

Triangulations aléatoires vérifiant une propriété de Markov spatiale.

Thomas BUDZINSKI

Introduction au domaine de recherche, sous la direction de Nicolas CURIEN

Table des matières

1	L'UIPT	1
2	Propriété de Markov spatiale	3
3	Des cartes markoviennes "hyperboliques"	6
4	Perspectives : limites d'échelles	8

Introduction

L'étude des cartes planaires aléatoires est un sujet de recherche très récent, né en 2003 avec d'un côté l'article d'Angel et Schramm [4] et de l'autre celui de Chassaing et Schaeffer [6], dont le but est de construire des surfaces aléatoires. En dehors de l'aspect purement esthétique, la principale motivation vient des physiciens, qui y voient un modèle de "gravité quantique" dans un espace-temps à deux dimensions. Une carte planaire est un graphe plongé dans la sphère, considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près. Typiquement, on cherche à étudier les propriétés d'une carte uniforme parmi les triangulations à n sommets quand n tend vers l'infini. Ce passage à la limite peut se faire de deux manières différentes :

- les limites d'échelle, comme dans le théorème de Donsker (convergence de marches aléatoires vers le mouvement brownien) : en renormalisant les distances par $n^{1/4}$, on obtient à la limite un espace métrique compact continu aléatoire homéomorphe à la sphère appelé *carte brownienne*.
- les limites locales : on ne renormalise pas et on obtient à la limite une carte aléatoire discrète infinie.

La première approche repose essentiellement sur des bijections avec des arbres, le lecteur intéressé pourra consulter [12]. On s'intéressera plutôt dans ce texte à la seconde, pour laquelle les techniques utilisées sont souvent différentes mais reposent toujours sur des formules de dénombrement.

1 L'UIPT

Commençons par définir une carte. Dans toute la suite (exceptée la dernière section), on considérera des graphes qui peuvent avoir des arêtes multiples mais jamais de boucles :

Définition 1.1. — Une *carte* est un plongement d'un graphe (connexe, non orienté et localement fini) dans une surface de manière à ce que les arêtes ne s'intersectent pas et

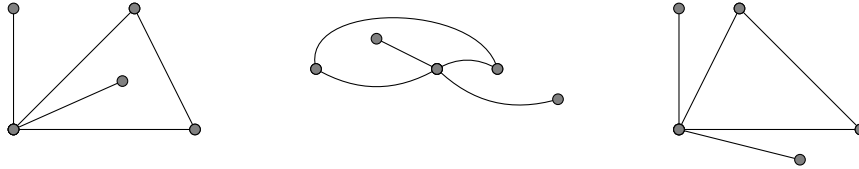


FIGURE 1 – Les deux premières cartes sont les mêmes. La dernière est différente même si le graphe sous-jacent est le même, par exemple car elle a une face à 3 arêtes. Notons que dans la carte de gauche, les 2 faces sont des 5-gones, puisqu'à chaque fois une arête est parcourue deux fois en faisant le tour de la face.

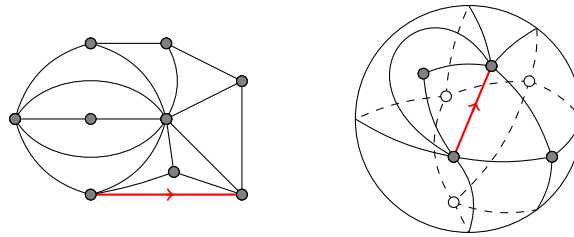


FIGURE 2 – Exemple : une triangulation d'un hexagone et une triangulation de la sphère.

que les composantes connexes du complémentaire, appelées *faces*, soient homéomorphes au disque unité. Le plongement est considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près.

- On notera $|c|$ le nombre de sommets d'une carte c .
- Une carte est une *triangulation* si toutes ses faces sont adjacentes à trois arêtes.
- Une carte *enracinée* est une carte munie d'une arête orientée distinguée.
- Une *triangulation d'un p -gone* est une carte dessinée sur la sphère dont toutes les faces sont triangulaires sauf une, appelée *face externe*, telle que la face externe soit un p -gone *simple*, c'est-à-dire dont les p sommets du bord soient distincts. Elles seront toujours enracinées sur une arête du bord.

Remarque 1.2. La définition donnée ici semble indiquer qu'une carte est un objet *topologique*. Cependant, on peut également la définir comme un recollement de polygones le long de leurs arêtes, ce qui en fait plutôt un objet *combinatoire*. En particulier, pour tout n , il n'y a qu'un nombre fini de triangulations de la sphère à n faces.

Le résultat le plus ancien sur les cartes planaires est la formule d'Euler (le second point se déduit aisément du premier) :

Proposition 1.3. — Soit c une carte dessinée sur la sphère, et v , e , f les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de c . Alors $v - e + f = 2$.

- Si de plus c est une triangulation de la sphère, alors $f = 2v - 4$ et $e = 3v - 6$.

Avant d'évoquer les résultats de convergence, on a besoin d'une distance sur l'ensemble des cartes. C'est la distance *locale*, définie par Benjamini et Schramm. Informellement, elle mesure jusqu'où on doit s'éloigner de la racine pour différencier deux cartes :

Définition 1.4. — Soit t une triangulation et $r \in \mathbb{N}^*$. La boule de rayon r de t , notée $B_r(t)$, est la triangulation formée par les faces dont au moins un des sommets est à distance inférieure ou égale à $r - 1$ de la racine, ainsi que tous leurs sommets et leurs arêtes.

— Soient t et t' deux triangulations. Soit r le plus grand entier tel que $B_r(t) = B_r(t')$. On pose :

$$d(t, t') = \frac{1}{1 + r}$$

Il est assez facile de vérifier que l'ensemble des triangulations muni de cette distance forme un espace séparable (les triangulations finies de la sphère sont denses) et complet. Le premier résultat important sur les limites locales de cartes aléatoires est dû à Angel et Schramm en 2003 :

Théorème 1.5 ([4]). Soit τ_n la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble des triangulations de la sphère à n sommets. Alors (τ_n) converge faiblement pour la distance d , vers une mesure τ supportée par les triangulations du plan. Une triangulation de loi τ est appelée *UIPT* (pour Uniform Infinite Planar Triangulation).

Nous n'entrerons pas dans les détails de la preuve d'Angel et Schramm. Elle fait un usage répété des résultats de dénombrement obtenus par Tutte par des méthodes calculatoires (fonctions génératrices), avec des idées introduites dans [14] (une preuve complète du théorème de Tutte se trouve dans [11]) :

Théorème 1.6. On note $\varphi_{n,p}$ le nombre de triangulation d'un p -gone avec n sommets internes. Alors :

$$\varphi_{n,p+2} = \frac{2^{n+1}(2p+1)(2p+3n)!}{p!^2 n!(2p+2n+2)!}$$

Remarque 1.7. Une triangulation de la sphère peut être vue comme une triangulation d'un 3-gone, donc le nombre de triangulations de la sphère à n sommets vaut $\varphi_{3,n-3}$

Expliquons rapidement comment cette formule peut donner le théorème 1.5 : si T_n est une triangulation à n sommets et t une petite triangulation d'un p -gone, la probabilité que t se trouve à l'intérieur de T_n avec les racines qui coïncident est égale aux nombres de remplissages possibles de la face externe de t , divisé par le nombre total de triangulations de la sphère à n sommets. On connaît cette quantité grâce à 1.6, et on peut calculer sa limite quand $n \rightarrow +\infty$. Il manque alors un argument de tension pour conclure. Notons également que, si T est une *UIPT*, la démonstration nous donne pour toute triangulation t d'un p -gone, la valeur de $\mathbb{P}(t \subset T)$.

2 Propriété de Markov spatiale

En plus d'établir l'existence de l'*UIPT*, Angel et Schramm mettent en évidence une propriété très intéressante : la propriété de Markov spatiale. La propriété de Markov temporelle habituelle est souvent formulée de la manière suivante :

"Conditionnellement au présent, le passé est indépendant de l'avenir."

Ici, le passé correspondra à une triangulation finie dont on sait qu'elle est contenue dans l'*UIPT*, le présent au bord de cette triangulation, et l'avenir à la partie qu'il reste à découvrir :

Théorème 2.1 ([4]). Soient T une *UIPT* et t une triangulation finie dont le bord est une union de k cycles disjoints de longueurs p_1, \dots, p_k . On conditionne à l'événement $t \subset T$ (rappelons que la probabilité de cet événement est connue) et on note T_i la triangulation qui remplit le i -ème cycle. Alors :

- (i) Presque sûrement, une seule des T_i est infinie et on connaît en fonction des p_j la probabilité que ce soit T_i .
- (ii) Pour tout i_0 , conditionnellement à ce que T_{i_0} soit infinie, les T_j sont indépendantes.

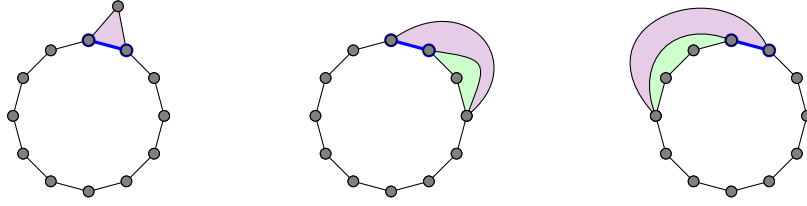


FIGURE 3 – Les trois cas rencontrés au cours d'une étape de peeling. En bleu, l'arête "épluchée" e et en violet, la face adjacente f . En vert, la composante connexe finie qu'on remplit par une triangulation fini. On a $i = 2$ sur le deuxième dessin et $i = 3$ sur le troisième.

- (iii) Pour tous i_0 et j , conditionnellement à ce que T_{i_0} soit infinie, la loi de T_j ne dépend que de p_j . Si de plus $j \neq i_0$, la loi de la triangulation finie T_j est connue explicitement.

Remarque 2.2. Cette propriété n'est pas si surprenante : si T_n est une triangulation de la sphère à n sommets uniforme et t une triangulation d'un p -gone, il est facile de voir que conditionnellement à $t \subset T_n$, la partie restante est uniforme parmi les triangulations du p -gone avec $n - |t|$ sommets internes. Il n'est pas évident que la dépendance en $|t|$ disparaisse en passant à la limite, mais c'est un phénomène courant en probabilité.

L'intérêt de cette propriété est qu'elle permet, selon le point de vue, de simuler ou de découvrir une UIPT presque "face par face" : c'est le processus de *peeling* (ou d'*épluchage*), étudié par Angel dans [1]. Voici comment il fonctionne :

On part de la face qui se trouve à droite de l'arête racine. Supposons qu'après n étapes, on ait découvert une triangulation finie t d'un p -gone : on choisit une arête e sur le bord ∂t de t . On note f la face adjacente à cette arête qui n'est pas dans t et y le troisième sommet de f . Il y a trois possibilités :

- (i) Le sommet y n'est pas sur ∂t .
- (ii) Il est sur ∂t , de sorte que f sépare de l'infini les i arêtes de ∂t à droite de e .
- (iii) Il est sur ∂t , de sorte que f sépare de l'infini les i arêtes de ∂t à gauche de e .

Grâce à 2.1, on sait que les probabilités de chacun de ces cas ne dépendent que de $|\partial t|$ et on les connaît explicitement. De plus, si on est dans le deuxième ou le troisième cas, on connaît la loi de la triangulation qui remplit le $i + 1$ -gone qui se forme, et on sait qu'elle est indépendante de la partie infinie qui reste à découvrir.

Notons P_n et V_n le périmètre et le nombre de sommets de la carte obtenue après n étapes : dans le premier cas, $P_{n+1} = P_n + 1$ et, dans les deux autres, $P_{n+1} = P_n - i$. Comme les probabilités de ces cas ne dépendent que de P_n , la suite (P_n) est une chaîne de Markov. Il est même facile de montrer que $(P_n, V_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov.

Un grand avantage de cette technique est sa souplesse : elle reste valable quelque soit le choix, déterministe ou aléatoire, de l'arête à éplucher, du moment que le choix de l'arête est indépendant de la partie de la carte qui n'est pas encore découverte. C'est de là que vient la plupart des résultats connus sur l'UIPT. La loi de la chaîne $(P_n, V_n)_{n \geq 0}$ est indépendante de ces choix. Par exemple, en épluchant les arêtes "dans l'ordre" en tournant autour de la racine de manière à les découvrir par ordre croissant de distance à la racine, Angel obtient le résultat suivant :

Théorème 2.3 ([1]). Il existe c telle que presque sûrement, pour r assez grand :

$$\frac{r^4}{(\ln r)^c} \leq |B_r(T)| \leq r^4 (\ln r)^c$$

Bien que "topologiquement" de dimension 2, l'UIPT a donc une croissance de l'ordre de r^4 , bien plus rapide que celle des réseaux euclidiens !

Angel étudie aussi la percolation sur l'UIPT : on colorie chaque sommet de T en noir avec probabilité p de manière indépendante, et on s'intéresse à l'existence de composantes connexes noires infinies. La loi du 0 – 1 de Kolmogorov montre qu'il existe p_c tel que pour $p < p_c$, de telles composantes n'existent pas presque sûrement et que pour $p > p_c$ elles existent presque sûrement.

En épluchant les arêtes de manière à suivre les interfaces de percolation sur T , on obtient le résultat suivant. Notons que ce résultat est beaucoup plus facile à prouver que son analogue sur le réseau triangulaire déterministe, dû à Kesten en 1980 :

Théorème 2.4 ([1]). Presque sûrement, $p_c(T) = \frac{1}{2}$.

Les arêtes à éplucher peuvent aussi suivre une marche aléatoire : on effectue une marche aléatoire sur la carte et à chaque étape, si la marche se trouve sur le bord de la carte on épluche une arête adjacente à la position de la marche. Sinon, on poursuit la marche aléatoire. C'est ainsi que Benjamini et Curien obtiennent le résultat suivant sur l'UIPQ, variante de l'UIPT où les faces sont de degré 4 :

Théorème 2.5 ([5]). Soit (X_n) une marche aléatoire simple sur l'UIPQ. Il existe C tel que presque sûrement, pour n assez grand :

$$d(X_0, X_n) \leq n^{1/3} (\ln n)^C$$

Ils obtiennent en réalité un résultat plus fort, mais on conjecture que l'exposant optimal est $\frac{1}{4}$.

Signalons enfin ce joli résultat, dû à Curien et Le Gall :

Théorème 2.6 ([8]). Quel que soit les choix d'arêtes (indépendants de la partie non encore découverte de la carte) qu'on fait, le peeling découvre presque sûrement toute l'UIPT.

Terminons cette section en évoquant les triangulations du demi-plan : il s'agit de triangulations qui remplissent le demi-plan, et ont donc un bord infini homéomorphe à une droite. Ces triangulations sont enracinées sur le bord. Il existe une version semi-planaire de l'UIPT, appelée *UIHPT* (pour Uniform Infinite Half Planar Triangulation), construite par Angel dans [2]. Pour la construire, on considère une triangulation uniforme d'un p -gone avec n sommets internes, on prend la limite locale en faisant tendre n vers l'infini pour obtenir une triangulation infinie d'un p -gone, puis on prend la limite locale en faisant tendre p vers l'infini.

La propriété de Markov spatiale s'exprime de manière particulièrement agréable dans le demi-plan. En effet, retirer un p -gone autour de la racine à une triangulation du plan donne une triangulation infinie d'un p -gone, ce qui introduit un paramètre p . En revanche, en retirant un p -gone autour de la racine à une triangulation du demi-plan, on obtient de nouveau un demi-plan !

Théorème 2.7. (i) L'UIHPT (notée H) est *invariante par translation*, c'est-à-dire que sa loi est invariante par translation de la racine le long du bord.

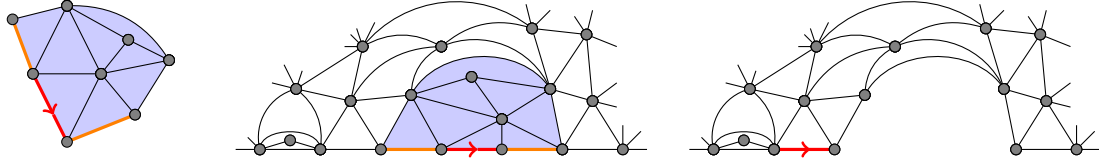


FIGURE 4 – Un exemple de triangulation t où la partie distinguée du bord est en orange, une triangulation du demi-plan h avec $t \subset h$, et $h \setminus t$. Les racines de t , h et $h \setminus t$ sont en rouge. Notons que grâce à l'invariance par translation, l'endroit où on place la racine de $h \setminus t$ n'a aucune importance.



FIGURE 5 – Les événements correspondant respectivement à α et β .

- (ii) Soit t une triangulation finie d'un p -gone, avec un segment distingué sur son bord qui contient la racine. On note $\{t \subset H\}$ l'évènement " t est contenue dans H de manière à ce que les racines coïncident et à ce que le segment distingué soit égal à $t \cap \partial H$ ". Conditionnellement à cet évènement, la triangulation $H \setminus t$ est une UIHPT.

3 Des cartes markoviennes "hyperboliques"

Devant l'utilité de la propriété de Markov spatiale, il est naturel de se demander si les triangulations vérifiant une propriété similaire sont nombreuses. La propriété s'exprimant de manière particulièrement simple dans le cas du demi-plan, c'est dans ce contexte que la question a été étudiée en premier, par Angel et Ray en 2013 ([3]). La définition choisie est alors celle du théorème 2.7 :

Définition 3.1. Soit H une triangulation aléatoire du demi-plan. On dit que H est *markovienne* si :

- (i) La loi de H est invariante par translation de la racine le long du bord.
- (ii) Pour toute triangulation t d'un p -gone avec un segment marqué sur le bord, conditionnellement à $t \subset H$, la triangulation $H \setminus t$ a la même loi que H .

Théorème 3.2 ([3]). L'ensemble des triangulations markoviennes du demi-plan forme une famille à un paramètre $(H_\alpha)_{\alpha \in [0,1[}$. De plus, α est la probabilité que dans H_α , le troisième sommet de la face qui touche l'arête racine ne soit pas sur ∂H_α .

Nous allons maintenant donner une idée de la démonstration de ce résultat : soit H une triangulation markovienne du demi-plan, et f_0 la face qui touche l'arête racine. Soit α la probabilité que le troisième sommet de f_0 ne soit pas sur ∂H : on veut montrer que la loi de H est entièrement déterminée par α . On note également β la probabilité que l'arête de ∂H juste à gauche de la racine soit aussi une arête de f_0 (cf. figure 5).

Les événements décrits par α et β servent alors de "briques de base" permettant de calculer toutes les probabilités $\mathbb{P}(t \subset H)$ en fonction de α et β , puisque chaque t peut s'obtenir à partir d'une droite, en ajoutant à chaque étape une face de type α ou une face de type β , comme sur

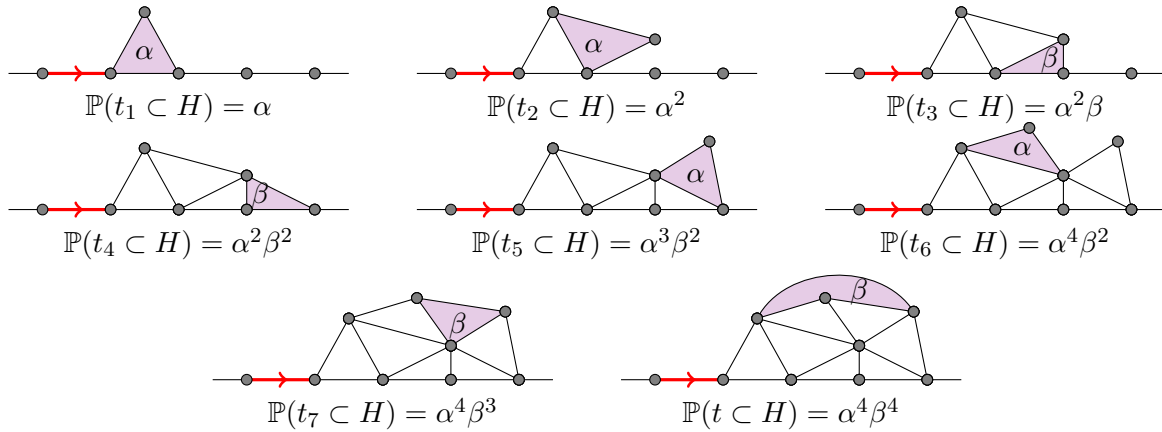


FIGURE 6 – Calcul de $\mathbb{P}(t \subset H) = \alpha^4 \beta^4$ pour l'exemple de la figure 4.

la figure 6. Plus précisément, $\mathbb{P}(t \subset H) = \alpha^{a(t)} \beta^{b(t)}$ où $a(t)$ est le nombre de sommets de t qui ne sont pas sur le segment distingué du bord, et $a(t) + b(t)$ est le nombre de faces de t . Cela montre que la loi de H est caractérisée par α et β .

Pour conclure, il ne manque donc plus qu'une relation entre α et β . Mais comme on connaît toutes les $\mathbb{P}(t \subset H)$, on sait calculer, pour tout i , la probabilité que le troisième sommet de f_0 soit sur ∂H , à distance i de la racine (il suffit de sommer sur tous les remplissages possibles du $i+1$ -gone délimité par f_0). Or, en sommant sur toutes les valeurs possibles du troisième sommet de f_0 sur le bord et en ajoutant α on doit obtenir 1, ce qui donne une relation entre α et β , ce qui conclut la preuve de l'unicité.

Pour montrer l'existence, on construit les triangulations avec le peeling, les probabilités de chaque cas dans 3 ayant déjà été calculées. Le point délicat de la démonstration consiste alors à montrer que la loi de la triangulation obtenue ne dépend pas de l'ordre dans lequel on épluche les arêtes.

Le cas $\alpha = \frac{2}{3}$ correspond à l'UIHPT, dont les propriétés géométriques sont proches de celles de l'UIPT. On observe de plus une transition de phase à cette valeur, et les régimes sous-critiques ($\alpha < \frac{2}{3}$) et surcritiques ($\alpha > \frac{2}{3}$) sont étudiés par Ray dans [13] :

Théorème 3.3 ([13]). Si $\alpha < \frac{2}{3}$, presque sûrement, il existe une infinité d'arêtes dans H_α qui, chacune à elle seule, séparent la racine de l'infini.

Théorème 3.4 ([13]). On note \overline{B}_r la réunion de la boule de rayon r et de toutes les composantes connexes finies de son complémentaire. Si $\alpha < \frac{2}{3}$, alors $\frac{|\overline{B}_r(H_\alpha)|}{r^2}$ converge en loi (vers une variable stable totalement asymétrique d'indice $\frac{1}{2}$).

Le premier de ces résultats (certaines arêtes isolent la racine de l'infini) suggère que les propriétés à grande échelle des H_α sous-critiques sont similaires à celles d'un arbre. Ray conjecture d'ailleurs que la limite d'échelle de ces triangulations est un arbre continu aléatoire.

Théorème 3.5 ([13]). Si $\alpha > \frac{2}{3}$, il existe $c(\alpha)$ et $C(\alpha)$ tels que p.s. pour r assez grand :

$$c^r \leq |\partial \overline{B}_r(H_\alpha)| \leq |\overline{B}_r(H_\alpha)| \leq C^r$$

Théorème 3.6 ([13]). Si $\alpha > \frac{2}{3}$, on a "anchored expansion", i.e il existe $c(\alpha) > 0$ tel que p.s., pour tout ensemble fini connexe de sommets S , assez grand et contenant la racine, on a $|\partial S| \geq c|S|$.

Ces deux résultats suggèrent que les cartes surcritiques ont un comportement "hyperbolique" : leur croissance est exponentielle et elles vérifient une inégalité isopérimétrique hyperbolique, analogue de la non-moyennabilité pour des objets aléatoires.

Passons maintenant aux triangulations du plan, traitées par Curien dans [7]. Comme le périmètre peut varier au cours du temps, on ne dispose pas d'analogue des variables α et β qui permettent de montrer le théorème 3.2. Pour contourner ce problème, on choisit une définition plus forte de la propriété de Markov :

Définition 3.7. Soit $\kappa > 0$. On dit qu'une triangulation aléatoire du plan T est κ -markovienne si il existe des constantes $(C_p(\kappa))_{p \geq 2}$ telles que pour toute triangulation t d'un p -gone :

$$\mathbb{P}(t \subset T) = C_p(\kappa)\kappa^{|t|}$$

On peut alors formuler un théorème similaire à 3.2, les outils de la preuve étant les mêmes. Dans le plan, seuls les régimes critique (l'UIPT correspond à $\kappa = \frac{2}{27}$) et surcritique survivent :

Théorème 3.8 ([7]). Si $\kappa > \frac{2}{27}$, il n'existe aucune triangulation du plan κ -markovienne.

Si $\kappa \leq \frac{2}{27}$, il en existe une unique en loi, notée T_κ .

Curien met également en évidence pour $\kappa < \frac{2}{27}$ un comportement hyperbolique : on a de nouveau l'anchored expansion et la croissance exponentielle, et on connaît cette croissance beaucoup plus précisément :

Théorème 3.9 ([7]). Pour $k < \frac{2}{27}$, la triangulation T_κ vérifie presque sûrement la propriété d'"anchored expansion" (cf. 3.6).

Théorème 3.10 ([7]). Soient $\kappa \in]0, \frac{2}{27}[$ et $\alpha \in]0, \frac{2}{3}[$ tel que $\frac{\alpha^2(1-\alpha)}{2} = \kappa$. Alors il existe une variable aléatoire Π_κ telle que $\Pi_\kappa > 0$ p.s et :

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{3\alpha - 2}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{3\alpha - 2}} \right)^r |\partial \overline{B}_r(T_\kappa)| \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{p.s.} \Pi_\kappa$$

et $\frac{|\overline{B}_r(T_\kappa)|}{|\partial \overline{B}_r(T_\kappa)|} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{2\alpha - 1}{3\alpha - 2}$

Curien s'intéresse enfin à la marche aléatoire sur les T_κ et montre qu'elle se déplace à vitesse linéaire, autre caractéristique de la géométrie hyperbolique :

Théorème 3.11 ([7]). Soit $\kappa < \frac{2}{27}$ et (X_n) la marche aléatoire simple sur T_κ . Alors il existe $v_\kappa > 0$ telle que presque sûrement :

$$\frac{1}{n}d(X_0, X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v_\kappa$$

4 Perspectives : limites d'échelles

L'autre manière d'étudier des limites de cartes est de considérer des limites d'échelles. On a pour cela besoin de munir l'ensemble des espaces métriques compacts (considérés à isométrie près) : c'est la distance de Gromov-Hausdorff.

Définition 4.1. Soit (X, d) un espace métrique et K_1 et K_2 deux compacts de X . On pose :

$$d_H(K_1, K_2) = \max \left(\sup_{x \in K_1} d(x, K_2), \sup_{y \in K_2} d(y, K_1) \right)$$

d_H est appelée *distance de Hausdorff*.

Définition 4.2. Soient K_1 et K_2 deux espaces métriques compacts. On pose :

$$d_{GH}(K_1, K_2) = \inf_{(\varphi_1, \varphi_2)} d_H(\varphi_1(K_1), \varphi_2(K_2))$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques φ_1 et φ_2 de K_1 et K_2 dans un même espace métrique.

d_{GH} est appelée *distance de Gromov-Hausdorff*.

Définition 4.3. Soient (X_1, ρ_1) et (X_2, ρ_2) deux espaces métriques pointés localement compacts. On pose :

$$d_{LGH}(X_1, X_2) = \sum_{r \geq 1} \frac{1}{2^r} d_{GH}(B_r(X_1, \rho_1), B_r(X_2, \rho_2))$$

où $B_r(X, \rho)$ est la boule de rayon r autour de ρ dans X .

d_{LGH} est appelée *distance de Gromov-Hausdorff locale*.

Une carte peut naturellement être vue comme un espace métrique discret, muni de la distance de graphe. Si X est un espace métrique et $a \in \mathbb{R}^+$, on notera aX l'espace obtenu à partir de X en multipliant toutes les distances par a . Dans le cas des quadrangulations, la limite d'échelle est obtenue par Le Gall et Curien :

Théorème 4.4 ([9]). Soit Q une *UIPQ*. Il existe un espace métrique aléatoire homéomorphe au plan \mathcal{P} , appelé *plan brownien*, tel qu'on ait la convergence suivante :

$$\frac{1}{a} Q \xrightarrow[a \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathcal{P}$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff locale.

On peut alors se demander si les cartes hyperboliques introduites plus haut admettent une limite d'échelle pour $\kappa < \frac{2}{27}$. Malheureusement, cela n'est pas possible. En effet, on peut montrer en utilisant la propriété d'"anchored expansion" qu'il existe une suite (aléatoire) $(n_r) \rightarrow +\infty$ et, pour tout r , des points $x_1^r, \dots, x_{n_r}^r$ sur $\partial \overline{B_r}(T_\kappa)$ tels que pour tout $i \neq j$ on ait $d(x_i^r, x_j^r) \geq \frac{r}{2}$. En passant à la limite, ce résultat implique que si $\frac{1}{a} T_\kappa$ converge pour la distance de Gromov-Hausdorff locale vers X , il y a une infinité de points sur $\partial \overline{B_1}(X)$, deux à deux distants d'au moins $\frac{1}{2}$. La boule $B_1(X)$ ne peut donc pas être compacte, ce qui est absurde.

Une possibilité serait donc de tenter une autre approche pour "amortir" l'hyperbolicité : faire tendre κ vers $\frac{2}{27}$ tout en renormalisant les distances : c'est une approche *quasi-critique*. On espère obtenir à la limite un *plan brownien hyperbolique*, dont les propriétés locales seraient les mêmes que celles du plan brownien mais qui aurait des propriétés hyperboliques à grande échelle.

Conjecture 4.5. Soit $(\kappa_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels tels que $\kappa_n \in]0, \frac{2}{27}]$ et :

$$\kappa_n = \frac{2}{27} - \frac{8}{81n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Alors on a la convergence suivante pour la distance de Gromov-Hausdorff locale :

$$\frac{1}{n} T_{\kappa_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(loi)} \mathcal{HP}$$

où \mathcal{HP} est un espace métrique appelé *plan brownien hyperbolique*

De plus, \mathcal{HP} vérifie pour toute fonction f mesurable :

$$\mathbb{E}\left[f(\overline{B}_r(\mathcal{HP}))\right] = \mathbb{E}\left[f(\overline{B}_r(\mathcal{P}))e^{-2|\overline{B}_r(\mathcal{P})|}e^{|\partial\overline{B}_r(\mathcal{P})|} \int_0^1 e^{-3|\partial\overline{B}_r(\mathcal{P})|x^2} dx\right]$$

où les grandeurs $|\overline{B}_r(\mathcal{P})|$ et $|\partial\overline{B}_r(\mathcal{P})|$ correspondent au "volume" et au "périmètre" des boules remplies du plan brownien et sont définies par Curien et Le Gall dans [9] et [10].

La voie naturelle pour établir un tel résultat serait de calculer la densité de $\overline{B}_r(T_\kappa)$ par rapport à $\overline{B}_r(T_{2/27})$ et de faire passer cette densité à la limite, en utilisant la convergence des cartes critiques. Le plan brownien hyperbolique serait alors défini comme le plan brownien, biaisé par une certaine variable aléatoire. Malheureusement, l'analogie du théorème 4.4 pour l'UIPT n'a pas été démontré. On connaît cependant des résultats de limite d'échelle pour des triangulations si on autorise des boucles (c'est-à-dire des arêtes reliant un sommet à lui-même). Une première étape nécessaire est donc de construire un analogue des T_κ où l'on autorise les boucles.

Références

- [1] O. Angel. Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation. *Geom. Funct. Anal.*, 13 :935–974, 2003.
- [2] O. Angel. Scaling of percolation on infinite planar maps, 2004. arxiv.org/abs/math/0501006.
- [3] O. Angel and G. Ray. Classification of half planar maps. *Ann. Probab.* À paraître.
- [4] O. Angel and O. Schramm. Uniform infinite planar triangulations. *Comm. Math. Phys.*, 241 :191–213, 2003.
- [5] I. Benjamini and N. Curien. Simple walk on the uniform infinite planar quadrangulation : subdiffusivity via pioneer points. *Geom. Funct. Anal.*, 23 :501–531, 2013.
- [6] P. Chassaing and G. Schaeffer. Random planar lattices and integrated superbrownian excursion. *Probability Theory and Related Fields*, 128(2) :161–212, 2004.
- [7] N. Curien. Planar stochastic hyperbolic infinite triangulations. *Probability Theory and Related Fields*, 2014. À paraître.
- [8] N. Curien and J.-F. Le Gall. Scaling limits for the peeling process on random maps. preprint.
- [9] N. Curien and J.-F. Le Gall. The brownian plane. *J. Theoret. Prob.*, 27 :1249–1291, 2014.
- [10] N. Curien and J.-F. Le Gall. The hull process of the brownian plane. 2014. preprint.
- [11] I. Goulden and D. Jackson. *Combinatorial enumeration*. New York, Wiley, 1983.
- [12] J.-F. Le Gall and G. Miermont. Scaling limits of random trees and planar maps. In *Probability and statistical physics in two and more dimensions*, pages 155–211. Amer. Math. Soc., 2012.
- [13] G. Ray. Geometry and percolation on half-planar triangulations. *Elec. J. Prob.*, 19 :1–28, 2014.
- [14] W. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1962.