

Introduction au domaine de recherche: Asymptotique spectrale des opérateurs de Toeplitz

Alix Deleporte

14 novembre 2015

Table des matières

1	Introduction	2
2	Contexte physique	2
2.1	Spins quantiques	2
2.2	Spins classiques	4
2.3	Développement formel pour la levée de dégénérescence	5
3	Quantification	6
3.1	Géométrie symplectique	6
3.2	Quantification	7
3.3	Structure de Toeplitz	8
4	Levée de dégénérescence quantique des opérateurs de Schrödinger	8
4.1	Potentiels admettant un minimum non dégénéré	9
4.2	Potentiels dont les lieux des minima est une sous-variété, et localisation	10
5	Quantification de Toeplitz	11
5.1	Fibrés en droites et espaces de Hardy	11
5.2	Théorème de Kodaira	12
5.3	Quantification de Toeplitz	13

1 Introduction

Durant les dernières décennies, un nouveau parallèle a émergé entre la géométrie différentielle et l'analyse spectrale. Cette association a été motivée par l'intuition physique d'une correspondance entre des phénomènes relevant de la mécanique classique (géodésiques, ou plus généralement flots hamiltoniens) et l'asymptotique de phénomènes quantiques (lorsque $h \rightarrow 0$ ou lorsque l'énergie du système devient très grande). Nos recherches ont pour origine un article de B. Douçot et P. Simon [DS98], sur le fond du spectre dans la limite semiclassique de réseaux de spins ferromagnétiques ou antiferromagnétiques. Le cadre originel dans lequel les outils semiclassiques ont été développés [Hel88], [Zwo12] est celui de la quantification de Weyl sur \mathbb{R}^{2n} , et dans une moindre mesure des opérateurs de type $-h^2\Delta + V$ sur des variétés riemanniennes. Cependant, le cadre théorique de la quantification des spins est différent [MM12, Bor00]. Il existe à ce jour trop peu de résultats similaires au cas de la quantification de Weyl (on peut citer [BPU98]), s'agissant en particulier de l'étude des états fondamentaux. Douçot et Simon conjecturent cependant une généralisation des résultats de [Hel88].

Dans ce document, nous présentons les enjeux mathématiques de cette étude. Après avoir introduit le contexte mathématique de la modélisation des spins, nous présentons les arguments de Helffer et Sjöstrand dans le cas des opérateurs de Schroedinger. La troisième partie présente un contexte géométrique général pour étudier la limite semi-classique de certains systèmes, parmi lesquels les réseaux de spins.

2 Contexte physique

2.1 Spins quantiques

Soit $S \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \setminus \{0\}$ un demi-entier, fixé dans toute la suite du raisonnement. Sur l'espace de Hilbert \mathbb{C}^{2S+1} , on peut considérer les endomorphismes autoadjoints S_x, S_y, S_z donnés par leur représentation matricielle dans la base canonique :

$$\begin{aligned}(S_z)_{k,l} &= \delta_l^k (S + 1 - k) \\(S_x)_{k,l} &= (\delta_{l+1}^k + \delta_l^{k+1}) \frac{1}{2} \sqrt{(k+l-1)S - (k-1)(l-1)} \\(S_y)_{k,l} &= (\delta_{l+1}^k - \delta_l^{k+1}) \frac{i}{2} \sqrt{(k+l-1)S - (k-1)(l-1)}.\end{aligned}$$

Ces trois matrices sont des généralisations des matrices de Pauli

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

qui correspondent au cas $S = \frac{1}{2}$. Elles vérifient également $[S_x, S_y] = iS_z$, et les égalités obtenues par permutation circulaire. Le spectre de chacune de ces trois matrices est $-S, -S + 1, \dots, S$. Par ailleurs, les conditions de crochet montrent que les matrices iS_x, iS_y, iS_z engendrent l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. En passant à l'exponentielle, on obtient une action de SO_3 sur \mathbb{C}^{2S+1} , ou plus précisément, un moyen de plonger $SO(3)$ dans $SU(2S+1)$.

On décrit alors l'état d'un spin par un point de l'espace projectif $\mathbb{C}P^{2S}$. A un endomorphisme autoadjoint H de \mathbb{C}^{2S+1} , on associe le flot $t \mapsto e^{itSH}$ sur $\mathbb{C}P^{2S}$, qui représente l'évolution quantique du système. Par exemple, on peut modéliser l'action d'un champ magnétique vertical, constant, sur un spin, par $H = \frac{a}{\hbar} S_z$, où a est l'intensité du champ. Les images dans $\mathbb{C}P^{2S}$ des vecteurs de la base canonique sont ici les points fixes du flot.

Pour décrire plusieurs spins en interaction, on considère le produit tensoriel $(\mathbb{C}^{2S+1})^{\otimes N}$, muni des endomorphismes autoadjoints correspondants $(S_{x,i}, S_{y,i}, S_{z,i})_{1 \leq i \leq N}$. L'état du système est alors décrit par un point de $\mathbb{C}P^{N(2S+1)-1}$.

Remarque 1. L'ensemble des états n'est pas $(\mathbb{C}P^{2S})^{\otimes N}$. De manière équivalente, tous les vecteurs d'un produit tensoriel d'espaces ne sont pas des produits purs. C'est cette notion que les physiciens appellent *intrication*.

On peut alors formuler notre problème physique : à un graphe connexe (V, E) , on peut associer un réseau de spins, indicés par V . Sur ce réseau, on considère l'opérateur

$$H = \frac{J}{S|E|} \sum_{k \sim l} (S_{x,k} S_{x,l} + S_{y,k} S_{y,l} + S_{z,k} S_{z,l}),$$

et on se demande quels sont les vecteurs propres de H ayant la plus petite valeur propre (correspondant aux états de moindre énergie, là où le système est "au repos"). Pour $J < 0$ (ferromagnétisme), une base de cette espace propre est donnée par l'ensemble des produits tensoriels $u \otimes u \otimes \dots \otimes u$; physiquement, le système favorise les états où les spins sont dans le même sens. L'état fondamental est donc *dégénéré* (l'espace propre a plus d'une dimension), mais cette dégénérescence correspond à une symétrie du système : l'action de $SO(3)$ laisse H invariant. Modulo cette action, il y

a donc un unique état fondamental. Pour $J > 0$, la nature de l'état fondamental est beaucoup moins claire.

On peut alors se poser les questions suivantes : que dire des états fondamentaux dans la limite $S \rightarrow +\infty$ (limite semi-classique) ? Et qu'arrive-t-il dans la limite d'un graphe infini (limite thermodynamique) ? Peut-on intervertir ces deux limites ?

2.2 Spins classiques

Pour comprendre la limite $S \rightarrow +\infty$, on considère un modèle différent. La sphère S^2 est munie d'une structure symplectique ; les trois fonctions s_x, s_y, s_z qui donnent respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote d'un point, sont des fonctions lisses sur S^2 , avec $\{s_x, s_y\} = s_z$, et les égalités similaires par permutation. Par ailleurs, le flot hamiltonien associé à s_z est le flot des rotations autour de l'axe vertical.

De manière similaire, à un graphe connexe (V, E) on peut associer un réseau de spins classiques indicés par V , avec le hamiltonien

$$h = \frac{J}{|E|} \sum_{k \sim l} (s_{x,k} s_{x,l} + s_{y,k} s_{y,l} + s_{z,k} s_{z,l}).$$

Comme tout à l'heure la question des états de moindre énergie (qui correspondent au minimum de h) est beaucoup plus simple si $J < 0$ (tous les spins sont égaux) que si $J > 0$.

La recherche d'états fondamentaux dans le cas $J > 0$ est néanmoins plus facile dans le cas classique que dans le cas quantique, où les phénomènes d'intrications compliquent énormément les calculs.

Examinons par exemple, comme dans [DS98], un graphe composé de triangles connectés entre eux par un sommet selon un arbre binaire fini, appelé « arbre de Husimi ».

Si u, v, w sont trois éléments de S^2 , alors on constate que $u \cdot v + u \cdot w + v \cdot w = \frac{1}{2} [|u + v + w|^2 - 3]$. Dans ce cas, pour minimiser H , il est nécessaire et suffisant que sur chaque triangle, la somme des spins sur les trois sommets soit nulle. L'état fondamental est alors hautement dégénéré : le spin à la racine de l'arbre est certes fixé modulo l'action de $SO(3)$, mais à chacun des triangles correspond une dégénérescence supplémentaire (il n'y a pas qu'une façon de choisir deux vecteurs sur la sphère, de somme donnée), qui découle d'une action de S^1 ; et H n'est pas invariant par cette action.

En conclusion, le problème classique est plus simple à résoudre que le problème quantique, mais c'est un problème dégénéré. L'intuition physique est que l'état fon-

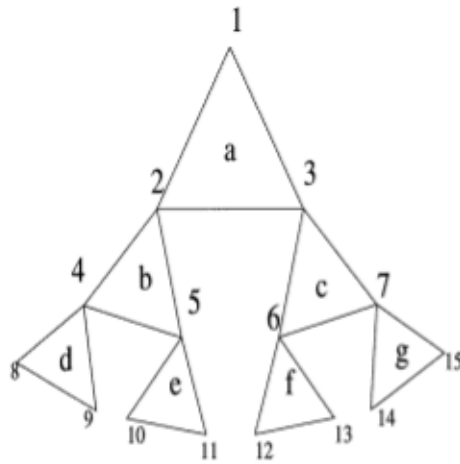


FIGURE 1 – L’arbre de Husimi de degré 4. Image tirée de [DS98].

damental quantique ne peut pas être plus dégénéré que le hamiltonien ; dans la limite semi-classique, on s’attend à une levée de dégénérescence quantique.

Une première étape dans l’étude mathématique des réseaux de spins a été de démontrer qu’on peut inverser limite thermodynamique et limite semi-classique, au sens de l’énergie libre [Lie73]. Néanmoins, à notre connaissance, une étude détaillée du comportement asymptotique de l’état du système à température nulle n’a pas encore été réalisée.

2.3 Développement formel pour la levée de dégénérescence

Considérons, sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, le potentiel $V(x_1, x_2) = (2 + \cos(x_1))x_2^2$. Du point de vue classique, ce potentiel est associé à l’équation différentielle $y'' = -\text{grad}(V)$, dont l’ensemble des points d’équilibre est $S_1 \times 0$, un ensemble qui est plus dégénéré que le potentiel lui-même. Du point de vue quantique, ce potentiel est associé à l’opérateur $-h^2\Delta + V = P(h)$, positif et à résolvante compacte. Si u_h désigne un vecteur propre normalisé de $P(h)$, que peut-on dire du support de u_h lorsque $h \rightarrow 0$?

Sur chaque tranche $x_1 = \text{const.}$, on a l’équation

$$h^2 \partial_{x_2}^2 u_h(x_1, x_2) = (2 + \cos(x_1))x_2^2 u_h(x_1, x_2).$$

Formellement, les fonctions $u_h(x_1, \cdot)$ sont proches d’une fonction propre de l’opéra-

teur $-h^2\Delta_x + \alpha(x_1)x^2$ correspondant à la plus petite valeur propre. Autrement dit,

$$u_h(x_1, x_2) \approx f(x_1) \exp\left(-\frac{x_2^2}{4h\sqrt{2 + \cos(x_1)}}\right).$$

A première vue, l'état fondamental se concentre sur le lieu des zéros de V . Cependant, f se concentre également en un unique point : en effet, l'équation sur f est

$$h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = h\sqrt{2 + \cos(x)},$$

donc f est solution d'un opérateur de Schrödinger, avec paramètre \sqrt{h} , et potentiel $\sqrt{2 + \cos(x)}$. Comme il s'agit de minimiser l'énergie, on s'attend à ce que f se concentre en le lieu où le potentiel est minimal, qui est un unique point.

Formellement, on voit que l'état fondamental, dans la limite semi-classique, se concentre sur une sous-partie du lieu des zéros du potentiel, là où la hessienne transverse est la plus petite.

Douçot et Simon [DS98] utilisent cette intuition pour démontrer que pour un arbre de Husimi, seul un sous-ensemble discret d'états est admissible en tant que limite semi-classique d'état fondamental, entre lesquels apparaissent des phénomènes d'effet tunnel.

3 Quantification

3.1 Géométrie symplectique

Le cadre mathématique correspondant à la mécanique classique est celui de la géométrie symplectique. On appelle variété symplectique un couple (M, ω) , où M est une variété réelle de dimension paire, et où ω est une 2-forme fermée sur M , non dégénérée (la forme ω^n est une forme volume sur M). La non-dégénérescence permet de définir le gradient symplectique d'une fonction f comme l'unique champ de vecteurs X_f vérifiant :

$$X_f \lrcorner \omega = df.$$

On peut alors munir $C^\infty(M)$ d'une structure d'algèbre de Lie, par $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. Le foncteur X est alors un morphisme d'algèbres de Lie : $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$.

Un système classique est la donnée d'une variété symplectique (M, ω) et d'une fonction lisse H sur M ; l'état du système à un instant donné est un point de M , qui évolue dans le temps en suivant le flot de X_H , selon l'équation différentielle :

$$x'(t) = X_H(x(t)).$$

On peut aussi raisonner en termes d'observables : si a est une autre fonction sur M , l'évolution de la valeur de a est :

$$\frac{d}{dt}a(x(t)) = \{a, H\}(x(t)).$$

En particulier, le flot préserve la valeur de H .

Donnons deux exemples de systèmes hamiltoniens :

1. Si X est une variété riemannienne, et V une fonction lisse sur X , on peut considérer sur la variété symplectique T^*X le hamiltonien $H(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$. Il correspond au mouvement d'une particule sur M , soumise à un potentiel V . Les points d'équilibres stables sont les points $(x, 0)$ où x est un minimum local de V .
2. Sur la variété symplectique S^2 , on peut considérer le hamiltonien S_z donnant la cote d'un point. L'action du flot est alors une rotation de la sphère selon l'axe vertical. Les points d'équilibre stables sont les pôles Nord et Sud.

Pour conclure, on donne deux lemmes importants de la géométrie symplectique :

Lemme 2 (Modèle local universel). Sur \mathbb{R}^{2n} , dont on écrit les coordonnées $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, la forme $\omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ est symplectique.

Par ailleurs, pour toute variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, et pour tout point $P_0 \in M$, il existe un difféomorphisme local d'un voisinage de P_0 vers \mathbb{R}^{2n} , envoyant ω sur ω_0 .

Lemme 3 (Lemme de Morse symplectique). Sur \mathbb{R}^{2n} munie de la forme symplectique ω_0 , considérons une fonction V ayant un minimum local en un point P_0 , tel que la hessienne de V en P_0 soit définie positive.

Alors il existe une famille $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels strictement positifs, et un difféomorphisme local de \mathbb{R}^{2n} , envoyant P_0 sur 0 , préservant ω_0 , et conjuguant V en la fonction $\sum_i \mu_i (p_i^2 + q_i^2)$.

Lorsque des constructions utilisent la structure symplectique, on peut donc espérer se ramener à des modèles universels.

3.2 Quantification

On sait depuis un siècle que la mécanique hamiltonienne ne décrit pas fidèlement la réalité des processus physiques à l'échelle atomique. Un nouveau modèle mathématique a été proposé. En mécanique quantique, on considère un paramètre h tendant vers 0 , un espace de Hilbert \mathcal{H} (qui dépend éventuellement de h), et un opérateur auto-adjoint H sur \mathcal{H} , éventuellement non borné, et qui dépend de h . L'état du

système en un instant donné est un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathcal{H} \cap \mathcal{D}(H)$; l'évolution du système est donnée par l'action du semi-groupe $e^{-\frac{itH}{\hbar}}$, autrement dit, régie par l'équation différentielle :

$$i\hbar x'(t) = Hx(t).$$

On peut, de même, étudier l'évolution d'une observable. Si A est un autre opérateur auto-adjoint sur \mathcal{H} , alors l'évolution de A est :

$$i\hbar e^{-itH/\hbar} A e^{itH/\hbar} = [H, A].$$

On observe une forte ressemblance entre cette formule, et l'équation donnant l'évolution d'une observable classique. On peut alors formuler le problème de la quantification de la manière suivante : étant donnée une variété symplectique M , et un réel \hbar petit, peut-on trouver un espace de Hilbert \mathcal{H} et une application Op qui envoie un élément de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ sur un opérateur non-borné auto-adjoint de \mathcal{H} , vérifiant :

- $Op(1) = Id$;
- $[Op(a), Op(b)] = -\frac{i}{\hbar} Op(\{a, b\})$?

On ne peut malheureusement résoudre ce problème que de manière approchée, c'est-à-dire, la deuxième condition ne peut être raisonnablement vraie qu'à un $O(\hbar^2)$ près
CITATION.

3.3 Structure de Toeplitz

Dans le cas standard où la variété symplectique de départ est un espace cotangent T^*X , il est habituel de considérer comme espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X)$, avec un procédé de quantification qui associe aux symboles de type $p(x, \xi) = |\xi|^2 + V$ les opérateurs $P(\hbar) = -\hbar^2 \Delta + V$. Retenons l'idée que l'espace de Hilbert est un espace de fonctions en « la moitié des variables ». Mais comment donner un sens à cette expression quand on part d'une variété symplectique M quelconque ? L'exemple le plus typique est celui de la sphère S^2 . Celle-ci est en fait munie d'une structure complexe. L'idée est donc de considérer des fonctions holomorphes, ou plutôt des sections holomorphes de fibrés. Cette manière de faire possède un inconvénient : on a rigidifié la structure, et à ce titre, il n'y a plus de modèle local universel ; par exemple, il n'y a pas de version holomorphe du lemme de Morse.

4 Levée de dégénérescence quantique des opérateurs de Schrödinger

Le cadre mathématique originel dans lequel ces effets ont été démontrés est celui des opérateurs de Schrödinger, comme dans le cas modèle ; les systèmes de spins ne relèvent cependant pas de ce cadre théorique. Une étude détaillée a été réalisée par Helffer et Sjöstrand dans la série d'articles [HS84, HS85b, HS85a, HS85c, HS86, HS87].

4.1 Potentiels admettant un minimum non dégénéré

Dans cette section, on considère une fonction positive lisse V sur \mathbb{R}^d , qui tend vers l'infini en l'infini de manière polynomiale (de manière à ce que l'opérateur $P(h) = -h^2\Delta + V$ soit à résolvante compacte), et qui s'annule uniquement au point 0. On suppose également que la hessienne de V en 0 est strictement positive ; on dit alors que 0 est un *minimum non dégénéré*.

Helffer et Sjöstrand démontrent alors :

Théorème 1. Soit q la forme quadratique liée à la hessienne de V en 0. Soit $\lambda_0 = \frac{1}{2} \text{tr}(q^2)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta + q$.

Alors il existe $h_0 > 0$, et une suite $(a_i)_{i \geq 1}$ tels que, pour tout $h < h_0$, pour tout $K \in \mathbb{N}$, la première valeur propre $\lambda(h)$ de $P(h)$ vérifie $\lambda(h) = \lambda_0 h + \sum_{j=1}^K a_j h^{j+1} + O(h^{K+1})$.

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que $\lambda(h)$ soit la seule valeur propre de $P(h)$ dans l'intervalle $]\lambda_0 h - Ch^{3/2}, \lambda_0 h + Ch^{3/2}[$.

La preuve du théorème se décompose en deux parties : existence et unicité.

On commence par étudier l'opérateur modèle $Q(h) = -h^2\Delta + q$, appelé oscillateur harmonique. On constate tout de suite que le changement d'échelle $u \mapsto h^{-d/4} u(\sqrt{h}\cdot)$ conjugue $Q(h)$ en $hQ(1)$, et il suffit donc d'étudier $Q(1) = -\Delta + q$. Il est alors bien connu que les fonctions propres de cet opérateur sont de la forme $P(x)e^{-\frac{q^{-1}(x,x)}{4}}$, où q^{-1} désigne la forme quadratique associée à l'inverse de la matrice à laquelle est associée q . Par ailleurs, l'espace propre associé à la plus petite valeur propre est celui des multiples de $x \mapsto e^{-\frac{q^{-1}(x,x)}{4}}$. L'état fondamental de $Q(h)$ est alors $x \mapsto Ch^{-n/4} e^{-\frac{q^{-1}(x,x)}{4h}}$, une suite de fonctions qui se concentre en 0 lorsque $h \rightarrow 0$; cette suite de fonctions est bien décrite à l'échelle $h^{1/2}$.

On peut alors exposer les idées principales de la preuve du théorème, Pour l'existence, on se fonde sur la propriété élémentaire suivante des opérateurs autoadjoints :

Proposition 4. Soit T un opérateur auto-adjoint sur un Hilbert H , λ un réel, et u un vecteur de H de norme 1.

$$\text{Alors } \text{dist}(\lambda, \text{Sp}(H)) \leq \|T(u) - \lambda u\|$$

Il suffit donc d'exhiber des vecteurs propres approximatifs. On imagine par exemple que l'état fondamental pour l'opérateur $Q(h) = -h^2\Delta + q$, qui est $C(h)u_0(xh^{-1/2}) = C(h)e^{-\frac{q^{-1}(x,x)}{4h}}$, est un vecteur propre approché, avec valeur propre approchée $h\lambda_0$. Et en effet, $\|P(h)u_0(h) - h\lambda_0u_0(h)\| = O(h^{3/2})$.

En nous inspirant de l'étude de $Q(h)$, faisons le changement de variable $y = xh^{1/2}$. L'opérateur $P(h)$ est conjugué par ce changement de variable en l'opérateur $h\Delta + V(h^{1/2}\cdot)$. On cherche un développement en puissances de h d'une fonction propre, de la forme $u_0(x) + h^{1/2}u_1(x) + hu_2(x) + \dots$ (où les fonctions u_j sont orthogonales entre elles), associé à une valeur propre approchée $h(\lambda_0 + h^{1/2}a_1 + \dots)$. Pour cela on utilise le développement de Taylor de V : $V(x) = q(x, x) + R_3(x) + R_4(x) + \dots$

Le terme d'ordre $h^{3/2}$ de l'équation aux valeurs propres est alors

$$(Q(1) - a_0)u_1(y) + R_3(y)u_0(y) = a_1u_0(y).$$

En intégrant contre a_0 , par imparité de R_3 , on obtient $a_1 = 0$. Par ailleurs, l'opérateur $Q(1) - a_0$, sur l'espace $(a_0)^\perp$, a un inverse continu, qui préserve \mathcal{S} ; donc il existe un unique u_1 vérifiant $(Q(1) - a_0)u_1 = -R_3u_0$; par ailleurs u_1 est impair, et appartient à \mathcal{S} .

Le terme d'ordre h^2 de l'équation aux valeurs propres est alors

$$(Q(1) - a_0)u_2(y) + R_3(y)u_1(y) + R_4(y)u_0(y) = a_2u_0(y).$$

Une fois de plus, on commence par déterminer a_2 en intégrant contre u_0 ; on trouve alors $a_2 = \langle u_0, R_3u_1 + R_4u_0 \rangle$. On peut ensuite résoudre pour u_2 .

Cette procédure peut être réalisée jusqu'à un ordre quelconque fixé. Les termes a_i pour i impair sont tous nuls; de plus, comme l'opérateur $Q(1) - a_0$, sur l'espace $(a_0)^\perp$, a un inverse continu, on peut réaliser des estimations de norme. Par exemple, $\|P(h)(u_0 + h^{1/2}u_1) - ha_0\| = \|W(h^{1/2}x)(u_0(x) + h^{1/2}u_1(x))\|$, où W est un potentiel dont les dérivées en 0 jusqu'à l'ordre 4 sont nulles, et qui a une croissance au plus polynomiale; ce qui donne l'estimation recherchée.

Pour l'unicité, on utilise de manière cruciale le fait que $P(h)$ soit un opérateur local. On découpe alors \mathbb{R}^n en deux parties, la boule centrée en 0 de taille h^α , et son complémentaire. Schématiquement, sur le premier ensemble, $P(h) = Q(h)$ à un terme $h^{3\alpha}$ près; sur le deuxième, $P(h) \geq C(h^{2\alpha})$. En prenant $\alpha \in]1/3, 1/2[$, on a que la différence entre la première valeur propre de $P(h)$ et celle de $Q(h)$ est au plus $h^{3\alpha}$.

En résumé, la preuve se fonde sur les connaissances suivantes :

- L'opérateur modèle $Q(h)$ est très bien compris.
- L'opérateur $P(h)$ est local.

4.2 Potentiels dont les lieux des minima est une sous-variété, et localisation

Dans la série d'articles « Puits multiples en limite semi-classique », Helffer et Sjöstrand examinent le cas où le lieu des minima du potentiel V est une sous-variété. En utilisant des méthodes similaires, ils démontrent l'existence d'un vecteur propre approché, qui se concentre au bon endroit, ainsi que l'unicité de la valeur propre dans un petit voisinage.

Ces deux propriétés sont cruciales pour démontrer que le support de l'état fondamental se concentre bien au point demandé. Soit en effet u_h l'état fondamental normalisé (avec valeur propre $\lambda(h)$, et v_h un état fondamental approché, normalisé : $\|(P(h) - \lambda(h))v_h\|_2 \leq Ch^K$. On décompose $v_h = a(h)u_h + w_h$, où $a(h) \in [0, 1]$, et w_h est orthogonal à u_h . On a alors $\|(P(h) - \lambda(h))w_h\| \leq Ch^K$; par ellipticité, on a donc, pour tout polyindice α , $\|(P(h) - \lambda(h))\partial^\alpha w_h\| \leq Ch^{K-|\alpha|/2}$. Le résultat d'unicité de la valeur propre nous fournit alors que sur $(u_h)^\perp$, l'opérateur $P(h) - \lambda(h)$ est inversible, de norme $O(h^{-3/2})$. Alors pour K grand, par injections de Sobolev, on a $\|w_h\|_\infty \leq Ch$. Autrement dit, u_h se concentre au même endroit que v_h , ce qui est le résultat recherché.

5 Quantification de Toeplitz

Les opérateurs de Schrödinger correspondent géométriquement à des cotangents de variétés riemanniennes (sur lesquelles l'opérateur laplacien a un sens). L'espace des phases des spins classiques, quant à lui, n'est pas un cotangent mais la sphère S^2 , qu'on peut en fait munir d'une structure de variété complexe (en tant que $\mathbb{C}P^1$). Il faut donc trouver un nouveau modèle de quantifier, autrement dit d'associer à une fonction sur l'espace des phases, un opérateur dans un Hilbert.

5.1 Fibrés en droites et espaces de Hardy

La boule unité D de \mathbb{C}^2 est un fibré en disques naturel sur $M = \mathbb{C}P^1$. En appelant X le bord de D , on s'intéresse au problème géométrique suivant : parmi les fonctions L^2 sur X , lesquelles sont « valeurs au bord » de fonctions holomorphes dans D ? (Espace de Hardy) Dans ce cas particulier, le problème admet une solution explicite : une base hilbertienne de cette espace est donnée par les fonctions $z \mapsto C(k, l)z_1^k z_2^l$, où les $C(k, l)$ sont des facteurs de normalisation. La question se pose pour des ouverts

de \mathbb{C}^n plus généraux, où elle est bien plus difficile à résoudre (il existe même des contre-exemples à la densité, parmi cet espace, des valeurs au bord de fonctions holomorphes lisses jusqu'au bord). Les fonctions holomorphes forment le noyau de l'opérateur différentiel $\bar{\partial}$, il est naturel de construire sur le bord un opérateur $\bar{\partial}_b$; être dans le noyau de $\bar{\partial}_b$ est alors une condition nécessaire pour être dans l'espace de Hardy, mais la réciproque est fautive en général [KR65]. Cependant, sous l'hypothèse de *forte pseudoconvexité* de l'ouvert D (qui correspond à peu près au fait que si un cercle holomorphe est dans D , alors tout le disque est dans D), l'espace de Hardy est exactement le noyau de l'opérateur $\bar{\partial}_b$ [Koh63, Koh64]. On peut alors utiliser la structure analytique de l'opérateur $\bar{\partial}_b$ pour démontrer que le projecteur orthogonal sur l'espace de Hardy (appelé projecteur de Szegő) est, pour un ouvert pseudoconvexe, un Opérateur Intégral de Fourier à phase complexe [BdMS75]. Les Opérateurs Intégraux de Fourier sont une généralisation des opérateurs pseudo-différentiels, introduite dans les années 1970 et formalisée, entre autres, par Hörmander dans [Hör85, Hör07, Hör03].

Par exemple, dans le cas qui nous intéresse, le projecteur de Szegő est l'opérateur à noyau $S(z, w) = C \frac{1}{1 - z \cdot \bar{w}} = C \int_0^{+\infty} e^{t(z \cdot \bar{w} - 1)} t^{n-1} dt$. Le théorème de Boutet et Sjöstrand énonce que sous condition de forte pseudoconvexité, le projecteur de Szegő s'écrit de cette façon, en remplaçant $z \cdot \bar{w} - 1$ par une phase plus générale, et t^{n-1} par un symbole plus général, avec développement asymptotique en puissances décroissantes de t . La première partie du mémoire [Del15] est vouée à la construction des OIF et à un exposé de la démonstration du théorème de Boutet et Sjöstrand.

On se place alors dans le contexte suivant : soit M une variété complexe compacte, et (V, h) un fibré en droites complexes sur M , muni d'une structure hermitienne. On suppose que $\{(m, v) \in V, \|v\|_h < 1\}$ est un ouvert fortement pseudoconvexe. On peut alors utiliser les outils précédents pour caractériser l'espace de Hardy sur $X = \{(m, v) \in V, \|v\|_h = 1\}$, qui est un fibré en cercles sur M (l'action de S^1 est notée r_θ). On peut en particulier considérer les espaces de Hardy équivariants : pour $N \geq 0$, on définit $H_N(X)$ comme l'ensemble des $f \in H(X)$ tels que $f(r_\theta x) = e^{in\theta} f(x)$. Le projecteur orthogonal sur H_N , noté S_N , est alors la N -ième composante de Fourier de S . Par exemple, dans le cas où $M = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et $X = S^3$, on a simplement $S_N(z, w) = C(z \cdot \bar{w})^N$; alors $H_N(X)$ est l'ensemble des polynômes à deux variables, homogènes de degré N , donc $\dim H_N(X) = N + 1$. Si on veut une interprétation en termes de spin, il suffit de poser $N = 2S$.

De manière générale, on peut traduire la structure microlocale de S en une expression asymptotique de S_N lorsque $N \rightarrow +\infty$; aux puissances décroissantes de t correspondront des puissances décroissantes de N . Shiffman et Zelditch prouvent en

effet que le noyau du projecteur de Szegő décroît rapidement loin de la diagonale, et que près de la diagonale, il admet un développement asymptotique, dont l'ordre dominant est universel [SZ02]. Cette formule est riche de ses applications.

5.2 Théorème de Kodaira

Dans [Zel00], les espaces de Hardy équivariants sont réinterprétés en termes de sections de fibrés en droites, et on peut alors redémontrer, de manière analytique, le théorème de Kodaira et de quasi-isométrie de Tian [Tia90]. Cette étude forme aussi la deuxième partie de mon mémoire de M2 [Del15].

On rappelle le cadre général : on a un fibré en droites (V, h) sur une variété compacte M , dont la boule unité D est fortement pseudoconvexe, avec bord X . On décompose alors $H^2(X)$ selon les modes de Fourier sur la fibre circulaire. Les espaces obtenus $H_N^2(X)$ sont alors en isométrie avec des espaces de sections, de la manière suivante. Soit (L, h) le fibré dual à V , on note $L^{\otimes N}$ sa N -ième puissance tensorielle. On définit alors $H^0(M, L^{\otimes N})$, l'espace des sections holomorphes de $L^{\otimes N}$. Cet espace est de dimension finie (car M est compacte), et il muni d'une structure hermitienne provenant de h . Les espaces $H^0(M, L^{\otimes N})$ et $H_N^2(X)$ sont alors en isométrie : à toute section s de $L^{\otimes N}$, on peut associer la fonction $(m, v) \mapsto s(m) \cdot (v \otimes \dots \otimes v)$. On peut donc, en utilisant l'asymptotique du noyau de Szegő, étudier les espaces de sections de puissances tensorielles de plus en plus grandes du même fibré. Par exemple, on sait que ces derniers sont reliés aux preuves classiques du théorème de Kodaira [FG02], énonçant que toute variété complexe compacte admettant un fibré en disques fortement pseudoconvexe se plonge dans un espace projectif. On peut en fait utiliser l'asymptotique du noyau de Szegő pour redémontrer l'existence du plongement de Kodaira, ainsi que pour démontrer que ce plongement est quasi-isométrique (la preuve originelle n'utilise pas d'outils analytiques [Tia90]).

5.3 Quantification de Toeplitz

Le projecteur de Szegő équivariant permet de définir une notion de quantification sur les variétés complexes. Si h est une fonction sur M , dont le relevé sur X est toujours noté h , on peut considérer pour tout $N \geq 0$ l'opérateur autoadjoint $Q_N(h) := S_N M_h S_N$ sur l'espace $H_N(X)$. Ici, M_h représente l'opérateur de multiplication par h . Sur S^2 , la quantification des fonctions s_x, s_y, s_z définis plus haut donne bien les opérateurs S_x, S_y, S_z .

Notre projet est d'utiliser la formule de Shiffman et Zelditch pour étudier l'asymptotique du spectre de $Q_N(h)$. Cette idée n'est pas nouvelle : il existe une version de la

formule de traces asymptotiques dans ce cas [BPU98], permettant de relier le spectre de $Q_N(h)$ au voisinage d'une valeur non critique de h aux orbites périodiques du flot hamiltonien ayant cette énergie. Il paraît naturel de compléter cette étude par un examen des valeurs critiques de h . Dans le cas où la variété est de dimension 1, cette étude a été achevée récemment [LF14]. La notion de levée de dégénérescence quantique n'a cependant de sens qu'en dimension supérieure. Par ailleurs, dans le cadre Schrödinger, on dispose d'un contrôle très précis sur la taille d'un état propre dans une zone classiquement interdite (estimées d'Agmon); ces résultats utilisent l'analyticité en ξ du symbole de l'opérateur, $|\xi|^2 + V$. Ces estimées servent à leur tour à étudier les phénomènes d'effet tunnel. Dans notre cas, il pourrait être intéressant par la suite de considérer les estimées d'Agmon et l'effet tunnel lorsque h est analytique.

Références

- [BdMS75] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegő. *Journées équations aux dérivées partielles*, 34-35 :123–164, 1975.
- [Bor00] David Borthwick. Introduction to Kähler quantization. *Contemporary Mathematics*, 260 :91, 2000.
- [BPU98] David Borthwick, Thierry Paul, and Alejandro Uribe. Semiclassical spectral estimates for toeplitz operators. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 48, pages 1189–1229, 1998.
- [Del15] Alix Deleporte. Noyau de Szegő et théorème de Kodaira. Master’s thesis, Université Paris-Sud Orsay, 2015.
- [DS98] B Douçot and P Simon. A semiclassical analysis of order from disorder. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(28) :5855, 1998.
- [FG02] Klaus Fritzsche and Hans Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*. Number 213 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2002.
- [Hel88] Bernard Helffer. Semi-classical analysis for the schrödinger operator and applications. *Lecture notes in mathematics*, 1336, 1988.
- [Hör85] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*. Classics in Mathematics. Springer, 1985.
- [Hör03] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*. Reprint of the second (1990) edition. Springer, Berlin, 2003.
- [Hör07] L Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III*. Classics in Mathematics. Springer, 2007.
- [HS84] Bernard Helffer and Johannes Sjostrand. Multiple wells in the semi-classical limit I. *Communications in Partial Differential Equations*, 9(4) :337–408, 1984.
- [HS85a] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit III : Interaction through non-resonant wells. *Mathematische Nachrichten*, 124(1) :263–313, 1985.
- [HS85b] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique. II : Interaction moléculaire. symétries, perturbation. In *Annales de l’IHP Physique théorique*, volume 42, pages 127–212, 1985.

- [HS85c] Bernard Helffer and Johannes Sjöstrand. Puits multiples en mécanique semi-classique IV : étude du complexe de Witten. *Communications in partial differential equations*, 10(3) :245–340, 1985.
- [HS86] B Helffer and J Sjöstrand. Puits multiples en limite semi-classique V : Étude des minipuits. *Current topics in partial differential equations*, pages 133–186, 1986.
- [HS87] B Helffer and J Sjöstrand. Puits multiples en mécanique semi-classique VI : Cas des puits sous-variétés. In *Annales de l’IHP Physique théorique*, volume 46, pages 353–372, 1987.
- [Koh63] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 1. *Annals of mathematics*, pages 112–148, 1963.
- [Koh64] JJ Kohn. Harmonic Integrals on Strongly Pseudo-Convex Manifolds : 2. *Annals of mathematics*, pages 450–472, 1964.
- [KR65] Joseph J Kohn and Hugo Rossi. On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold. *Annals of Mathematics*, pages 451–472, 1965.
- [LF14] Yohann Le Floch. *Théorie spectrale inverse pour les opérateurs de Toeplitz 1D*. PhD thesis, Rennes 1, 2014.
- [Lie73] Elliott H Lieb. The classical limit of quantum spin systems. *Communications in Mathematical Physics*, 31(4) :327–340, 1973.
- [MM12] Xiaonan Ma and George Marinescu. Berezin-toeplitz quantization and its kernel expansion. *arXiv preprint arXiv :1203.4201*, 2012.
- [SZ02] B. Shiffman and S. Zelditch. Asymptotics of almost holomorphic sections on symplectic manifolds. 2002.
- [Tia90] Gang Tian. On a set of polarized kähler metrics on algebraic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 32(1) :99–130, 1990.
- [Zel00] S. Zelditch. Szego kernels and a theorem of Tian. 2000.
- [Zwo12] Maciej Zworski. *Semiclassical analysis*, volume 138. American Mathematical Soc., 2012.