

Géométrie tropicale et topologie des variétés algébriques réelles

Charles Arnal

17 octobre 2017

Introduction au domaine de recherche

Sous la direction d’Ilia Itenberg (UPMC, ENS)

Table des matières

1	Topologie des variétés algébriques réelles	1
1.1	Quelques définitions et remarques	1
1.2	Quelques résultats classiques	4
2	Géométrie tropicale	6
3	La méthode du Patchwork	9
4	Homologies tropicale et classique	10

Ce court texte se veut une introduction à ce que j’ai vu de géométrie tropicale et des questions de topologie des variétés algébriques réelles au cours de la rédaction de mon mémoire de Master 2 ; ma thèse de doctorat devrait porter sur les mêmes sujets.

J’expose ci-dessous certains concepts de base de topologie des variétés algébriques, puis de géométrie tropicale, en y mêlant quelques considérations historiques, avant de décrire de façon un peu plus détaillée les questions auxquelles je me suis spécifiquement intéressé dans mon mémoire et sur lesquelles devraient porter mes premiers efforts de recherche.

1 Topologie des variétés algébriques réelles

La question de la nature du lieu des zéros d’un polynôme à coefficients réels en plusieurs variables se pose très naturellement ; seules quelques notions élémentaires d’algèbre et de géométrie sont nécessaires, et la plupart des collégiens et lycéens ont dû, face à un polynôme en deux variables, se demander ”quelle tête” avait la courbe correspondante - et pourquoi, et comment obtenir une configuration donnée, et quelles étaient les configurations possibles (de façon plus ou moins claire selon le niveau de compétence et de curiosité). Les mathématiciens du monde hellénistique considéraient déjà des problèmes de nature relativement similaire.

1.1 Quelques définitions et remarques

On en vient donc à la définition de variétés algébriques affines :

Définition 1.1. Une variété algébrique affine réelle X dans l'espace affine de dimension n est la donnée d'un idéal $I = (f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. On peut considérer les points réels

$$X_{\mathbb{R}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$$

ou complexes

$$X_{\mathbb{C}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0 \forall f \in I\}$$

de X .

Même s'il paraît de prime abord plus élémentaire de considérer les zéros d'un polynôme, ou d'une famille de polynômes, dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , il est en fait plus naturel de considérer des polynômes homogènes et leurs zéros dans les espaces projectifs réels et complexes; la compacité de l'espace ambiant, donc des ensembles fermés des points réels ou complexes des variétés considérées, ainsi que le degré supplémentaire d'invariance (puisque les points "à l'infini" qu'on ajoute en complétant l'espace affine en l'espace projectif deviennent des points "comme les autres") simplifient la situation. De là la définition de variétés algébriques projectives :

Définition 1.2. Une variété algébrique projective réelle X dans l'espace projectif de dimension n est la donnée d'un idéal homogène $I = (f_1, \dots, f_k) \subset \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$. On peut considérer les points réels

$$X_{\mathbb{R}} = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \mid f([x_0, \dots, x_n]) = 0 \forall f \in I\}$$

ou complexes

$$X_{\mathbb{C}} = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid f([x_0, \dots, x_n]) = 0 \forall f \in I\}$$

de X .

Dans le cas où l'idéal I est engendré par un unique polynôme homogène P de degré d , on parlera d'*hypersurface algébrique projective réelle* de degré d .

Etant donné une ou plusieurs telles variétés, on peut se poser des questions de nature géométriques "fines" (quelle courbe minimise telle distance entre..., la tangente passant par... a-t-elle telle propriété,...), ou s'intéresser aux propriétés topologiques, plus "grossières", des objets considérés - des propriétés propres à la courbe en tant qu'espace topologique (les questions se posent alors à homéomorphisme près), ou en tant qu'espace plongé dans l'espace affine ou projectif ambiant (à isotopie ou homéomorphisme de paire d'espaces près). C'est sur la seconde catégorie de questions qu'on se penche ici.

On remarque que deux polynômes à coefficient réels, dont l'un est un multiple de l'autre par un scalaire non-nul, ont les mêmes lieux de zéros réels et complexes. Une variété algébrique réelle projective est donc définie par une famille de polynômes à multiplication par des réels non-nuls près. On voit alors que l'ensemble des polynômes homogènes de degré d en n variables quotienté par la multiplication par un scalaire non-nul, et donc l'ensemble C_d^n des hypersurfaces algébriques projectives de degré d dans l'espace projectif de dimension n , peut être identifié avec $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ avec $k = \binom{d+n}{n} - 1$ (respectivement $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$ pour les hypersurfaces algébriques projectives réelles).

Dans ce qui suit, nous considérerons surtout des hypersurfaces algébriques *lisses* (au sens différentiel du terme), ce qui revient à demander, pour X donnée par $P \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$, que

$$\{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid \partial_i P([x_0, \dots, x_n]) = 0 \ i = 0, \dots, n\} = \emptyset,$$

puisque comme P est homogène,

$$\sum_{i=0}^n \partial_i P(X_0, \dots, X_n) \cdot X_i = \deg(P) \cdot P(X_0, \dots, X_n),$$

donc si $[x_0, \dots, x_n]$ est tel que $\partial_i P([x_0, \dots, x_n]) = 0$ pour $i = 0, \dots, n$, on a aussi $P([x_0, \dots, x_n]) = 0$. On aura donc en particulier affaire à des variétés différentielles compactes de codimension réelle (respectivement complexe) 1 de $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ (respectivement $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$).

Pour autant que la variété soit lisse, la question de la topologie de $X_{\mathbb{C}}$ n'est pas particulièrement intéressante; elle ne dépend que du degré de X et de la dimension n considérée. En effet, les variétés

algébriques projectives singulières de degré d dans l'espace projectif de dimension n forment une hypersurface de $\mathbb{C}P^n$ de complémentaire connexe par arc ; par déformation continue, on voit donc que toutes les hypersurfaces algébriques lisses de $\mathbb{C}P^n$ et de degré d sont homéomorphes. On peut relativement aisément déterminer leur topologie ; pour $n = 1$, c'est par exemple une union disjointe de d points ; pour $n = 2$, des surfaces compactes de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, c'est-à-dire des tores à $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ anses.

La question de la topologie de l'ensemble des points réels $X_{\mathbb{R}}$ d'une variété algébrique projective réelle lisse X est plus délicate. Dans $\mathbb{R}P^3$, on a par exemple déjà les possibilités suivantes en degré 3 : $\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 \amalg S^2, (\mathbb{R}P^2)\#^3, (\mathbb{R}P^2)\#^5, (\mathbb{R}P^2)\#^7$, où $(\mathbb{R}P^2)\#^{2i+1}$ désigne la somme connexe de $2i + 1$ copie de $\mathbb{R}P^2$, ou de façon équivalente la somme connexe de $\mathbb{R}P^2$ et de i anses. On peut voir que ce sont les seuls cas possibles à l'aide des théorèmes énoncés plus bas.

Même dans le cas des courbes dans $\mathbb{R}P^2$, qui sont des variétés différentielles compactes de dimension 1, donc des unions de composantes connexes homéomorphes au cercle S^1 , tout n'est de loin pas connu. Chacun de ces cercles plongés peut séparer $\mathbb{R}P^2$ en une composante connexe homéomorphe à un disque et une autre à un ruban de Möbius (le cercle plongé est alors appelé *courbe bilatère*, ou *ovale*), ou ne pas séparer $\mathbb{R}P^2$ (on parle de *courbe unilatère* ou *pseudo-droite*). Cela peut aisément se voir en considérant la préimage d'un cercle plongé par le revêtement universel de $\mathbb{R}P^2$ par la sphère S^2 . On voit aussi que le complémentaire d'une courbe unilatère C sera homéomorphe à un disque ; en particulier, pour tout voisinage tubulaire d'une telle courbe dans $\mathbb{R}P^2$, noté V , le voisinage privé de la courbe $V \setminus C$ sera connexe.

Quand X est de degré pair, $X_{\mathbb{R}}$ n'a pas de composante unilatère. En effet, après avoir choisi un polynôme $P \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$ représentant X , le signe de P en un point $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{R}P^2$ est bien défini (car P est homogène de degré pair). On obtient ainsi une décomposition $\mathbb{R}P^2 = \{P > 0\} \amalg \{P = 0\} \amalg \{P < 0\} = \{P > 0\} \amalg X_{\mathbb{R}} \amalg \{P < 0\}$. La courbe $X_{\mathbb{R}}$ divise $\mathbb{R}P^2$, et donc tout voisinage de $X_{\mathbb{R}}$, ce qui est en contradiction avec la description faite plus haut des courbes unilatères. Inversement, quand X est de degré d impair, $X_{\mathbb{R}}$ a exactement une composante unilatère. En effet, l'intersection de $X_{\mathbb{C}}$ avec une droite réelle générique sera par Bézout un ensemble de d points distincts, invariant par conjugaison : il y aura donc un nombre impair de points d'intersection réels. Or l'intersection transverse d'une droite réelle de $\mathbb{R}P^2$ avec un ovale est forcément de cardinalité paire (à chaque fois que la droite "quitte" une des composantes connexes du complémentaire de l'ovale, elle doit y "retourner"). Il y a donc au moins une composante unilatère. Mais il ne peut pas y en avoir plus d'une ; en effet, si C_1 et C_2 sont deux composantes unilatères disjointes, C_2 est incluse dans $\mathbb{R}P^2 \setminus C_1$, qui est homéomorphe à un disque. La courbe fermée C_2 sépare alors ce disque, donc $\mathbb{R}P^2$, d'où contradiction.

La principale question concernant la topologie des courbes algébriques réelles de $\mathbb{R}P^2$ sera donc celle du nombre et de la disposition des ovales. On dira d'un ovale C_1 qu'il est entouré par un autre ovale C_2 s'il est dans la composante connexe homéomorphe à un disque du complémentaire de C_2 . On dira qu'un ovale est pair quand il est entouré d'un nombre pair d'ovales, et qu'il est impair autrement. La courbe de la figure 1 (qu'on peut voir comme étant incluse dans un ouvert affine de $\mathbb{R}P^2$) a par exemple 5 ovales pairs et 3 ovales impairs.

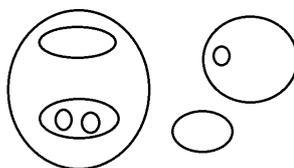


FIGURE 1 – 5 ovales pairs, 3 ovales impairs.

En notant p le nombre d'ovales pairs et n le nombre d'ovales impairs d'une courbe donnée par un polynôme Q , on voit que $p - n$ est la caractéristique d'Euler de celui des deux ensembles $\{Q < 0\}$ et $\{Q > 0\}$ qui est orientable (cela dépend du polynôme Q choisi) ; cet ensemble sera en effet homotopiquement équivalent à une union disjointe de bouquets de cercles, avec p composantes connexes et n cercles en tout. Le nombre $p - n$ jouera un rôle important dans certains théorèmes énoncés plus bas.

Les premiers résultats significatifs portant sur la topologie des variétés algébriques réelles furent obtenus dès la seconde moitié du XIX-ème siècle : en 1876, A. Harnack publia ainsi un article [5] dans lequel était obtenue une borne supérieure sur le nombre de composantes connexes d'une courbe de degré donné

dans le plan projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Harnack démontra que le nombre de composantes connexes d'une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ est inférieur ou égal à $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$. D'autre part, pour chaque entier strictement positif d , il construisit une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ avec $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes, ce qui prouve que sa borne ne peut pas être améliorée.

Une preuve élémentaire de ce théorème peut être donnée ; en effet, il a été dit plus haut que l'ensemble des points complexes $X_{\mathbb{C}}$ d'une courbe de degré d est une sphère à $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ anses. L'intersection de cette surface avec l'ensemble des points réels donne $X_{\mathbb{R}}$, une union disjointe de k cercles. La surface $X_{\mathbb{C}}$ privée d'un de ces cercles a au plus deux composantes connexes, qui sont alors interchangées par la conjugaison complexe. Si $X_{\mathbb{R}}$ a plus d'une composante connexe, ce cas de figure est impossible, car la conjugaison aurait pour seul ensemble de points fixes dans $X_{\mathbb{C}}$ le cercle retiré. En réappliquant cet argument, on voit que $X_{\mathbb{C}}$ privé de $k-1$ des cercles de $X_{\mathbb{R}}$ doit rester connexe. Comme $X_{\mathbb{C}}$ est la surface de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, c'est impossible si $k-1 > \frac{(d-1)(d-2)}{2}$, donc $k \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$.

La question naturelle qui se pose alors, et qui constitue une part du seizième problème de Hilbert, est celle des configurations possibles (en nombre fini) des ovals des courbes réelles projectives lisses d'un degré donné (en termes d'ovales en contenant d'autres). Hilbert lui-même, ainsi que d'autres chercheurs du début du vingtième siècle, comme V. Ragsdale ou I. Petrovsky, contribuèrent à l'avancée du domaine (certaines de leurs contributions seront décrites plus bas).

En degré inférieur à 5, il est facile de trouver des contraintes sur la configuration des composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$ en utilisant le théorème de Bézout et en considérant les intersections de $X_{\mathbb{R}}$ avec une courbe de petit degré bien choisie ; cette méthode simple permet déjà d'éliminer tous les cas proscrits. Le cas du degré 6 est plus délicat, et des raisonnements élémentaires ne suffisent plus.

Dans les années 50-80, d'importants progrès en matière de topologie des variétés algébriques réelles (de dimensions quelconques) furent réalisés grâce à des mathématiciens (pour la plupart russes) comme V. Rohklin ou V. Kharlamov. D. A. Gudkov put ainsi terminer la classification à isotopie près des courbes projectives réelles non-singulières de degré 6 dans les années 60, et O. Viro obtint la classification des courbes de degré 7 en 1979 en inventant et appliquant la méthode du Patchwork, sur laquelle nous reviendrons dans les sections suivantes.

1.2 Quelques résultats classiques

Pour classifier possibles topologies de variétés algébriques projectives réelles de degré et de dimension données, il s'agit d'une part de trouver de nouvelles contraintes, et d'autre part de montrer que les configurations qu'on n'a pas réussi à exclure sont bien réalisables. Ci-dessous sont listés quelques théorèmes classiques (listés par exemple dans l'article de G. Wilson [15], qui propose un tour d'horizon de ces questions) s'inscrivant dans la première démarche ; l'aspect complémentaire du problème sera abordé plus bas, où on évoquera une méthode de construction d'hypersurfaces algébriques à topologie prescrite.

L'inégalité de Harnack mentionnée plus haut peut en fait être vue comme un cas particulier d'un théorème plus général, l'inégalité de Thom-Smith :

Théorème 1.3 (Thom-Smith). *Etant donné X une variété sur laquelle agit continûment une involution T et Y l'ensemble de ses points fixes, on a*

$$\sum h_i(Y) \leq \sum h_i(X),$$

où $h_i(Y)$ (resp. $h_i(X)$) est la dimension du i -ème groupe d'homologie à coefficients dans \mathbb{F}_2 de Y (resp. X).

Dans les cas nous concernant, $X_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des points complexes d'une variété algébrique projective réelle, l'involution la conjugaison complexe et Y l'ensemble des points réels $X_{\mathbb{R}}$. La preuve donne également que la différence $\sum h_i(X_{\mathbb{C}}) - \sum h_i(X_{\mathbb{R}})$ doit être paire. Le théorème de Harnack est bien un cas particulier de 1.3, puisqu'alors

$$\begin{aligned} 2h_0(X_{\mathbb{R}}) &= h_0(X_{\mathbb{R}}) + h_1(X_{\mathbb{R}}) = \sum h_i(X_{\mathbb{R}}) \leq \sum h_i(X_{\mathbb{C}}) = \\ &h_0(X_{\mathbb{C}}) + h_1(X_{\mathbb{C}}) + h_2(X_{\mathbb{C}}) = 1 + (d-1)(d-2) + 1. \end{aligned}$$

Une variété munie d'une involution pour laquelle l'inégalité de 1.3 est une égalité sera appelée une *M-variété* (les courbes de Harnack considérées avec la conjugaison complexe sont par exemples des *M-courbes*). Une variété munie d'une involution vérifiant $\sum h_i(X_{\mathbb{C}}) - \sum h_i(X_{\mathbb{R}}) = 2$ sera appelée une *(M-1)-variété*, et ainsi de suite pour *M-2*, *M-3*, ... La figure 2 (image tirée de [8]) montre les trois configurations possibles pour une *M-courbe* de degré 6. La première configuration fut obtenue par Harnack, la deuxième par Hilbert et la troisième par Gudkov.

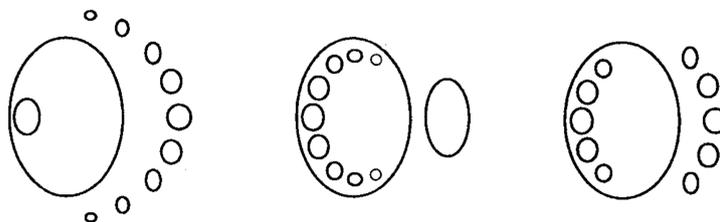


FIGURE 2 – Courbes maximales de degré 6

Suivent deux théorèmes s'appliquant aux *M-* et *(M-1)-variétés* respectivement. On appellera *conjugaison* une involution T lisse sur une variété complexe telle que sa différentielle est anti-linéaire, i.e. qu'elle vérifie $dT(iv) = -idT(v)$ pour tout vecteur v tangent à la variété.

Théorème 1.4 (Rokhlin). *Soit X une variété complexe de dimension réelle $4n$, une conjugaison T sur X et Y l'ensemble des points fixes de T . On suppose que (X, T) est une *M-variété*. Alors*

$$\chi(Y) \equiv \sigma(X) \pmod{16},$$

où $\sigma(X)$ désigne la signature de la forme d'intersection sur X .

Théorème 1.5 (Kharlamov, Gudkov, Krakhnov). *Soit X une variété complexe de dimension réelle $4n$, une conjugaison T sur X et Y l'ensemble des points fixes de T . On suppose que (X, T) est une *(M-1)-variété*. Alors*

$$\chi(Y) \equiv \sigma(X) \pm 2 \pmod{16}.$$

Ces deux théorèmes s'appliquent bien sûr aux ensembles de points réels et complexes de variétés algébriques projectives réelles de dimension complexe paire. On trouvera leurs preuves dans [15]; elles s'appuient sur un corollaire du théorème d'Atiyah-Singer.

Notons encore le théorème du point fixe de Lefschetz.

Théorème 1.6 (Point fixe de Lefschetz). *Soient une variété topologique compacte X , $T : X \rightarrow X$ une application continue et Y l'ensemble des points fixes de T . En notant T^* l'application induite en cohomologie par T , on a*

$$\chi(Y) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(T^* | H^i(X, \mathbb{R})).$$

On donnera comme dernier exemple un théorème de Kharlamov (voir [9] pour les théorèmes suivants). Il s'applique aux variétés kählériennes (donc en particulier aux variétés algébriques projectives lisses) de dimension complexe paire.

Théorème 1.7 (Kharlamov). *Soit X une variété Kähler compacte de dimension réelle $4n$, une conjugaison T sur X , Y l'ensemble de ses points fixes. Alors*

$$|\chi(Y) - 1| \leq h^{n,n}(X) - 1,$$

où $h^{n,n}(X)$ désigne le (n, n) -nombre de Hodge de X .

Ces théorèmes plus généraux permettent, en considérant un revêtement de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ramifié le long de $X_{\mathbb{C}}$ (qui donne la surface complexe dont on a besoin pour appliquer les théorèmes; on trouvera le détail de la preuve dans [15]), d'obtenir les résultats suivants dans le cas particulier d'une courbe de degré pair dans le plan projectif (les nombres p et n ont le sens qui leur a été donné dans la sous-section précédente) :

Théorème 1.8 (Rokhlin). *Soit X une M -courbe algébrique réelle de degré pair $2k$ dans le plan projectif. Alors*

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

Théorème 1.9 (Kharlamov, Gudkov, Krakhnov). *Soit X une $(M-1)$ -courbe algébrique réelle de degré pair $2k$ dans le plan projectif. Alors*

$$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

Théorème 1.10 (Petrovsky). *Soit X une courbe algébrique réelle de degré pair $2k$ dans le plan projectif. Alors*

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq p - n \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

V. Ragsdale conjectura qu'un résultat plus fort que 1.10 pouvait être obtenu :

Conjecture 1.11 (Conjecture de Ragsdale). *Soit X une courbe algébrique réelle de degré pair $2k$ dans le plan projectif. Alors*

$$\begin{aligned} p &\leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1, \\ n &\leq \frac{3}{2}k(k-1). \end{aligned}$$

Viro démontra cependant que la seconde inégalité était fautive d'au moins 1 ([13]); Itenberg utilisa plus tard dans [7] la méthode du Patchwork pour montrer que dans le cas de courbes quelconques, les deux inégalités étaient fausses d'un terme quadratique en k ; nous reviendrons plus tard sur ceci. On ne sait toutefois pas si les inégalités de 1.11 (la seconde corrigée de 1) sont valides pour les M -courbes.

2 Géométrie tropicale

Afin d'aider son effort de classification des courbes de degré 7, Viro inventa une méthode, dite du Patchwork (évoquée plus haut), permettant de construire par recollement des hypersurfaces algébriques réelles à partir d'hypersurfaces plus simples, et ainsi d'obtenir des variétés algébriques ayant, dans les limites de certaines contraintes, la topologie désirée. Cette méthode permet de construire toute une série d'exemples et de contre-exemples à divers problèmes, comme la preuve donnée par Itenberg de l'invalidité de la conjecture de Ragsdale.

Le Patchwork fut aussi une des sources de la géométrie tropicale, un domaine relativement récent des mathématiques dans lesquels les principaux objets d'étude sont des variétés localement polyédrales. De nombreux liens existent entre la géométrie algébrique classique et la géométrie tropicale; le théorème du Patchwork, sur lequel on reviendra plus bas, en donne certains.

La géométrie tropicale est un vaste domaine - on se contentera dans cette section d'exposer les concepts qui seront utilisés dans ce qui suit, sans prétendre à l'exhaustivité, ni même donner un aperçu représentatif.

On considère l'ensemble des nombres tropicaux $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition et de la multiplication tropicales, qu'on dénotera par " $+$ " et " \times ". Elles sont définies comme suit :

$$"x + y" = \max(x, y), \quad "x \times y" = x + y.$$

On notera en particulier que ces opérations sont associatives et commutatives, et qu'il y a distributivité. L'élément neutre pour l'addition est $-\infty$, celui de la multiplication est 0. Tout $x \in \mathbb{T} \setminus \{-\infty\}$ admet un inverse multiplicatif, $-x$. Ces propriétés font qu'on appelle \mathbb{T} un *semi-corps*. Ce n'est toutefois pas un corps, car les éléments différents de $-\infty$ n'ont pas d'inverse additif.

Ces opérations suggèrent la notion de *polynôme tropical*. Un polynôme P en n variables à coefficients dans \mathbb{K} (où \mathbb{K} est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{C}) sera de la forme

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_P} s_\lambda x^\lambda,$$

où Λ_P est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^n correspondant aux monômes à coefficients non-nuls dans P , $x \in \mathbb{K}^n$, $s_\lambda \in \mathbb{K}$ et $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$. On appelle *polytope de Newton* l'enveloppe convexe de Λ_P , notée $\text{Conv}(\Lambda_P)$.

De même, on peut considérer $P \in \mathbb{T}[X_1, \dots, X_n]$, qui induit une fonction

$$P : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T} \\ x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_P} s_\lambda x^\lambda = \max_{\lambda \in \Lambda_P} \{s_\lambda + \lambda^\perp \cdot x\},$$

où $\lambda^\perp \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i$ et où $\Lambda_P \subset \mathbb{N}^n$ est l'ensemble des monômes apparaissant avec un coefficient différent de $-\infty$ dans P .

De même qu'un polynôme de Laurent à coefficients dans $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ pourra être évalué sur $(\mathbb{K}^*)^n$, un polynôme tropical

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_P} s_\lambda x^\lambda \quad (1)$$

avec $\Lambda_P \subset \mathbb{Z}^n$ donnera une fonction bien définie sur \mathbb{R}^n (qui correspond à $(\mathbb{T}^*)^n$), à valeurs dans \mathbb{R} si P n'est pas trivial. Le polynôme P donne alors une fonction convexe affine par morceaux sur \mathbb{R}^n . Notons que deux polynômes différents peuvent définir la même fonction ; on a par exemple

$$"0 + x + x^2 = 0 + x^2" \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

L'hypersurface tropicale de \mathbb{R}^n associée à un polynôme Soit P comme en (1). On appellera *hypersurface tropicale affine* associée à P (ou à la fonction $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant à P) l'ensemble X_P des $x \in \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_P$ distincts tels que

$$P(x) = s_{\lambda_1} + \lambda_1^\perp \cdot x = s_{\lambda_2} + \lambda_2^\perp \cdot x,$$

i.e. l'ensemble des points au voisinage desquels P en tant que fonction n'est pas affine (ou encore la projection sur les n premières coordonnées de l'ensemble des faces de codimension supérieure ou égale à 1 du graphe de la fonction associée à P vu comme un complexe polyédral de dimension n). Les anglophones parlent de "corner locus". On notera que de même que des polynômes distincts peuvent définir la même fonction, deux fonctions distinctes (définies par des polynômes tropicaux) peuvent donner la même courbe tropicale : on considèrera par exemple $\tilde{P}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{s}_\lambda x^\lambda$, où pour tout λ on a posé $\tilde{s}_\lambda = s_\lambda + s$ avec $s \in \mathbb{R}$ fixé.

L'exemple non-trivial le plus simple est celui de la droite tropicale, définie par le polynôme $P(x, y) = "a + bx + cy" = \max(a, b + x, c + y)$. Elle est constituée des trois semi-droites classiques $\{a = b + x \geq c + y\}$, $\{a = c + y \geq b + x\}$ et $\{b + x = c + y \geq a\}$ et de leur point d'intersection, comme on le voit sur la figure 3.

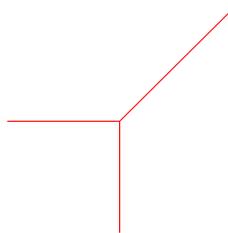


FIGURE 3 – Une droite tropicale

Des notions plus intrinsèques permettent de généraliser la définition d'hypersurfaces tropicales affines, par exemple avec des atlas de cartes vers des éventails de cônes, avec des applications de transition affines ; par analogie avec la géométrie algébrique classique, il existe des hypersurfaces tropicales de variétés tropicales toriques, etc... On se tournera par exemple vers [3], [12], [10], [4] ou [14].

Il existe un théorème de dualité qui permet d'aisément décrire l'hypersurface tropicale affine associée

à un polynome donné. Soit un polynôme tropical

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_{\lambda} x^{\lambda} = \max_{\lambda \in \Lambda} \{s_{\lambda} + \lambda^{\perp} \cdot x\},$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et Λ un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^n , et Γ le graphe dans \mathbb{R}^{n+1} de la fonction

$$\begin{aligned} s : \Lambda \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto s_{\lambda}. \end{aligned}$$

On considère $Conv(\Gamma)$ son enveloppe convexe et $Conv(\Gamma)^+$ son enveloppe convexe supérieure, i.e. $\{a \in Conv(\Gamma) : \forall b \in Conv(\Gamma), b_i = a_i \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow b_{n+1} \leq a_{n+1}\}$. On note enfin T la projection sur \mathbb{R}^n des faces de $Conv(\Gamma)^+$; c'est une subdivision polyédrale de $\Delta = Conv(\Lambda)$, le polytope de Newton de P . De même, l'hypersurface tropicale affine X_P associée à P induit une subdivision polyédrale de \mathbb{R}^n qui la contient. Pour mieux les distinguer, on appellera dans la sous-section qui suit *faces de T* les polyèdres de la subdivision T , et *zones de \mathbb{R}^n* les polyèdres de celle induite par X_P . Avec ces notations, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Pour tout $0 \leq k \leq n$, la fonction*

$$\begin{aligned} \Psi : \{Faces \text{ de } T \text{ de dimension } k\} &\longrightarrow \{Zones \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ de dimension } n - k\} \\ Conv(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}) &\longmapsto \{x : P(x) = f_i(x) \forall i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

qui associe à chaque face de T la zone de domination des formes affines

$$f_i(x) = s(\lambda_{f_i}) + \sum_{j=1}^d x_j (\lambda_{f_i})_j = s(\lambda_{f_i}) + \lambda_{f_i}^{\perp} \cdot x$$

auxquelles elle correspond est bien définie, et est une bijection. De plus, la dualité induite par cette famille de fonctions renverse la relation d'incidence. Enfin, les zones de \mathbb{R}^n de dimension plus grande ou égale à 1 non-bornées pour la norme euclidienne classique correspondent exactement aux faces situées sur l'enveloppe extérieure de Δ de dimension plus petite ou égale à $n - 1$.

La preuve du théorème est relativement élémentaire : il suffit d'un peu d'algèbre linéaire et de quelques observations simples.

Sur la figure 4 (images tirées de [3]), deux courbes X_{P_1} et X_{P_2} avec les partitions T_i de leur polygone de Newton leur correspondant (le coin en bas à gauche des T_i est $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$). La courbe X_{P_1} est une droite, X_{P_2} une cubique. On notera que les segments des T_i sont bien envoyés sur des segments ou des demi-droites de X_{P_i} leur étant perpendiculaires. En particulier, la pente de chaque segment ou demi-droite d'une courbe tropicale en dimension 2 est rationnelle. La bijection entre faces extérieures de $\Delta(P_i)$ et zones non-bornées de X_{P_i} est également illustrée.

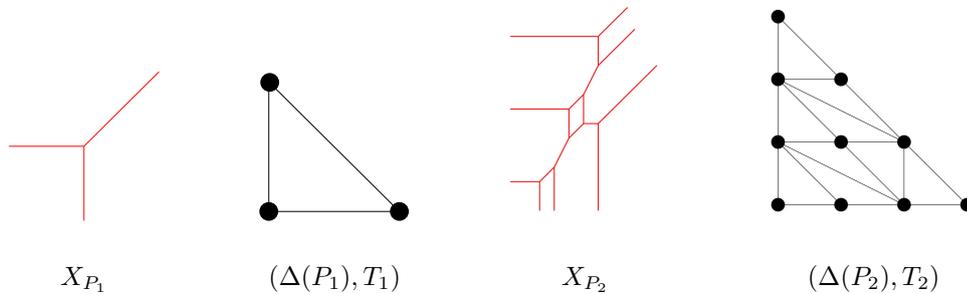


FIGURE 4 – Dualité

Notons enfin pour conclure cette section qu'une notion d'*homologie tropicale* a récemment été introduite; comme pour l'homologie classique, on peut considérer des groupes d'homologie tropicale cellulaire

(pour les variétés tropicales compactes), singulière ou simpliciale, qui seront isomorphes. Les détails en seront trouvés dans [3], [6] ou [11].

3 La méthode du Patchwork

La *méthode du Patchwork*, déjà évoquée plus haut et aussi appelée *méthode de Viro*, fut développée entre 1979 et 1981 par Oleg Viro. Elle permet de construire des familles à un paramètre d'hypersurfaces algébriques réelles X_t de \mathbb{R}^n ou de variétés toriques, telles que l'hypersurface X_t , pour t suffisamment petit (ou grand, selon la convention adoptée), soit obtenue par recollement ("patchworking") d'hypersurfaces algébriques plus simples. Cette procédure peut notamment permettre d'obtenir des hypersurfaces algébriques ayant une topologie prescrite; Viro s'en est par exemple servi pour classifier les courbes algébriques réelles lisses de degré 7 de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. On se contentera ici de considérer un cas particulier, dit du Patchwork combinatoire, et dans le cadre affine. L'énoncé et la preuve en toute généralité du théorème du Patchwork peuvent être trouvés dans l'article de Viro [14].

Étant donné $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\theta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la symétrie d'hyperplan $\{x_i = 0\}$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{Z}^n$ ou $\varepsilon \in (\mathbb{F}_2)^n$, on note

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto (x_0 \cdot (-1)^{\varepsilon_1}, \dots, x_n \cdot (-1)^{\varepsilon_n}). \end{aligned}$$

On considère $\Delta \subset \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ le simplexe standard de côté de longueur entière d , puis l'union disjointe

$$\tilde{\Delta} := \bigcup_{\varepsilon \in (\mathbb{F}_2)^n} \theta_\varepsilon(\Delta)$$

des images de Δ par les symétries d'hyperplans principaux. On se donne également un polynôme dont le polytope de Newton est Δ , qu'on note

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_\lambda \delta_\lambda x^\lambda,$$

où $\delta_\lambda \in \{\pm\}$ et $a_\lambda \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\lambda \in \Delta$, et une triangulation T de Δ induite par la projection sur Δ du graphe d'une fonction convexe affine par morceaux μ (similairement à ce qu'on a pu voir dans l'énoncé du théorème de dualité plus haut - on parle de subdivision convexe). On assigne à chaque sommet λ de T le signe δ_λ , et on étend la triangulation T à $\tilde{\Delta}$ par symétrie, ainsi que la distribution de signe δ aux nouveaux sommets entiers ainsi obtenus comme suit : étant donné λ un sommet de Δ et $\varepsilon \in (\mathbb{F}_2)^n$, on pose

$$\delta(\theta_\varepsilon(\lambda)) := \delta(\lambda)(-1)^{\varepsilon \cdot \lambda},$$

où $\varepsilon \cdot \lambda$ dénote le produit scalaire.

On considère ensuite chaque simplexe Γ de la triangulation T de $\tilde{\Delta}$. Si δ ne prend qu'une seule valeur sur Γ , on ne fait rien; sinon, on inscrit dans Γ un polyèdre de dimension $n - 1$ qui sépare les sommets de signe positif des sommets de signe négatif. On obtient une hypersurface affine par morceaux S de $\tilde{\Delta}$. Cette procédure est illustrée par la figure 3, tirée de [14].

En posant pour un paramètre réel $t > 0$

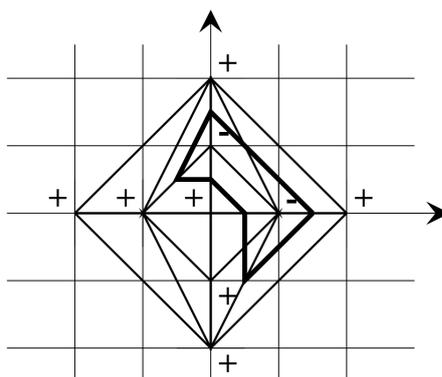
$$P_t(x) := \sum_{\lambda \in \Delta} a_\lambda t^{\mu(\lambda)} x^\lambda$$

et en gardant les mêmes hypothèses et notations, on a alors le théorème suivant (cas particulier du Patchwork).

Théorème 3.1 (Viro). *Il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_0]$, le lieu des zéros réels*

$$\mathbb{R}X_{P_t} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid P_t(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

de la courbe algébrique réelle affine donnée par P_t est tel qu'il existe un homéomorphisme de paire d'espaces entre $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}X_{P_t})$ et $(\tilde{\Delta}, S)$.



Une courbe affine de degré 2

En d'autres termes, la forme du lieu des zéros réels de P_t , pour t suffisamment petit, peut être retrouvée à l'aide de la procédure combinatoire décrite plus haut. On dit d'un tel polynôme P_t et de la variété algébrique réelle associée qu'ils ont été obtenus par Patchworking à partir de Δ , T et δ .

Des énoncés plus généraux existent, dans lesquels l'espace ambiant peut par exemple être une variété torique quelconque ; on peut aussi considérer des intersections complètes, etc...

4 Homologies tropicale et classique

Un problème important en topologie des variétés algébriques réelles est celui de la majoration optimale des nombres de Betti individuels $\dim_{\mathbb{Z}/2} H_i(\mathbb{R}X; \mathbb{Z}/2)$, où X est une hypersurface non singulière de degré donné dans $\mathbb{R}P^n$: on espère pouvoir obtenir de telles majorations en termes de nombres de Hodge de l'ensemble $X_{\mathbb{C}}$ des points complexes de X .

Considérons, comme dans la section précédente, T une triangulation du simplexe standard Δ de dimension n donnée par une fonction convexe affine par morceaux et δ une distribution de signes sur les sommets de T , et supposons de plus que T soit une triangulation primitive, i.e. que chaque simplexe de T soit de volume minimal $\frac{1}{n!}$ (c'est une condition de non-singularité). On a comme avant

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Delta} a_{\lambda} \delta_{\lambda} x^{\lambda}$$

et

$$P_t(x) := \sum_{\lambda \in \Delta} a_{\lambda} t^{\mu(\lambda)} x^{\lambda}$$

obtenu par Patchworking à partir de Δ , T et δ . Alors I. Itenberg, L. Katzarkov, G. Mikhalkin et I. Zharkov ont récemment montré (dans [6]) que les rangs des groupes d'homologie tropicale de l'hypersurface tropicale associée à P (dans le plan projectif tropical, que nous n'avons pas abordé) étaient égaux aux rangs des groupes de Hodge de même indice de l'ensemble des points complexes de la variété algébrique projective réelle associée à P_t (pour t petit) ; c'est une nouvelle illustration du lien entre les mondes tropical et algébrique.

Ce théorème m'a permis de retrouver des résultats de Benoît Bertrand et Frédéric Bihan ([1] et [2]), qui ont prouvé l'égalité entre la caractéristique d'Euler de l'ensemble des points réels de certaines variétés algébriques réelles et la signature de l'ensemble de leurs points complexes ; mon calcul (dans le cas le plus simple) consiste à montrer que la caractéristique d'Euler de l'ensemble des points réels d'une variété algébrique projective réelle obtenue par Patchworking est égale à la somme alternée des groupes d'homologie tropicale d'une hypersurface tropicale correspondante.

Dans le même esprit, je vais tenter, au cours de ma thèse, de mieux comprendre les liens entre les groupes d'homologie tropicale de certaines variétés tropicales et la topologie (principalement les nombres de Betti) des points réels et complexes de variétés algébriques réelles leur étant associées.

Références

- [1] Benoît BERTRAND : Euler characteristic of primitive T-hypersurfaces and maximal surfaces, 2006. arXiv :math/0602534.
- [2] Benoît BERTRAND et Frédéric BIHAN : Euler characteristic of real nondegenerate tropical complete intersections, 2007. arXiv :0710.1222v2.
- [3] Erwan BRUGALLÉ, Ilia ITENBERG, Grigory MIKHALKIN et Kristin SHAW : Brief introduction to tropical geometry. In *Proceedings of 21st Gökova Geometry-Topology Conference*, 2014.
- [4] William FULTON : *Introduction to Toric Varieties*. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, 1993.
- [5] Axel HARNACK : Über vieltheiligkeit der ebenen algebraischen curven. *Math. Ann.*, 10:189–199, 1876.
- [6] I. ITENBERG, L. KATZARKOV, G. MIKHALKIN et I. ZHARKOV : Tropical homology.
- [7] Ilia ITENBERG : Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317:277–282, 1993.
- [8] Ilia ITENBERG et Oleg VIRO : Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture. *Math. Intelligencer*, 18:19–28, 1996.
- [9] Viatcheslav KHARLAMOV : New congruences for the euler characteristic of real algebraic manifolds. *Funktsional’ni Analiz i ego Prilozheniya*, 7:74–78, 1973.
- [10] Grigory MIKHALKIN : Tropical geometry and its applications. *International Congress of Mathematicians*, 2:827–852, 2006.
- [11] Grigory MIKHALKIN et Ilia ZHARKOV : Tropical eigenwave and intermediate jacobians, 2013. arXiv :1302.0252v2.
- [12] Kristin SHAW : Tropical surfaces, 2015. arXiv :1506.07407.
- [13] Oleg VIRO : Curves of degree 7, curves of degree 8 and the Ragsdale conjecture. *Soviet Math. Dokl.*, 22:566–570, 1980.
- [14] Oleg VIRO : Patchworking real algebraic varieties, 2006. arXiv :math/0611382.
- [15] G. WILSON : Hilbert’s sixteenth problem. *Topology*, 17(1):53–73, 1978.