Percolation de premier passage

Paul Dario

Octobre 2015

Table des matières

1 Introduction

La percolation de premier passage a été introduite par Hammersley et Welsh (7) en 1965 pour modéliser l'écoulement d'un fluide à travers un milieu aléatoire. Ces dernières années, elle a intéressé les physiciens, les biologistes, les informaticiens et reste malgré son apparente simplicité un modèle assez mal compris.

Ici, nous nous intéressons au modèle défini sur $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante. A chaque arête e de $\mathbb{Z}^d$ on associe une variable aléatoire positive $\tau(e)$ qui doit être interprétée comme la durée nécessaire pour traverser l'arête e. Une comparaison pertinente consiste à s'imaginer un fluide provenant du sommet 0 et se propageant dans le graphe en mettant une durée $\tau(e)$ pour traverser l'arête e. On suppose que les variables aléatoires (τ_e) sont indépendantes identiquement distribuées, on les appellera parfois dans la suite temps de passage. On définit un chemin Γ comme une suite finie d'arêtes $e_1, e_2, \cdots, e_n$ dans $\mathbb{Z}^d$ telle que pour tout i les arêtes e_i et e_{i+1} ont exactement un sommet commun. On s'intéresse pour $x \in \mathbb{Z}^d$ à la variable aléatoire suivante :

$$T(0,x) = \inf_{\gamma : 0 \to x} \sum_{e \in \gamma} \tau(e)$$

où l'infimum porte sur tous les chemins allant de 0 à x. L'objectif principal de la percolation de premier passage est de comprendre le comportement asymptotique de cette variable aléatoire lorsque $|x| \to +\infty$. De nombreuses questions se posent, nous en citons deux auxquelles nous essaieront d'apporter des éléments de réponse dans la suite

1. Peut-on donner un développement asymptotique de la variable aléatoire $T(0,x)$ lorsque $|x| \to +\infty$?
2. Quelle est la géométrie des géodésiques (chemins optimaux dans la définition de $T(0,x)$) lorsque $|x| \to +\infty$?

La question du développement asymptotique au premier ordre de $T(0,x)$ a été résolue par l'élaboration du théorème de forme (cf sous-section 3.1). On en trouve une version simplifiée dans l'article d'Hammersley et Welsh (7). Ce résultat a été généralisé par différents mathématiciens (notamment Kingman (11) (12), Richardson (16), Cox-Durett (5) et Kesten (10)) pour donner au théorème de forme sa version finale présentée ci-après.

Dans la section 2, nous présentons le modèle mathématique rigoureux de la percolation de premier passage. Dans les sections 3 et 4, nous apportons quelques éléments de réponse à la première question. Enfin, dans la section 5, nous apportons des éléments de réponse à la seconde question et nous tentons de mettre en évidence les liens qui existent entre ces deux questions.

2 Cadre de l'étude

On se place dans $\mathbb{Z}^d$ équipé de la norme $|\cdot|_1$. On appelle E l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, c'est-à-dire $E := \left\{(i,j) |\ i,j \in \mathbb{Z}^d, |i-j|_1 = 1\right\}$ et on se donne μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$. On considère alors l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \mathbb{R}_+^E$, $\mathcal{A}$ est la tribu sur Ω générée par les cylindres et $\mathbb{P} = \mu^{\otimes E}$.

Définition 1. *Pour chaque arête e, on définit τ_e la variable aléatoire sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}^+$ donnée par*

$$\tau_e : (x_{e'})_{e' \in E} \longmapsto x_e.$$

Remarque: Par construction, les variables aléatoires $(\tau_e)_{e \in \Omega}$ sont i.i.d de loi μ.

Définition 2. *Pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$, on définit $T(x,y)$ la variable aléatoire*

$$T(x,y) := \inf_{\gamma : x \to y} \sum_{e \in \gamma} \tau_e,$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins γ dans $\mathbb{Z}^d$ entre x et y, i.e, les ensembles d'arêtes de la forme $\{(x, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, y)\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{Z}^d$.

L'objectif consiste donc à étudier le comportement asymptotique de $T(0, nx)$ pour $x \in \mathbb{Z}^d$ lorsque $n \to +\infty$. Pour cela nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 3. *Pour $k \in \mathbb{Z}^d$, on définit S_k la translation sur Ω de vecteur k, i.e,*

$$\begin{array}{rccc} S_k : & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & (x_e)_{e \in E} & \longmapsto & (x_{e+k})_{e \in E}. \end{array}$$

Proposition 1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, la translation S_k préserve $\mathbb{P}$, i.e, $S_*(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ et est ergodique, i.e, si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $S_k^{-1}(A) = A$ $\mathbb{P}$-p.s alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.*

3 Théorème de forme

3.1 Enoncé

Théorème de forme (Théorème 2.18 de (9))**.** *On suppose que*

$$\mathbb{E}[\min(t_1, \cdots, t_{2d})] < +\infty$$

où les t_i sont i.i.d de loi μ, alors on a presque sûrement

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \exists \kappa(x) \in \mathbb{R}^+,\ \frac{T(nx, 0)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \kappa(x).$$

On peut par ailleurs vérifier que κ satisfait les relations suivantes :

1. $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d,\ \kappa(x+y) \leq \kappa(x) + \kappa(y)$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z}^d,\ \kappa(\lambda x) = |\lambda| \kappa(x)$.

Dans la suite on notera $e_1 := (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ et on appellera $\kappa(e_1)$ la constante de temps. Il existe une version plus géométrique du théorème de forme, pour pouvoir l'énoncer nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 4. *Pour K, L deux compacts de $\mathbb{R}^d$, on définit la distance de Hausdorff entre K et L par*

$$\mathrm{dist}_H(K, K') := \inf\{\epsilon > 0 \ :\ K \subseteq L + B(0,\epsilon) \text{ et } L \subseteq K + B(0,\epsilon)\}$$

où $B(0,\epsilon)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon ϵ de $\mathbb{R}^d$.

Théorème de forme (version géométrique) (Cox-Durrett (5)). *On définit pour $t \in \mathbb{R}^+$ le sous-ensemble de niveau $B_t := \{x \in \mathbb{Z}^d \mid T(x,0) \leq t\}$.*

On suppose que $\mu(\{0\}) < p_c(d)$ où $p_c(d)$ est la probabilité de percolation critique en dimension d et que

$$\mathbb{E}[\min(t_1^d, \cdots, t_{2d}^d)] < +\infty,$$

alors $\frac{1}{t}B_t$ converge presque sûrement pour la distance de Hausdorff vers un ensemble $B \subset \mathbb{R}^d$ compact convexe lorsque $t \to +\infty$.

Remarque:

1. L'hypothèse $\mu(\{0\}) < p_c(d)$ est importante. En effet si l'on a $\mu(\{0\}) > p_c(d)$, alors B_t n'est pas borné et la conclusion du théorème ne peut pas être vérifiée.
2. L'hypothèse
$$\mathbb{E}[\min(t_1^d, \cdots, t_{2d}^d)] < +\infty$$
est un peu plus forte que celle supposée dans la première version du théorème de forme.

Voici deux questions relativement simples à énoncer mais cependant ouvertes associées à ce théorème :

Question:

Quels ensembles compacts convexes de $\mathbb{R}^d$ peuvent être obtenus comme forme limite en percolation de premier passage ? A quelles conditions sur la loi μ la forme limite est-elle strictement convexe ?

L'idée principale de la preuve du théorème de forme est d'utiliser la propriété de sous-additivité (ou inégalité triangulaire) suivante :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z}^d\,,\ T(x,y) \leq T(x,z) + T(z,y)$$

couplée avec le théorème ergodique sous-additif que nous présentons dans la section suivante.

3.2 Théorème ergodique sous-additif

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité fixé et $S : X \to X$ une fonction mesurable fixée. On suppose que S préserve μ et que S est ergodique par rapport à μ. Pour un entier naturel n on notera $S^n = S \circ S \circ \cdots \circ S$ où l'on a itéré n fois.

Théorème ergodique sous-additif de Kingman. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables et intégrables. On suppose que cette suite vérifie la propriété de sous-additivité suivante :*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+m} \leq T_n + T_m \circ S^n,$$

alors $\frac{T_n}{n}$ converge presque sûrement vers une constante κ qui satisfait $\kappa = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_X T_n d\mu$.

Il existe plusieurs variantes et références possibles pour ce théorème, on peut par exemple trouver une preuve de A. Avila et J. Bochi dans (3).

Remarque:

1. Ce théorème est une généralisation du théorème de convergence des suites sous-additives.
2. On peut généraliser ce théorème en supprimant l'hypothèse d'ergodicité, dans ce cas $\kappa = \kappa(x)$ n'est plus forcément constante et on a la relation $\int_X \kappa(x) d\mu(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \int_X T_n(x) d\mu(x)$.

Heuristique de preuve du théorème de forme: L'idée générale de la preuve du théorème de forme est d'appliquer le théorème ergodique sous-additif avec $T_n = T(0, nx)$ et $S = S_x$ la translation de vecteur x sur $\mathbb{Z}^d$.

□

3.3 Etude de la constante de temps

Maintenant que l'on sait que $T(0, nx)$ croît linéairement en n, on souhaite étudier la constante $\kappa(x)$ et plus spécifiquement $\kappa(e_1)$ où $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Z}^d$. On a facilement à partir de la loi forte des grands nombres

$$0 \leq \kappa(e_1) \leq \mathbb{E}[\tau(e_1)].$$

Hammersley et Welsh ont établi dans (7) le raffinement suivant :

Théorème 1 (Hammersley-Welsh (7))**.** *Si μ n'est pas une masse de Dirac, i.e, si $\tau(e_1)$ n'est pas constante presque sûrement, alors $\kappa(e_1) < \mathbb{E}[\tau(e_1)]$.*

Dans l'autre direction, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2 (Théorème 6.1 dans (9))**.** *On a l'équivalence*

$$\mu(\{0\}) < p_c(d) \Longleftrightarrow \kappa(e_1) > 0.$$

Une autre question intéressante est la suivante. Etant données deux lois μ et $\tilde{\mu}$, est-t-il possible de comparer leur constante de temps respective $\kappa(e_1)$ et $\tilde{\kappa}(e_1)$? Voici un élément de réponse dans un cas particulier.

Si pour tout nombre réel positif t, $\tilde{\mu}([0;t]) \leq \mu([0;t])$, alors il est possible de prouver $\kappa(e_1) \leq \tilde{\kappa}(e_1)$ par un argument de couplage. L'inégalité stricte $\kappa(e_1) < \tilde{\kappa}(e_1)$ a été démontrée par van den Berg et Kesten dans le cas suivant :

Définition 5. *Soient μ et $\tilde{\mu}$ deux mesures de probabilité. On dit que μ est plus variable que $\tilde{\mu}$ si pour toute fonction concave croissante $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\int \phi d\mu \leq \int \phi d\tilde{\mu}.$$

quand les deux intégrales sont bien définies. Si de plus $\mu \neq \tilde{\mu}$, on dit que μ est strictement plus variable que $\tilde{\mu}$.

Théorème 3 (van den Berg-Kesten (17), Marchand (14))**.** *On suppose que $d = 2$ et que $\mu(\{0\}) < p_c(2)$. Si μ est strictement plus variable que $\tilde{\mu}$, alors $\kappa(e_1) < \tilde{\kappa}(e_1)$.*

Remarque: D'après un résultat de H. Kesten, on a $p_c(2) = \frac{1}{2}$.

Ce théorème a une conséquence intéressante dans l'étude des géodésiques qui sera présentée dans la section 5.

4 Etude des fluctuations

D'après le théorème de forme, pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, sous les hypothèses adéquates
$$\frac{T(0,nx)}{n} \to \kappa(x) \ p.s.$$
La question qui se pose alors est celle du développement asymptotique à l'ordre supérieur. Pour obtenir des informations sur ce développement asymptotique nous nous intéressons à la quantité

$$\mathrm{var}(T(0,nx)).$$

Il est conjecturé grâce à des résultats provenant de la physique (voir par exemple (8), (10), (19) ou (20)) qu'il existe un exposant $\chi := \chi(d)$ tel que

$$\mathrm{var}(T(0,nx)) \sim n^{2\chi}.$$

Cette conjecture est ouverte et le sens à donner à "$\sim$" n'est pas parfaitement clair (et fait en quelque sorte partie de la conjecture). En dimension $d = 1$ nous savons que $\chi(1) = \frac{1}{2}$ (somme de variables aléatoires i.i.d). En dimension $d = 2$ il est conjecturé que $\chi(2) = \frac{1}{3}$, en dimension supérieure ou égale à 3, il n'y a pas de conjecture précise sur la valeur de $\chi(d)$. Un premier élément de réponse a été apporté par H. Kesten en 1993 dans (10) avec le théorème suivant :

Théorème 4 (Kesten (10))**.** *On suppose que $\mathbb{E}[\tau(e_1)^2] < +\infty$, $\mu(\{0\}) < p_c(d)$ et que μ n'est pas une masse de Dirac. Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*
$$C_1 \leq \mathrm{var}(T(0,x)) \leq C_2|x|_1.$$

4.1 Amélioration de la borne supérieure

En 2003, Benjamini-Kalai-Schramm ont amélioré la borne supérieure dans le cas spécifique des variables de Bernouilli (cf (4)). Le résultat a été généralisé par la suite pour donner le théorème suivant :

Théorème 5 (Damron-Hanson-Sosoe (6))**.** *Pour $d \geq 2$, on suppose que $\mathbb{E}[\tau(e_1)^2(\log(\tau(e_1))_+)] < +\infty$, $\mu(\{0\}) < p_c(d)$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*
$$\mathrm{var}(T(0,x)) \leq C\frac{|x|_1}{\log(|x|_1)}.$$

4.2 Amélioration de la borne inférieure

Pour ce qui est de la minoration de la variance, la borne a été améliorée par Newman-Piza en 1995 dans (15) dans le cas de la dimension 2 par le théorème suivant :

Théorème 6 (Newman-Piza (15))**.** *On suppose $d = 2$, $\mathbb{E}[\tau(e_1)^2] < +\infty$. On définit $\lambda := \inf\{s \ : \ \mu([0,s]) > 0\}$. Si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1. *$\lambda = 0$ et $\mu(\{\lambda\}) < p_c(2)$,*

2. $\lambda > 0$ *et* $\mu(\{\lambda\}) < p_c^d(2)$ *où* $p_c^d(2)$ *est la probabilité critique du modèle de percolation dirigée en dimension 2,*

alors il existe $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{Z}^2$

$$\mathrm{var}(T(0,x)) \geq B \log(|x|_1).$$

Ce qui a comme principale conséquence de démontrer la divergence de la variance.

5 Etude des géodésiques

5.1 Définition et existence de géodésiques

Définition 6. *Pour* $x, y \in \mathbb{Z}^d$*, on appelle géodésique allant de* x *à* y *un chemin dans* $\mathbb{Z}^d$ *entre* x *et* y *(cf définition 2) qui minimise* $T(x,y)$*.*

La première question qui se pose lorsque l'on cherche à étudier les géodésiques est celle de l'existence de ces dernières. Dans le cas particulier où μ a un support inclus dans un intervalle de la forme $[\lambda; +\infty[$ avec $\lambda > 0$ (i.e, $\tau(e) \geq \lambda$ presque sûrement), il est assez facile de démontrer l'existence d'une géodésique allant de x à y pour toute paire de sommets $(x,y) \in \left(\mathbb{Z}^2\right)^2$.

Néanmoins le problème est plus délicat dans le cas général. Il est conjecturé que les géodésiques existent pour toutes les lois μ. Ce problème a été résolu par Wierman et Reh dans le cas de la dimension 2.

Théorème 7 (Wierman-Reh (18))**.** *Si* $d = 2$*, alors, presque sûrement, il existe une géodésique allant de* x *à* y *pour toute paire de sommets* $(x,y) \in \left(\mathbb{Z}^2\right)^2$*.*

Le cas général de la dimension $d \geq 3$ est toujours ouvert. Nous pouvons cependant citer deux résultats d'existence de géodésiques en dimension quelconque moyennant des hypothèses sur la loi des temps de passage.

Théorème 8. *On se place en dimension* d*. Si* $\mu(\{0\}) < p_c(d)$*, alors il y a existence de géodésiques presque sûrement.*

On pourra trouver une référence pour ce dernier théorème dans (9) (9.23). Nous avons dans l'autre direction le théorème suivant :

Théorème 9 (Zhang (21))**.** *Si* $\mu(\{0\}) > p_c(d)$ *et* $\mathbb{E}[\tau(e)] < +\infty$*, alors il y a existence de géodésiques presque sûrement.*

5.2 Comportement asymptotique des géodésiques

Nous souhaitons dans cette section étudier le comportement des géodésiques reliant $0 \in \mathbb{Z}^d$ à $x \in \mathbb{Z}^d$ lorsque $|x| \to +\infty$. Pour cela nous avons besoin définir l'ensemble suivant :

Définition 7. *pour* $x \in \mathbb{Z}^d$ *on note*

$$\Gamma(0,x) := \{y \in \mathbb{Z}^d \ : \ y \textit{ est sur une géodésique reliant } 0 \textit{ à } x\}.$$

On a alors un contrôle du diamètre de $\Gamma(0,x)$ par la norme de x grâce au théorème suivant :

Théorème 10 (Auffinger-Damron-Hanson (2))**.** *On se place en dimension d et on suppose que $\mu(\{0\}) < p_c(d)$. Il existe deux constantes $M, C > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$*

$$\mathbb{P}\left(\operatorname{diam}\Gamma(0,x) \geq M|x|_1\right) \leq \exp(-C|x|_1).$$

Remarque:

1. Sous l'hypothèse $\mu(\{0\}) < p_c(d)$, $\Gamma(0,x)$ est non vide presque sûrement par le théorème 8.
2. Comme 0 et x sont dans $\Gamma(0,x)$, le diamètre de $\Gamma(0,x)$ est plus grand que $|x|_1$. Ce théorème montre qu'avec forte probabilité les géodésiques ne sont pas trop éloignées les unes des autres.

Une autre question intéressante que l'on peut se poser est la suivante. Si l'on se donne une loi des temps de passage μ à support non borné sur $\mathbb{R}^+$, les géodésiques vont-elles éviter les arêtes auxquelles sont associées un temps de passage très élevé (quitte à faire des détours) ? La réponse en dimension 2 est négative et découle du théorème 3, nous donnons l'argument dans la paragraphe ci-dessous.

Soit M un nombre réel positif grand. Si l'on note μ_M la loi de la variable aléatoire $\tau(e_1)\mathbf{1}_{\tau(e_1)\leq M} + (\tau(e_1)+1)\mathbf{1}_{\tau(e_1)>M}$, alors μ (qui est la loi de $\tau(e_1)$) est strictement plus variable que μ_M . En appliquant le théorème 3, on obtient que la constante de temps $\kappa_M(e_1)$ du nouveau modèle est strictement plus grande que la constante de temps $\kappa(e_1)$ du modèle original. Ceci permet de conclure que les géodésiques reliant 0 à ne_1 dans le modèle original possèdent une fraction strictement positive d'arêtes de poids supérieur à M (lorsque n est grand). On pourra trouver une référence pour cette preuve dans (14).

5.3 Ecart par rapport à la ligne droite

Etant donné $x \in \mathbb{Z}^d$, on souhaiterait se demander si les géodésiques reliant 0 à x restent assez proches (dans un sens à définir) de la ligne droite $L_x := \{mx \in \mathbb{R}^d \,:\, m \in \mathbb{R}\}$. Après une étude plus approfondie que nous ne détaillerons pas ici, cette question se révèle être assez proche de celle de l'étude des fluctuations présentée dans la section 4. Nous allons néanmoins exposer quelques résultats et conjectures mettant en évidence les liens existants entre ces deux problèmes.

Définition 8. *Pour $x \in \mathbb{Z}^d$ et $m \in \mathbb{R}^+$, on définit $C(x,m)$ le cylindre d'axe L_x et de rayon m par*

$$C(x,m) := \{y \in \mathbb{R}^d \,:\, \operatorname{dist}(y, L_x) \leq m\}.$$

Par souci de simplicité, dans la suite nous nous restreignons au cas $x = e_1$.

Nous allons mesurer l'écart des géodésiques par rapport à la ligne droite à l'aide de l'exposant suivant :

Définition 9.

$$\xi := \inf\{\alpha > 0 \,:\, \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\Gamma(0,ne_1) \subset C(e_1,n^\alpha)) > 0\}.$$

Nous mesurons par ailleurs les fluctuations de $T(0,ne_1)$ à l'aide de l'exposant suivant :

Définition 10.

$$\chi_{e_1} := \sup\{\alpha > 0 \,:\, \exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{var}(T(0, ne_1)) \geq Cn^{2\alpha}\}.$$

Remarque: Le χ_{e_1} de la précédente définition et le χ de la section 4 désignent bien sûr la même quantité. Néanmoins nous n'avions pas donné de définition précise de χ (car nous n'avions pas de résultat l'impliquant à exposer). Par ailleurs cette définition n'est pas parfaitement satisfaisante car nous avons choisi une direction particulière (la direction e_1), alors que cette notion de direction privilégiée n'était pas présente lors de la présentation de χ dans la section 4.

Newman et Piza ont démontré dans (15) une inégalité reliant les deux quantités précédemment définies.

Théorème 11 (Newman-Piza (15))**.** *Sous les hypothèses du théorème 6 on a*

$$\chi_{e_1} \geq \frac{1 - (d-1)\xi}{2}.$$

Pour conclure nous présentons une conjecture centrale en percolation de premier passage reliant les fluctuations de $T(0, x)$ par rapport à son espérance aux déviations des géodésiques par rapport à la ligne droite.

Conjecture: (voir par exemple (13))

$$\chi = 2\xi - 1.$$

Remarque: Cette conjecture est ouverte et le sens à donner aux quantités χ et ξ n'est peut être pas exactement celui des définitions 9 et 10 et fait en quelque sorte partie de la conjecture. L'idée principale est que χ doit mesurer les fluctuations de $T(0, x)$ par rapport à $\mathbb{E}[T(0, x)]$ lorsque x est grand et ξ doit mesurer les déviations des géodésiques reliant 0 à x par rapport à la ligne droite.

Note à l'intention du lecteur : On pourra trouver plus d'informations sur le sujet dans (9) ou (1). Cette dernière référence ((1)) est plus récente mais ne semble toutefois pas complète au moment de l'écriture de ces lignes.

Références

[1] A. Auffinger, M. Damron et J. Hanson : First passage percolation and related models : a survey (draft). *preprint.*

[2] A. Auffinger, M. Damron et J. Hanson : Rate of convergence of the mean for sub-additive ergodic sequences. *arXiv preprint arXiv :1408.4444*, 2014.

[3] A. Avila et J. Bochi : On the subadditive ergodic theorem. preprint.

[4] I. Benjamini, G. Kalai et O. Schramm : First passage percolation has sublinear distance variance. *In Selected Works of Oded Schramm*, pages 779–787. Springer, 2011.

[5] J. Cox et R. Durrett : Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions. *The Annals of Probability*, pages 583–603, 1981.

[6] M. Damron, J. Hanson et P. Sosoe : Sublinear variance in first-passage percolation for general distributions. *Probability Theory and Related Fields*, pages 1–36, 2013.

[7] J. Hammersley et D. Welsh : First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. *In Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pages 61–110. Springer, 1965.

[8] M. Kardar, G. Parisi et Y-C. Zhang : Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.

[9] H. Kesten : Aspects of first passage percolation. *In École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984*, pages 125–264. Springer, 1986.

[10] H. Kesten : On the speed of convergence in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pages 296–338, 1993.

[11] J. Kingman : The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 499–510, 1968.

[12] J. Kingman : Subadditive ergodic theory. *The annals of Probability*, pages 883–899, 1973.

[13] J. Krug et H. Spohn : Kinetic roughening of growing surfaces. *C. Godreche, Cambridge University Press, Cambridge*, 1(99):1, 1991.

[14] R. Marchand : Strict inequalities for the time constant in first passage percolation. *Annals of Applied Probability*, pages 1001–1038, 2002.

[15] C. Newman et M. Piza : Divergence of shape fluctuations in two dimensions. *The Annals of Probability*, pages 977–1005, 1995.

[16] D. Richardson : Random growth in a tessellation. *In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 74, pages 515–528. Cambridge Univ Press, 1973.

[17] J. van den Berg et H. Kesten : Inequalities for the time constant in first-passage percolation. *The Annals of Applied Probability*, pages 56–80, 1993.

[18] J. Wierman et W. Reh : On conjectures in first passage percolation theory. *The Annals of Probability*, pages 388–397, 1978.

[19] D. Wolf et J. Kertész : Noise reduction in eden models. i. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 20(4):L257, 1987.

[20] JG. Zabolitzky et D. Stauffer : Simulation of large eden clusters. *Physical Review A*, 34(2):1523, 1986.

[21] Y. Zhang : Supercritical behaviors in first-passage percolation. *Stochastic processes and their applications*, 59(2):251–266, 1995.