Introduction au domaine de recherche : Topologie algébrique dirigée

Maxime Chaminadour

octobre 2016

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Exemple de motivation : le calcul concurrent 1

1.2 La topologie algébrique dirigée 2

2 Définitions générales **3**

2.1 Les espaces dirigés, les dihomotopies 3

2.2 Un invariant homotopique : la catégorie de composantes 4

2.3 Un invariant homologique : l'homologie naturelle 5

2.4 Que faire de ces invariants ? 5

3 Les ensembles cubiques **6**

3.1 Définition 6

3.2 Structure dirigée et courbure 6

3.3 Les structures d'évènements 7

3.4 Calcul de la catégorie de composante par les configurations maximales 8

4 Pistes de recherche **10**

1 Introduction

1.1 Exemple de motivation : le calcul concurrent

La *topologie algébrique dirigée* est un champ d'étude récent qui trouve son origine dans des problèmes d'informatique. L'un de ces problèmes (il en existe d'autres, comme la réécriture) est la preuve de programmes concurrents.

On apprend assez vite, dans un cours d'algorithmique, l'importance de pouvoir prouver mathématiquement qu'un algorithme effectue correctement le calcul que l'on souhaite. On utilise alors des techniques comme les *invariants de boucle*, c'est-à-dire une preuve par récurrence.

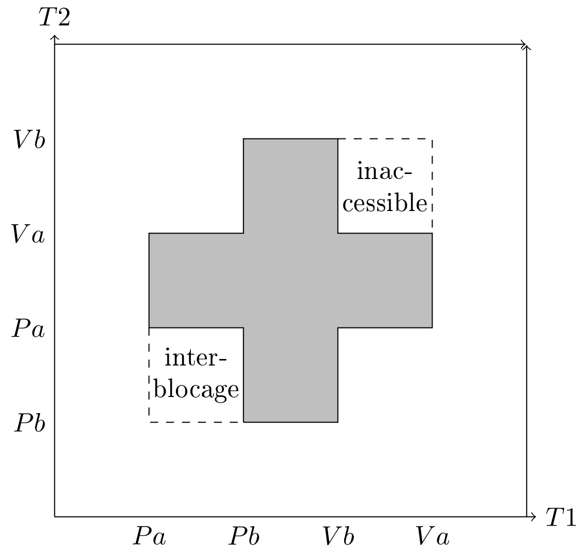
Cependant, lorsque le programme que l'on cherche à prouver devient *concurrent*, c'est-à-dire qu'il effectue plusieurs calculs sur les mêmes données en parallèle, les techniques basiques précédentes ne suffisent plus. En effet, pour pouvoir effectuer un tel traitement en parallèle, on utilise généralement des *exclusions mutuelles* : lorsqu'un calcul porte sur une partie des données, il la bloque (les autres calculs ne peuvent ni lire ni écrire sur ces données) le temps nécessaire, puis la libère. Apparaît alors un risque nouveau : *l'interblocage*.

Par exemple, si on effectue deux calculs $T1$ et $T2$, qui portent sur deux ressources (des données) a et b, que $T1$ a besoin d'utiliser a puis b et que $T2$ a besoin d'utiliser b puis a, il peut arriver la situation suivante : $T1$ bloque a, $T2$ bloque b, mais $T1$ a maintenant besoin de b pour continuer, et $T2$ de a. Le calcul est bloqué. On écrira cet exemple plus formellement à l'aide de PV-programmes, une syntaxe qui permet de décrire ce genre de problèmes (voir par exemple [8] pour les propriétés des PV-programmes et de leur sémantique géométrique) :

$$T1 = Pa.Pb.Vb.Va \tag{1}$$

$$T2 = Pb.Pa.Va.Vb \tag{2}$$

Le P représente le blocage d'une ressource, le V sa libération. Géométriquement, on aura :



Chaque axe représente le déroulement temporel d'un des calculs. La partie grisée représente des états inaccessibles par le programme du fait des exclusions mutuelles. On voit apparaître le lieu de l'interblocage potentiel, et un lieu supplémentaire inaccessible à cause de la propriété fondamentale des objets dirigés : le calcul ne peut pas retourner en arrière. Ici, donc, un calcul est un chemin partant de l'origine dont les deux coordonnées sont croissantes. Les PV-programmes modélisent les problèmes de calcul concurrent, et on leur associe une sémantique géométrique qui est un *espace dirigé*.

1.2 La topologie algébrique dirigée

La modélisation de problèmes concurrents fournit donc des objets ayant des caractéristiques *géométriques* ou *topologiques*, mais présentant en plus une *direction*. Leur étude systématique demande donc la définition d'une notion d'*espace dirigé*. On trouvera dans la littérature des définitions diverses, plus ou moins générales : des espaces munis d'un ordre partiel, ou d'un ordre partiel local, des espaces localement cartésiens, des modèles plus combinatoires comme les ensembles cubiques (des ensembles simpliciaux particuliers).

Il conviendra alors de chercher des *invariants algébriques* de nos espaces. Ceux-ci devront dans l'idéal rendre compte de la structure dirigée, et permettre d'obtenir des informations pertinentes pour les problèmes modélisés par nos espaces. Il est important de noter que, comme pour la notion même d'espace dirigé, les définitions des invariants sont diverses et qu'on a ici effectué des choix.

Comme dans le cas classique, on dira de certains invariants qu'ils sont *homotopiques* ou *homologiques*. Comme pour les différentes notions d'espaces et d'invariants dans le cas classique, dont on souhaite généralement qu'elles se confortent à *l'hypothèse homotopique* (« un espace est un ∞-groupoïde »), dans le cas dirigé, on formule une *hypothèse homotopique dirigée* (voir [2]), qui guide les définitions d'espaces dirigés et de leurs invariants : « un espace dirigé est une $(\infty,1)$-catégorie ».

2 Définitions générales

2.1 Les espaces dirigés, les dihomotopies

Les trois définitions qui suivent sont celles données dans [6]. On pourra aussi se référer à [3].

On donne d'abord une notion générale d'espace dirigé.

Définition 1. *Un* espace dirigé *est la donnée d'un espace topologique X et d'un ensemble de chemins dirigés $P_X \subset \mathbf{Top}(I, X)$ (l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $I = [0, 1]$), satisfaisant :*

— *pour tout $x \in X$, le chemin constant en x est dans P_X.*

— *P_X est clos par concaténation, c'est à dire que si $\gamma, \delta \in P_X$ avec $\gamma(1) = \delta(0)$ alors $\gamma \star \delta$, défini par $\gamma \star \delta(t) = \gamma(2t)$ si $t \leq 1/2$, $\delta(2t-1)$ sinon, est aussi dans P_X.*

— *P_X est clos par reparamétrisation croissante, c'est-à-dire que si $\gamma \in P_X$ et que $r : I \to I$ est une fonction continue croissante, alors $\gamma \circ r \in P_X$.*

Une application dirigée *f entre espace dirigée (X, P_X) et (Y, P_Y) est une application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout $\gamma \in P_X$, on a $f \circ \gamma \in P_Y$. On note* **dTop** *la catégorie des espaces dirigés et applications dirigées. Les isomorphismes de cette catégorie sont appelés* dihoméomorphismes*.*

Un espace dirigé est donc un espace topologique sur lequel on a distingué une classe de chemins, qui est suffisamment stable pour faire de l'homotopie. On utilisera donc dans l'homotopie dirigé uniquement ces chemins distingués. Pour l'exemple de l'introduction, l'espace est le carré privé de la zone grisée, et les chemins distingués sont ceux dont les deux coordonnées sont croissantes.

L'utilisation du préfixe « di » provient de l'abréviation en anglais de « directed *object* », par exemple ici « directed homeomorphism » donne « dihomeomorphism ».

On omettra souvent le P_X de la notation.

Définition 2. *Une* dihomotopie *H entre deux chemin $\gamma, \delta \in P_X$ tels que $\gamma(0) = \delta(0)$ et $\gamma(1) = \delta(1)$ est une fonction continue $H : I \times I \to X$ telle que*

— *$H_0 = \gamma$ et $H_1 = \delta$.*

— *$\forall t \in I$, H_t est un chemin dirigé allant de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.*

S'il existe une dihomotopie entre deux chemins dirigés, on dit qu'ils sont dihomotopes*.*

Une dihomotopie est donc une homotopie qui à chaque instant est un des chemins distingués.

Définition 3. *Pour un espace dirigé X, on note $\overrightarrow{\Pi_1}(X)$ la* catégorie fondamentale *de X, dont les objets sont les points de X, et les morphismes entre $x \in X$ et $y \in X$ sont les classes de dihomotopie des chemins allant de x à y.*

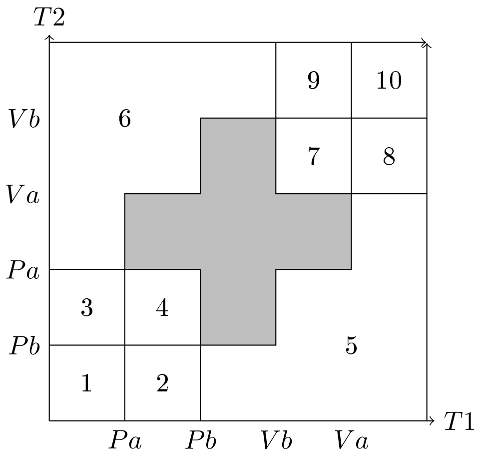
On voit apparaître ici la différence fondamentale entre le cas classique, où on a un groupoïde fondamental, et le cas dirigé, où comme on utilise une partie seulement des chemins, ceux-ci ne sont pas a priori inversibles (il est même souhaitable qu'ils ne soient pas inversibles, car sinon, c'est qu'il n'y a pas d'information de direction !).

2.2 Un invariant homotopique : la catégorie de composantes

On cherche à comprendre la catégorie fondamentale d'un espace dirigé. Cet objet étant très gros, il faut d'abord le simplifier. Pour rendre une catégorie plus simple, on peut lui associer une autre catégorie dans laquelle on a inversé certains des morphismes : la localisée par rapport a une classe de morphismes. Il existe plusieurs façons d'obtenir une telle catégorie, en fonction des propriétés de la classe de morphismes qu'on veut inverser.

La définition utilisée dans ce travail est celle de [2]. On ne la détaillera ici, car elle est technique. On cherche à inverser les chemins qui, lorsqu'on les emprunte, ne changent pas le futur et le passé (c'est-à-dire les chemins « lointains », qu'on a pu emprunter avant, ou qu'on pourra emprunter). Pour un chemin $\gamma : a \to b$, on écrira alors des conditions comme « la précomposition par γ est un isomorphisme entre $Hom(b, c)$ et $Hom(a, c)$ pour tout c accessible depuis b ». On ajoute aussi des conditions qui garantissent l'existence d'un calcul de fraction à droite et à gauche, et donc la possibilité de construire la localisée. La catégorie de composante de X est notée $\overrightarrow{\Pi_0}(X)$, et, la localisation étant fonctorielle, on a un foncteur $\overrightarrow{\Pi_1}(X) \to \overrightarrow{\Pi_0}(X)$.

Pour l'exemple de l'introduction, on peut faire les calculs à la main, on figure ici les *composantes*, c'est-à-dire que les chemins inversibles sont exactement ceux qui restent dans l'une des zones suivantes :



La catégorie de composantes est donc équivalente à la catégorie que l'on présente par le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
6 \arrow[rr] & & 9 \arrow[r] & 10 \\
& & 7 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & 8 \arrow[u] \\
3 \arrow[uu] \arrow[r] & 4 & & \\
1 \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & 2 \arrow[u] \arrow[rr] & & 5 \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

Cette notion de catégorie de composante permet de définir une notion d'équivalence faible : une application dirigée $f : X \to Y$ est une équivalence faible lorsqu'elle induit par fonctorialité une équivalence de catégorie $\overrightarrow{\Pi_0}(X) \to \overrightarrow{\Pi_0}(Y)$. Deux espaces dirigés seront faiblement équivalents lorsqu'on peut les relier par un zigzag d'équivalences faibles.

2.3 Un invariant homologique : l'homologie naturelle

On donne ici la construction de [1] de l'homologie naturelle. On trouvera aussi dans cette source plus d'explications sur l'intérêt de cette construction, notamment par rapport à d'autres invariants homologiques dirigés plus anciens, qui distinguent moins d'espaces.

On définit d'abord les espaces de traces :

Définition 4. *Soit X un espace dirigé, et soient $a, b \in X$. L'*espace des traces *de X entre a et b, noté $Tr(X, a, b)$ est l'espace des chemins dirigés entre a et b muni de la topologie compacte-ouverte, modulo reparamétrisation croissante.*

Une trace est donc le lieu des points par lesquels un chemins dirigé passe.

L'homologie naturelle est un foncteur de domaine la catégorie de factorisation suivante :

Définition 5. *Soit X un espace dirigé. On note Fc_X la catégorie dont les objets sont les traces de X (les $\pi : a \to b \in Tr(X, a, b)$ pour tout a et b) et dont les morphismes sont les extensions (les $\alpha \circ - \circ \beta : (a, b) \to (a', b')$ où $\alpha \in Tr(X, b, b')$ et $\beta \in Tr(X, a', a)$).*

On peut alors écrire :

Définition 6. *L'*homologie naturelle *en rang n de X est le foncteur $\overrightarrow{H}_n$: $Fc_x \to \mathbf{Ab}$ qui à $\pi : a \to b$ associe $H_{n-1}(Tr(X, a, b))$ (l'homologie singulière en degré $n-1$) et à l'extension $\alpha \circ - \circ \beta$ associe $H_{n-1}(\alpha \circ - \circ \beta) : H_{n-1}(Tr(X, a, b)) \to H_{n-1}(Tr(X, a', b'))$.*

La collection des foncteurs $\overrightarrow{H}_n$ est appelée le système naturel.

2.4 Que faire de ces invariants ?

Ici, il nous faut mentionner la question naturelle qui suit ces définitions : notre théorie de l'homologie est-elle compatible avec notre notion d'équivalence faible ? On souhaiterait en effet que, comme dans le cas classique, deux espaces équivalents aient des homologies isomorphes. Dans ce cas, il faut de plus préciser ce qu'on entend par des homologies isomorphes ; la bonne notion semble être celle de *bisimulation entre foncteurs*, une notion plus subtile qu'un simple isomorphisme entre foncteurs. On ne sait pas répondre à cette question en général.

On peut aussi se demander si notre notion d'espace est correcte : en effet, la topologie de l'espace sous-jacent n'intervient pas dans les invariants définis, seulement la topologie des espaces de traces. Faut-il changer notre définition ?

On doit aussi rechercher des outils permettant de calculer ces invariants. On sait décrire les espaces de traces dans des cas assez généraux et intéressant (car provenant de modélisations) : les ensembles cubiques. On va voir dans la suite que pour des ensembles cubiques particuliers, on sait aussi calculer la catégorie de composantes.

3 Les ensembles cubiques

3.1 Définition

Les *ensembles cubiques* peuvent être décris grossièrement comme les données combinatoires nécessaires au recollement de cubes de toutes dimensions suivant leurs faces, de la même façon que les ensembles simpliciaux décrivent des recollements de simplexes. Ils ont été utilisé en topologie avant que les ensembles simpliciaux ne soient jugés plus pertinents. On opère une distinction entre ensembles cubiques et précubiques, comme entre ensemble simpliciaux et présimpliciaux. Ici, les résultats seront énoncés pour des ensembles précubiques. On trouvera des détails et des définitions équivalentes à celles qui suivent dans [5].

Définition 7. *La* catégorie précubique $\square$ *est la catégorie dont les objets sont les entiers naturels* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *et les morphismes sont générés par les* $\delta_i^\epsilon : n \to n+1$ *où* $n \in \mathbb{N}$*,* $0 \leq i \leq n$ *et* $\epsilon = \{0, 1\}$ *avec les relations :*

$$\begin{tikzcd} n \arrow[r, "\delta_i^\epsilon"] \arrow[d, "\delta_{j-1}^\omega"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & n+1 \arrow[d, "\delta_j^\omega"] \\ n+1 \arrow[r, "\delta_i^\epsilon"'] & n+2 \end{tikzcd}$$

Un ensemble précubique *est alors un foncteur* $\mathscr{C} : \square^{op} \to \mathbf{Set}$.

On peut réaliser comme CW-complexe un ensemble précubique, avec une cellule de dimension n par cube de dimension n, en recollant des copies de I^n suivant les informations données.

La sémantique géométrique d'un PV-programme sera un ensemble cubique. On obtient aussi des ensembles cubiques en réalisant géométriquement des *structures d'évènements*, et dans ce cas on sait calculer les invariants dirigés présentés auparavant.

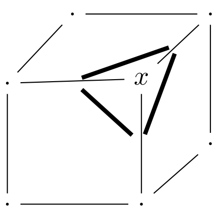
3.2 Structure dirigée et courbure

Il faut distinguer, dans les ensembles cubiques, ceux que l'on peut munir d'une direction, c'est-à-dire d'un choix de direction pour chaque arête qui soit cohérent dans tout l'ensemble. On souhaite en effet que deux arêtes parallèles (i.e. reliées par un carré et ne partageant pas un sommet) aient la même direction. On veut :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] & \cdot \\ \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \text{et non} \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, phantom] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

La réalisation d'un tel ensemble cubique aura alors une structure dirigée, où dans chaque cube les chemins dirigés sont ceux dont les coordonnées sont croissante (pour la direction donnée par les arêtes).

Parmi les ensembles que l'on peut diriger, ceux qui nous intéressent sont dit *CAT(0)* : ils correspondent en un sens à des arbres de cubes. Pour définir correctement cette notion (voir [5]), il faut la notion d'ensemble cubique *géométrique* (les faces itérées d'un cubes sont distinctes, et deux cubes ayant une face commune ont une face commune maximale). Parmi les ensembles géométriques, les CAT(0) sont ceux qui sont simplement connexes, et qui ont une *courbure non positive*. La condition sur la courbure, due à Gromov, peut s'expliquer ainsi : à chaque sommet, on associe un complexe simplicial, le *link*, obtenu en coupant l'ensemble par une sphère proche du sommet. Par exemple, le link en x est ici figuré en gras :



La courbure sera dite non positive lorsque en chaque sommet, le link est un complexe simplicial *de drapeau* : pour chaque bord d'un n-simplexe dans le complexe, il existe un unique n-simplexe dont il est bien le bord.

Un tel ensemble, lorsqu'il a un sommet initial, est appelé *automate de dimension supérieure* CAT(0). Leur catégorie est notée $\mathbf{HDA_0}$.

3.3 Les structures d'évènements

Un autre modèle du calcul concurrent est donné par les structures d'évènements. La définition suivante provient de [7]. On y trouvera en particulier la définition des morphismes.

Définition 8. *Une* structure d'évènements $(E, \leq, \#)$ *est constituée d'un ensemble partiellement ordonné* $(E, \leq)$ *d'évènements, et d'une relation symétrique non-réflexive* $\#$ *dite d'*incompatibilité *vérifiant :*

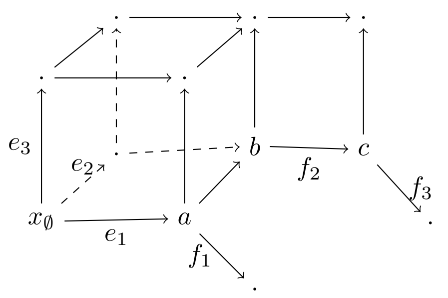
— *pour tout évènement* e*, l'ensemble* $\{e'|e' \leq e\}$ *est fini.*

— *pour tout évènement* e*,* e' *et* e''*,* $e\#e'$ *et* $e' \leq e''$ *implique* $e\#e''$*.*

On note **ES** *la catégorie des structures d'évènements.*

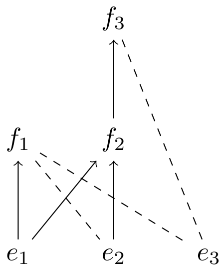
Une structure d'évènement modélise donc un ensemble de choses que l'on doit faire dans un certain ordre, avec la possibilité d'effectuer des branchements (modélisés par l'incompatibilité).

On peut associer une structure d'évènements à un automate ; cette construction fait partie de l'équivalence de catégories énoncée après. On peut la trouver dans [4]. On l'explique sur l'exemple suivant :



Ici, on a présenté un automate de dimension supérieure CAT(0) par son 1-squelette (ce qui est toujours possible). Les cellules de dimensions supérieures sont simplement toutes celles non dégénérées que l'on peut ajouter au complexe, donc ici un cube avec ses faces, et un carré. On a nommé certaines arêtes : une classe d'arête parallèles correspond à un évènement. La structure d'incompatibilité est donné par les évènements qui sont dans des branches différentes.

Cela nous permet de présenter la structure d'évènements correspondante, où les flèches correspondent à la relation d'ordre et les pointillés à l'incompatibilité :



C'est cette construction qui intervient dans l'équivalence suivante :

Théorème 1. *La catégorie des automates de dimension supérieure CAT(0)* $\mathbf{HDA_0}$ *est équivalente à la catégorie des structures d'évènements* **ES**.

3.4 Calcul de la catégorie de composante par les configurations maximales

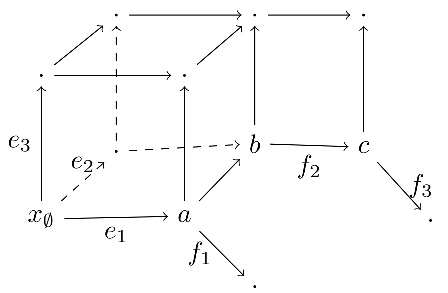
Proposition 1. *Les chemins appartenant à un évènement e sont inversible si et seulement si dans le sous ensemble CAT(0) au départ de e, e est dans toute configuration maximale.*

Ce résultat permet le calcul effectif de la catégorie de composante d'un automate de dimension supérieure CAT(0). On se contentera de l'expliquer en reprenant l'exemple précédent. On donne la définition suivante :

Définition 9. *Une* configuration *de* $\mathscr{C}$ *est un sous-ensemble* $A \subset \mathscr{C}_e$ *clos par le bas (si* $e_1 \in A$, $e_0 \in \mathscr{C}_e$ *et* $e_0 \leq_{\mathscr{C}} e_1$ *alors* $e_0 \in A$*) et sans conflit (si* $e_0, e_1 \in A$ *alors on n'a pas* $e_0 \#_{\mathscr{C}} e_1$*).*

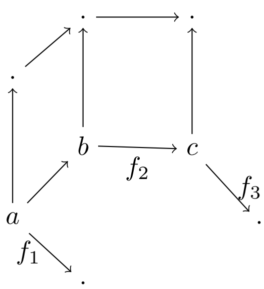
Une configuration maximale *est une configuration qui est maximale pour l'inclusion.*

Le sous ensemble CAT(0) au départ des évènements e_1, e_2 et e_3 est l'ensemble des sommets accessibles depuis $x_\emptyset$, c'est-à-dire l'ensemble entier.



e_1 est inversible car il est dans toutes configuration maximale, c'est-à-dire qu'en partant de $x_\emptyset$ et arrivant en un sommet qui n'a pas d'arête sortante, on est forcément passé par une des arêtes parallèles dans l'évènement e_1. On voit aussi que e_2 et e_3 ne sont pas inversibles, car on peut faire, au départ de $x_\emptyset$, e_1 puis f_1.

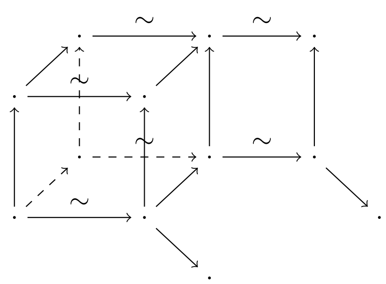
Le sous ensemble CAT(0) au départ de f_1 est constitué des sommets accessibles depuis le sommet a, i.e. :



f_1 n'est donc pas inversible.

Le sous ensemble CAT(0) au départ de f_2 est constitué des sommets accessible depuis b, celui au départ de f_3, depuis c. On a alors f_2 inversible, mais f_3 non inversible.

On présente donc ainsi la catégorie de composantes (où on a marqué les flèches inversées, les carrés étant commutatifs) :



Cette catégorie est équivalente à la suivante :

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[r] & \cdot & \\
\cdot & \cdot \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd}$$

4 Pistes de recherche

Sur les automates de dimension supérieure CAT(0), on sait que l'homologie naturelle est invariante par équivalence faible, mais ce résultat est trivial car les espaces de traces dans ce cas sont vides ou contractiles. Le calcul précédent permet de prouver ce résultat pour une classe un peu plus large (des automates de dimension supérieure CAT(0) auxquels ont a « rajouté un point final »). Le résultat est-il vrai en général ?

Pour éprouver nos définition, on peut aussi chercher si notre équivalence faible permet de classifier nos espaces, si dans des cas simples elle correspond avec les dihoméomorphismes (comme pour les variétés de dimension 2 dans le cas classique).

Références

[1] Jérémy Dubut, Éric Goubault, and Jean Goubault-Larrecq. Natural homology. In *Automata, Languages, and Programming*, pages 171–183. Springer, 2015.

[2] Jérémy Dubut, Éric Goubault, and Jean Goubault-Larrecq. The directed homotopy hypothesis. *CSL*, 2016.

[3] Lisbeth Fajstrup, Éric Goubault, Emmanuel Haucourt, Samuel Mimram, and Martin Raussen. Directed algebraic topology and concurrency, 2015.

[4] Eric Goubault and Samuel Mimram. Formal relationships between geometrical and classical models for concurrency. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 283 :77–109, 2012.

[5] Éric Goubault and Samuel Mimram. Directed homotopy in non-positively curved spaces. *submitted*, 2016.

[6] Marco Grandis. *Directed Algebraic Topology : Models of non-reversible worlds*, volume 13. Cambridge University Press, 2009.

[7] Glynn Winskel. *Event structures.* Springer, 1986.

[8] Krzysztof Ziemiański. On execution spaces of pv-programs. *Theoretical Computer Science*, 619 :87–98, 2016.