G}^\delta$ une application continue (avec $g \geq 1$). Alors

$$|\phi^*\alpha([\Sigma_g])| \leq \mathrm{C}$$

où la constante C ne dépend que de α et de g. En effet, si $\|\cdot\|_1$ désigne la fonction sous-additive sur $\mathrm{H}_2(\Sigma_g)$ définie par

$$\forall \sigma \in \mathrm{H}_2(\Sigma_g) \quad \|\sigma\|_1 = \inf \left\{ \sum |n_i| \middle| \left[\sum n_i \sigma_i\right] = \sigma \right\}$$

nous avons

$$|\phi^*\alpha([\Sigma_g])| \leq \|\alpha\|_\infty \cdot \|[\Sigma_g]\|_1 \leq \|\alpha\|_\infty \cdot 4g$$

Nous en déduisons un exemple de classe de cohomologie non bornée : notons G le quotient du groupe d'Heisenberg par le sous-groupe engendré par un élément central et non-trivial. Comme ci-dessus, nous pouvons construire des applications continues $\phi_n : \Sigma_1 \to \mathcal{B}\mathrm{G}^\delta$ à partir d'un morphisme entre les groupes fondamentaux. Prenons alors α l'image par $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{Z})$ d'un générateur de $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathrm{G})$. Il est alors clair que $(|\phi_n^*\alpha([\Sigma_1])|)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas borné, et donc α ne peut pas être bornée par ce qui précède.

Comme G est connexe, $\mathcal{B}\mathrm{G}$ est simplement connexe. Nous en déduisons une suite d'isomorphismes naturels pour tout groupe abélien A

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathrm{A}) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_2(\mathcal{B}\mathrm{G});\mathrm{A}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_2(\mathcal{B}\mathrm{G});\mathrm{A}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{G});\mathrm{A}) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.3. Dans le cas où $\mathrm{A} = \pi_1(\mathrm{G})$, $o_2(\mathcal{E}\mathrm{G})$ correspond à l'identité.

Dans la suite, nous noterons $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ l'image de $o_2(\mathcal{E}\mathrm{G})$ par l'application

$$\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\pi_1(\mathrm{G}))$$

Proposition 3.2.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) La classe $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ *est bornée.*

(ii) Toutes les classes dans l'image de $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{Z})$ *sont bornées.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z})$, et notons ϕ_α le morphisme corespondant dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathrm{G});\mathbb{Z})$. Alors ϕ_α induit un morphisme $(\phi_\alpha)_* : \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\pi_1(\mathrm{G})) \to$

$\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z})$, qui envoie $o_2(\mathcal{E}\mathrm{G})$ sur α par construction. Notons α^δ l'image de α dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{Z})$. En étudiant l'image de $o_2(\mathcal{E}\mathrm{G})$ dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\pi_1(\mathrm{G})) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi_\alpha)_*"'] & \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\pi_1(\mathrm{G})) \arrow[d, "(\phi_\alpha)_*"] \\ \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{Z}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} o_2(\mathcal{E}\mathrm{G}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G}) \arrow[d, mapsto] \\ \alpha \arrow[r, mapsto] & \alpha^\delta \end{tikzcd}$$

nous voyons que $(\phi_\alpha)_*(o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})) = \alpha^\delta$ (la commutativité du diagramme vient de la naturalité). De plus, comme ϕ_α envoie des ensembles bornés sur des ensembles bornés, nous obtenons *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*.

Réciproquement, comme $\pi_1(\mathrm{G})$ est abélien de type fini, *(ii)* implique que toutes les classes dans l'image de $\mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G};\pi_1(\mathrm{G})) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\pi_1(\mathrm{G}))$ dont bornées. Alors en particulier la classes $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ est bornée. □

Proposition 3.2.5. *Soit* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{Q}$ *un revêtement fini qui est aussi un morphisme de groupes de Lie connexes. Alors* $p^* : \mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{Q}^\delta;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{R})$ *est un isomorphisme qui envoie de manière bijective le sous-groupe des classes bornées de* $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{Q}^\delta;\mathbb{R})$ *sur celui de* $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{R})$. *En particulier,* $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ *est bornée si et seulement si* $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{Q})$ *est bornée.*

Démonstration. Soit F le noyau de p. Comme F est fini, p^* est un isomorphisme. Nous savons de plus que F est moyennable, donc l'application induite sur les groupes de cohomologie bornée est un isomorphisme aussi (voir par exemple [2]).

D'autre part, soit $\imath : \pi_1(\mathrm{G}) \otimes \mathbb{R} \to \pi_1(\mathrm{Q}) \otimes \mathbb{R}$ l'isomorphisme induit par l'inclusion de $\pi_1(\mathrm{G})$ dans $\pi_1(\mathrm{Q})$. Nous avons clairement

$$p^* o_{2,\mathbb{R}}^\delta(\mathcal{E}\mathrm{Q}) = \imath_* o_{2,\mathbb{R}}^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$$

et donc le membre de droite est borné si et seulement si celui de gauche l'est. Ainsi $o_2(\mathcal{E}\mathrm{G})$ est borné si et seulement si $o_2(\mathcal{E}\mathrm{Q})$ l'est. □

Proposition 3.2.6. *Supposons* $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ *bornée (et non nulle). Soit* $z \in \pi_1(\mathrm{G}) \cap \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}}) = \pi_1(\mathcal{D}\mathrm{G}) \subset \tilde{\mathrm{G}}$ *d'ordre infini. Alors*

$$scl(z) \geq \frac{1}{4\|o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})\|_\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|^n}{n} > 0.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\lim_n |z^n|/n$ est fini puisque $\pi_1(\mathrm{G})$ est abélien et de type fini. Maintenant, pour $n \neq 0$, $cl(z^n) = g$, et en écrivant Σ_g comme le quotient d'un $4g$-gone, nous obtenons

$$|z^n| \leq \|o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})\|_\infty \cdot (4g-2).$$

Le résultat s'obtient alors en divisant par n et en prenant les limites. □

Théorème 3.2.7. *Soient* G *un groupe de Lie connexe,* $\tilde{\mathrm{G}}$ *son revêtement universel et* R *son radical (c'est-à-dire le plus grand sous-groupe résoluble et connexe). Sont équivalents :*

(1) Tous les éléments dans l'image de $\mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G};\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^*(\mathcal{B}\mathrm{G}^\delta;\mathbb{Z})$ *sont bornés.*

(2) $\pi_1(\mathcal{D}(\mathrm{R})) = \{0\}$.

(3) Si $z \in \pi_1(\mathrm{G}) \cap \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}})$, *alors soit* z *est d'ordre fini, soit* $scl(z) > 0$.

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $\mathcal{D}(\mathrm{R})$ n'est pas simplement connexe. Alors il existe une application continue $f : \Sigma_g \to \mathcal{B}\mathrm{R}^\delta$ définie sur une surface fermée orientée de genre $g \geq 1$ telle que $f^* o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{R}) \cdot [\Sigma_g] \in \pi_1(\mathcal{D}(\mathrm{R}))$ n'est pas nul. De cela nous déduisons que $o_2^\delta(\mathcal{E}\mathrm{G})$ n'est pas borné.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supposons qu'il existe un $z \in \pi_1(\mathrm{G}) \subset \tilde{\mathrm{G}}$ d'ordre infini et tel que $\mathrm{scl}(z) = 0$. Alors il existe un n tel que $z^n \in \tilde{\mathrm{R}}$ (voir [3]), et donc $z^n \in \pi_1(\mathrm{R}) \cap \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}}) = \pi_1(\mathcal{D}(\mathrm{G})) = \{0\}$, ce qui est absurde.

(3) $\Rightarrow$ (1) Soit K un sous-groupe compact maximal de $\mathcal{D}(\mathrm{G})$. Alors le revêtement universel de K est un sous-groupe de la forme $\mathrm{E} \times \mathrm{S}$ de $\mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}})$ où $\mathrm{E} \simeq \mathbb{R}^k$ et S est semi-simple et compact. Notons $p : \mathrm{E} \times \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ la projection sur le second facteur. Alors l'image par p de $\pi_1(\mathcal{D}(\mathrm{G})) \subset \mathrm{E} \times \mathrm{S}$ est central et donc fini. Quitte à remplacer G par un revêtement fini, nous pouvons alors supposer que $\pi_1(\mathrm{G}) \cap \mathcal{D}(\tilde{\mathrm{G}})$ est inclus dans E. Nous pouvons alors conlure (voir [3], lemmes 4.3 et 5.1). $\square$

Références

[1] K. Brown, *Cohomology of Groups*, Springer, 1982.

[2] D. Calegari, *scl*, vol. 20, MSJ Memoirs, 1991.

[3] I. Chatterji, Y. de Cornulier, G. Mislin et C. Pittet, *Bounded characteristic classes and flat bundles*, J. Differential Geometry, 95 (2013), p. 39–51.

[4] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 56 (1982), p. 5–99.

[5] J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton Univ. Press, 1974.

[6] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.