Introduction au domaine de recherche

Elie CASBI

26 Mai 2016

Sous la direction de David HERNANDEZ
Université Paris 7

Coencadrement Nikolai RESHETIKHIN
lors d'un stage à
University California Berkeley

Table des matières

R-matrices et algèbres de Hecke carquois

1 Introduction

La théorie des représentations a pour principe de chercher à comprendre un objet mathématique en étudiant son action sur des objets élémentaires tels que des espaces vectoriels par exemple. Les fondements de cette théorie apparurent avec les représentations des groupes finis et la théorie des caractères qui en découle : on considère G un groupe fini et une action de ce groupe sur un espace vectoriel V c'est-à-dire un morphisme de groupes π de G dans le groupe des automorphismes de V. Un tel espace vectoriel V est appelé représentation de G et une telle représentation est dite irréductible ou simple s'il n'existe aucun sous-espace vectoriel non trivial W de V (c'est-à-dire non nul et non égal à V tout entier) stable par G i.e. $\forall g \in G, \forall w \in W, (\pi(g))(w) \in W$. On notera $g.v = (\pi(g))(v)$ l'action d'un élément g du groupe G sur un vecteur v de V. Enfin on appelle caractère d'une représentation de dimension finie V de G le morphisme $g \mapsto Tr(\pi(g))$. Il apparaît alors que la connaissance des représentations irréductibles permet d'obtenir une description complète de toutes les représentations de G et le morphisme de caractère caractérise le groupe G.

La notion d'irréductibilité définie ci-dessus dans le cas d'une représentation de dimension finie d'un groupe fini G renvoie en fait à la notion plus générale d'objet simple d'une catégorie. Dans le cas d'un groupe fini G, la catégorie des représentations (sur le corps $\mathbb{C}$) de dimension finie de G est semi-simple c'est-à-dire que tout objet peut se décomposer comme somme directe de représentations irréductibles. On peut ensuite s'intéresser à la situation où le groupe G est muni d'autres structures que sa seule structure de groupe et notamment de structures géométriques (groupe de Lie, groupe de Poisson-Lie, surface de Riemann par exemple) et s'interroger sur la manière dont la géométrie de G se traduit au niveau de ses représentations. Dans le cas d'un groupe de Lie, on va alors s'intéresser à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ qui lui correspond (espace tangent en l'élément neutre) : c'est un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire antisymétrique $[,]$ vérifiant de plus l'identité de Jacobi.

On commence par présenter les résultats fondamentaux concernant la classification des algèbres de Lie semi-simples de dimension finie et de leurs représentations irréductibles de dimension finie ; on donne également un aperçu de la théorie pour un certain type d'algèbre de Lie de dimension infinie, le type dit affine. Dans la section 3, on donne la définition de groupe quantique et on introduit la notion de R-matrice comme solution de l'équation de Yang-Baxter. Cette équation est à l'origine de liens étroits entre théorie des représentations et physiques statistique et/ou quantique, ce que l'on illustrera dans la section 4.

Dans la section 5 on présente le principe de la catégorification et on l'applique dans le cas des groupes quantiques ce qui nous amène à définir les algèbres de Hecke carquois. On terminera par l'évocation de constructions récentes de R-matrices pour certaines catégories de modules sur ces algèbres.

2 Algèbres de Lie et de Kac-Moody

La classification des algèbres de Lie semi-simples (voir [10]) de dimension finie et de leurs représentations simples de dimension finie a été effectuée dans la première moitié du vingtième siècle (voir par exemple [10]). Il s'agit d'associer à une telle algèbre de Lie une matrice à coefficients entiers, appelée matrice de Cartan, dont on donne la définition suivante, tirée de [4].

Définition 2.1. *On appelle matrice de Cartan une matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ à coefficients entiers satisfaisant les propriétés suivantes :*

$$\forall i \in I, a_{ii} = 2$$
$$\forall i,j \in I, a_{ij} \leqslant 0$$
$$\forall i,j \in I, a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$$

Le résultat fondamental de classification des algèbres de Lie (semi-simples) de dimension finie établit une bijection entre certaines matrices de Cartan (dites de type fini) et ces algèbres de Lie (à isomorphisme près).

Une telle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être présentée par un nombre fini de générateurs E_i,F_i,H_i vérifiant un nombre fini de relations, c'est la présentation de Serre de $\mathfrak{g}$. Par exemple l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ (qui en tant qu'espace vectoriel est l'espace des matrices complexes de taille 2 de trace nulle) est engendrée par trois générateurs E, F, H vérifiant les relations suivantes :

$$[H,E] = 2E, \qquad [H,F] = -2F, \qquad [E,F] = H.$$

Le sous-espace vectoriel engendré par les H_i est une sous-algèbre de Lie commutative de g appelée sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ notée $\mathfrak{h}$. Cette algèbre agit de façon diagonalisable sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe

$$x \in \mathfrak{g} \mapsto [x,-] \in End(\mathfrak{g})$$

où $[,]$ désigne le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$. Dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie les éléments de $\mathfrak{h}$ et en particulier les H_i agissent donc de façon simultanément diagonalisable sur $\mathfrak{g}$. Pour chaque i, on note α_i la valeur propre simultanée de $\mathfrak{h}$ pour le vecteur propre E_i.

La matrice de Cartan A est alors donnée par

$$a_{ij} = \alpha_i(H_j).$$

Les matrices de Cartan correspondant aux algèbres de Lie (semi-simples) de dimension finie sont caractérisées par la propriété d'être inversibles en plus des propriétés énoncées dans la définition ci-dessus. On obtient une classification de ces algèbres de Lie et on distingue plusieurs types : A_n, B_n, C_n, D_n, $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que F_4, G_2, E_6, E_7 et E_8.

Par exemple la matrice de Cartan de type A_2 correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_3$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition 2.2. *Pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie, on appelle algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et on note $U(\mathfrak{g})$ la plus petite algèbre associative contenant $\mathfrak{g}$. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie, $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre engendrée par les mêmes générateurs E_i,F_i,H_i vérifiant les mêmes relations mais $[x, y]$ dans $\mathfrak{g}$ est remplacé par $xy - yx$ dans $U(\mathfrak{g})$.*

Ainsi l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ est l'algèbre associative engendrée par trois générateurs E, F, H vérifiant les relations suivantes :

$$HE - EH = 2E, \qquad HF - FH = -2F \qquad EF - FE = H.$$

La notion d'algèbre enveloppante est extrêmement utile car une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un $U(\mathfrak{g})$ module; on s'intéresse donc désormais aux propriétés de la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules.

Définition 2.3. *On dit qu'un $U(\mathfrak{g})$-module V est un module de poids s'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que*

- $\forall i, E_i.v = 0$
- $U(\mathfrak{g}).v = V$
- *v est vecteur propre simultané des H_i ou de manière équivalente de tous les $h \in \mathfrak{h}$*

S'il existe, un tel vecteur v est appelé vecteur de plus haut poids de V et la valeur propre λ de l'action de $\mathfrak{h}$ sur ce vecteur est appelée poids. C'est une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$. Le poids λ est dit dominant si pour tout i, $\lambda(H_i) \geqslant 0$.

On a alors le résultat de classification des représentations simples de dimension finie de $\mathfrak{g}$:

Théorème 2.4. – *Toute représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est un module de poids et le poids correspondant est dominant.*

– *Le procédé associant un poids dominant λ à une représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est bijectif : étant donné un poids dominant λ, il existe une unique représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ dont le vecteur de plus haut poids soit vecteur propre pour la valeur propre λ de l'action de la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.*

La représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ correspondant au poids dominant λ est notée $L(\lambda)$ et peut être construite en tant que $U(\mathfrak{g})$-module, en utilisant des modules appelés modules de Verma.

On s'intéresse ensuite au cas des algèbres de Lie de dimension infinie. Plus précisément on considère une certaine classe d'algèbres de Lie de dimension infinie qui sont décrites par des matrices à coefficients entiers appelées matrices de Cartan généralisées (qui ne sont plus inversibles dans ce cas) ; ces algèbres de Lie sont appelées algèbres de Kac-Moody affines. Pour une telle algèbre $\mathfrak{g}$ on s'intéresse alors à certaines sous-catégories de la catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules pour lesquelles la classification des objets simples prend une forme analogue à la classification des représentations simples de dimension finie des algèbres de Lie de dimension finie : on retrouve les notions de poids, poids dominant et on a encore des modules simples de la forme $L(\lambda)$ que l'on peut réaliser en tant que $U(\mathfrak{g})$-modules par les mêmes constructions (basées sur les modules de Verma) qu'en dimension finie. On a par exemple la sous-catégorie des $U(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie ; mais la classification par poids et poids dominants fait intervenir d'autres sous-catégories de modules, plus vastes que celle des modules de dimension finie, comme la catégorie $\mathcal{O}$.

3 Groupes quantiques et R-matrices

Un tournant majeur pour la théorie des représentations a été l'apparition dans les années quatre-vingt de nouveaux objets obtenus par un procédé de quantification à partir d'objets classiques tels que $U(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie ou de Kac-Moody affine. Les motivations qui ont conduit à définir ces objets sont multiples, on peut notamment citer des problèmes de nature physique et plus précisément relatifs à la physique quantique et à la théorie quantique des champs. En 1985, Drinfeld et Jimbo introduisent la notion de groupe quantique associé à une algèbre de Lie ou de Kac-Moody affine $\mathfrak{g}$ (voir par exemple[3]) : on introduit un paramètre q qui dans le cadre présent sera un simple paramètre formel. Le groupe quantique associé à $\mathfrak{g}$, noté $U_q(\mathfrak{g})$, peut être vu comme une déformation quantique de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ et peut être présenté par générateurs et relations.

Par exemple le groupe quantique correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ est engendré par les générateurs E, F, K, K^{-1} vérifiant les relations suivantes :

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad KE = q^2EK, \qquad KF = q^{-2}FK$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$$

Si on écrit formellement le générateur K comme q^H , on retrouve à la limite classique $q \longrightarrow 1$ toutes les relations définissant l'algèbre enveloppante (classique) de $\mathfrak{sl}_2$.

Le théorème qui suit sera utilisé dans la section 5 pour la définition des algèbres de Hecke carquois.

Théorème 3.1. *Le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ admet une décomposition triangulaire c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$U_q(\mathfrak{g}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(\mathfrak{g})$$

où $U_q^-(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^+(\mathfrak{g})$) désigne la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par les e_i (resp. f_i) pour $i \in I$, et $U_q^0(\mathfrak{g})$ est la sous-algèbre engendrée par les $q^h, h \in \check{P}$.

La classification des représentations simples de dimension finie de $U_q(\mathfrak{g})$ pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Kac-Moody affine a été effectuée par Chari et Pressley dans [2] : à tout $U_q(\mathfrak{g})$-module simple de dimension finie M, on peut associer un n-uplet de polynômes (n désignant la taille de la matrice de Cartan (généralisée) associée à $\mathfrak{g}$) appelés polynômes de Drinfled de M dont les racines encodent l'action de $U_q(\mathfrak{g})$ sur M. Ainsi un tel n-uplet de polynômes caractérise la représentation M à isomorphisme près.

Avant de présenter la notion de R-matrice, on rappelle la définition fondamentale d'algèbre de Hopf :

Définition 3.2. *Soit A une algèbre dont on note $m : A \otimes A \to A$ le produit et $e : \mathbb{C} \to A$ l'unité. Une structure d'algèbre de Hopf sur A est la donnée de trois structures supplémentaires :*

– *un morphisme d'algèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ appelé coproduit.*

– *un morphisme d'algèbres $\epsilon : A \to \mathbb{C}$ appelé counité.*

– *un morphisme d'algèbres $S : A \to A$ appelé antipode.*

qui vérifient certaines conditions de compatibilité.

Pour une telle algèbre A, on peut alors munir naturellement le produit tensoriel de deux A-modules (qui est a priori un $A \otimes A$-module) d'une structure de A-module : pour deux A-modules V et W, on définit l'action de A sur $V \otimes W$ par

$$a \cdot (v \otimes w) := \Delta(a)(v \otimes w)$$

pour tout tenseur pur $v \otimes w$ de $V \otimes W$ et tout a dans A. Dans le membre de droite $\Delta(a)$ est un élément de $A \otimes A$ et agit donc naturellement sur $v \otimes w$.

On peut alors étudier l'existence d'homomorphismes (et/ou d'isomorphismes) de modules entre $V \otimes W$ et $W \otimes V$ pour deux A-modules V et W. Ceci amène la définition suivante :

Définition 3.3. *Etant donné pour chaque couple de A-modules (V, W) un morphisme de A-modules*

$$c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$

on dit que les $c_{V,W}$ sont des R-matrices ou des opérateurs d'entrelacement s'ils vérifient la relation de l'hexagone, c'est-à-dire si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes V \otimes W \arrow[dl, "c_{U,V}"'] \arrow[dr, "c_{V,W}"] & \\
V \otimes U \otimes W \arrow[d, "c_{U,W}"'] & & U \otimes W \otimes V \arrow[d, "c_{U,W}"] \\
V \otimes W \otimes U \arrow[dr, "c_{V,W}"'] & & W \otimes U \otimes V \arrow[dl, "c_{U,V}"] \\
& W \otimes V \otimes U &
\end{tikzcd}$$

A priori il n'y aucune raison pour que de tels morphismes existent entre tous A-modules pour A-algèbre de Hopf quelconque. Toutefois, pour certaines algèbres de Hopf, il existe un opérateur constructible directement à partir des générateurs de A (et qui ne dépend donc d'aucun A-module) qui permet de produire naturellement des R-matrices $c_{V,W}$ pour tout choix de modules (V, W). Un tel opérateur est appelé R-matrice universelle. C'est un élément de $A \otimes A$ qui, s'il existe, vérifie l'équation de Yang-Baxter :

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$$

(équation à valeurs dans $A \otimes A \otimes A$)

où par définition $\mathcal{R}_{12} := \mathcal{R} \otimes 1$, $\mathcal{R}_{23} = 1 \otimes \mathcal{R}$, et $\mathcal{R}_{13} = (id \otimes \tau)(\mathcal{R} \otimes 1)$ sont des éléments de $A \otimes A \otimes A$. cette équation est fondamentale en mathématiques comme en physique et constitue un lien entre théorie des représentations, théorie des noeuds, topologie de basse dimension, théorie quantique des champs ...Elle peut être vue comme une variante de la relation des tresses.

Si une telle R-matrice universelle existe dans le carré tensoriel $A \otimes A$, alors on en déduit naturellement des opérateurs d'entrelacement : étant donnés deux A-modules V et W arbitraires, on définit l'homomorphisme de A-modules suivant entre $V \otimes W$ et $W \otimes V$:

$$\begin{aligned} c_{V,W} : V \otimes W &\longrightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\longmapsto \tau(\mathcal{R}.(v \otimes w)) \end{aligned}$$

où ici τ désigne le morphisme de A-modules de $V \otimes W$ dans $W \otimes V$ qui envoie un tenseur pur $v \otimes w$ sur $w \otimes v$.

Le fait que la R-matrice universelle $\mathcal{R}$ soit solution de l'équation de Yang-Baxter implique directement que les opérateurs $c_{V,W}$ ainsi définis vérifient la relation de l'hexagone.

On peut munir le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf, en définissant explicitement un coproduit, une counité et une antipode par leur action sur les générateurs de $U_q(\mathfrak{g})$. Tout ce qui précède est donc valable dans le cas du groupe quantique $A = U_q(\mathfrak{g})$, mais il n'existe a priori pas de R-matrice universelle dans le carré tensoriel $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$. Dans le cas particulier où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie, cette R-matrice universelle existe bien dans ce carré tensoriel et se spécialise sur les produits tensoriels de $U_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie et on obtient des opérateurs d'entrelacements dans la catégorie des $U_q(\mathfrak{g})$-modules de dimension finie. De plus, cette R-matrice universelle est inversible dans $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ et les opérateurs d'entrelacement $c_{V,W}$ qui en découlent sont des isomorphismes de modules. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody affine, on a l'existence d'une R-matrice universelle, mais seulement dans une complétion du produit tensoriel $U_q(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$. Elle n'est alors plus inversible est les $c_{V,W}$ ne sont pas des isomorphismes.

4 Motivations physiques à l'étude des R-matrices

Les R-matrices pour la catégorie des représentations de dimension finie des algèbres affines quantiques donnent la possibilité d'éclairer des problématiques de nature physique grâce à des concepts et des résultats de théorie des représentations. C'est le cas notamment en ce qui concerne l'étude de certains systèmes de physique statistique et/ou de physique quantique tels que le modèle XXZ de Heisenberg quantique (qui modélise des chaînes de spin magnétiques) ou du modèle à 6 sommets (modélisant des cristaux de glace) représenté par un quadrillage tel que chaque sommet est la source de deux arêtes orientées et est le but de deux autres. On peut plus généralement considérer des systèmes quantiques représentés par des réseaux bidimensionnels de taille $M \times N$; la fonction de partition Z d'un tel système s'écrit

$$Z = Tr(\prod_{i=1}^{M} T(i))$$

où pour chaque ligne i ($1 \leqslant i \leqslant M$) du réseau, $T(i)$ est un opérateur appelé matrice de transfert. La détermination du spectre de la fonction de partition Z du système se ramène donc à la diagonalisation de ces matrices de transfert.

Dans [1], Baxter donne une expression des valeurs propres d'une matrice de transfert pour le système à 8 sommets (système proche du système à 6 sommets) et trouve que ces valeurs propres prennent la forme remarquable suivante :

$$A(z)\frac{Q(zq^2)}{Q(z)} + D(z)\frac{Q(zq^{-2})}{Q(z)}$$

où z et q sont des paramètres du système considéré, $Q(z)$ est une fonction polynomiale et $A(z)$ et $D(z)$ sont des fonctions qui sont les mêmes pour toutes les valeurs propres de la matrice de transfert considérée.

Le théorème qui suit montre que la résolution de l'équation de Yang-Baxter aboutit à la diagonalisation des matrices de transfert :

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{R}$ la R-matrice universelle pour le groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Kac-Moody (affine non tordue, voir [4]), V une représentation simple de dimension 2 de $U_q(\mathfrak{g})$. On définit pour un paramètre formel z*

$$T_V(z) := Tr_V((\pi_{V(z)} \otimes id)(\mathcal{R})) \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})[|z|]$$

$V(z)$ désigne le twist de la représentation V par le paramètre spectral z.

Alors étant données deux telles représentations V et V' et deux tels paramètres spectraux z et z' , les opérateurs $T_V(z)$ et $T_{V'}(z')$ commutent.

On obtient une famille commutative d'opérateurs agissant sur toute représentation de dimension finie W de $U_q(\mathfrak{g})$. Il apparaît alors que pour un choix judicieux de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, en prenant pour W le produit tensoriel de N représentations de dimension 2, les opérateurs $T_V(z)$ agissant sur W redonnent exactement les matrices de transfert $T(i)$ considérées plus haut. On peut alors les diagonaliser simultanément et ainsi obtenir le spectre de la fonction de partition Z .

5 Catégorification et algèbres de Hecke carquois

On commence par rappeler les définitions de décomposition de Jordan-Hölder d'un module, ainsi que celles de groupe et d'anneau de Grothendieck d'une catégorie :

Définition 5.1. *Soit R un anneau et M un R-module. On dit que M admet une décomposition de Jordan-Hölder s'il existe une suite finie décroissante $M = M_0 \supset M_1 \supset ... \supset M_k = 0$ de sous-modules de M telle que pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, le quotient M_{i-1}/M_i est un module simple.*

Définition 5.2 (Anneau de Grothendieck)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne monoidale telle que tous les objets de $\mathcal{C}$ admettent une décomposition de Jordan-Hölder. Pour tout objet V de $\mathcal{C}$ on désignera par $[V]$ sa classe d'isomorphisme dans $\mathcal{C}$.*

- *Le groupe de Grothendieck de C est par définition le quotient de $\bigoplus_{V\in\mathcal{C}} \mathbb{Z}[V]$ par les relations $[V_2] = [V_1] + [V_3]$ si et seulement si il existe une suite exacte courte $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ dans $\mathcal{C}$. La structure de groupe est donnée apr $[V] + [W] = [V \oplus W]$.*
- *On peut le munir d'une structure d'anneau en posant $[V]\cdot[W] = [V \otimes W]$*

On notera $K(\mathcal{C})$ l'anneau de Grothendieck d'une catégorie $\mathcal{C}$.

Le principe de la catégorification est de réaliser un anneau donné A comme anneau de Grothendieck d'une catégorie $\mathcal{C}$; ceci présente un intérêt particulier lorsque l'on parvient à catégorifier A par une catégorie de modules sur une algèbre c'est-à-dire que l'on a

$$A = K(\mathcal{C})$$

tel que $\mathcal{C}$ soit une sous-catégorie de la catégorie des modules d'une certaine algèbre R. On peut alors espérer obtenir des informations sur l'anneau de départ A en étudiant la structure et les propriétés de l'algèbre R.

Cette méthode de catégorification est l'une des raisons d'être des algèbres de Hecke carquois (ou algèbres KLR) introduites dans [8] par Khovanov-Lauda et indépendamment par Rouquier dans [9].

On rappelle auparavant la définition de module projectif sur un anneau R :

Définition 5.3. *Soit R un anneau. Un R-module (à gauche) P est projectif si pour touts R-modules N et M tels qu'il existe un morphisme de R-modules surjectif $f : N \to M$ et tout morphisme de R-modules $g : P \to M$, il existe un morphisme de R-modules $h : P \to N$ tel que $g = fh$ c'est-à-dire tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, "\exists h"] \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

Autrement dit, pour tout R-module N, tout morphisme de R-modules de P vers un quotient de N se factorise par N.

De manière équivalente, un R-module P est projectif si et seulement si c'est un objet projectif dans la catégorie des R-modules c'est-à-dire si le foncteur $Hom(P, -)$ est exact dans la catégorie des R-modules : si on a une suite exacte courte de R-modules

$$0 \to L \to N \to M \to 0,$$

alors on a une suite exacte courte de R-modules

$$0 \to Hom(P, L) \to Hom(P, N) \to Hom(P, M) \to 0.$$

On peut à présent introduire les définitions et propriétés fondamentales des algèbres KLR :

Théorème 5.4 (Khovanov-Lauda, Rouquier). *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody, $U_q(\mathfrak{g})$ le groupe quantique associé. La matrice de Cartan (généralisée) associée à $\mathfrak{g}$ est une matrice de taille $n \geqslant 1$. Soient $Q := \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{Z}_i$ un réseau de taille n et $Q_+ := \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{Z}_{\geqslant 0}i$ (les e_i peuvent être considérés comme de simples éléments formels)*

Alors il existe une famille d'algèbres $\{R(\beta)\}_{\beta\in Q_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout β, l'algèbre $R(\beta)$ peut être munie d'une $\mathbb{Z}$-graduation.

(ii) Ceci implique pour tout β l'existence naturelle d'un foncteur shift pour la catégorie $R(\beta) - pmod$ des $R(\beta)$-modules projectifs de type fini : un objet M de cette catégorie peut se décomposer en composantes graduées $M = \bigoplus_n M_n$ et le foncteur shift est donné par

$$M \mapsto qM := \bigoplus_n (qM)_n$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(qM)_n = M_{n-1}$.

(iii) Pour tous β, γ, on peut définir un produit de convolution $\circ$ entre un $R(\beta)$-module M et un $R(\gamma)$-module N et produire ainsi un $R(\beta+\gamma)$-module $M \circ N$. Ceci confère à la catégorie

$$R - pmod := \bigoplus_\beta R(\beta) - pmod$$

une structure de catégorie monoidale.

(iv) Le foncteur shift induit une structure de $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-algèbre sur l'anneau de Grothendieck de la catégorie $R - pmod$ par $q \cdot [M] = [qM]$.

(v) $R - pmod$ catégorifie la partie négative du groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$:

$$U_q(\mathfrak{g})^- \simeq \mathbb{Q}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} K(R - pmod)$$

Exemple : cas $n = 1$. Dans le cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, on a $Q_+ = \{m.i, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$. Pour m entier naturel non nul fixé, l'algèbre KLR $R(m.i)$ coïncide avec l'algèbre de Hecke affine d'ordre m.

En effet cette algèbre peut être réalisée comme la sous-algèbre de l'algèbre des endomorphismes de l'anneau de polynômes $k[X_1, ..., X_m]$ (pour un corps de base fixé k) engendrée par les opérateurs x_i et τ_j suivants :

$$x_i : P \in k[X_1, ..., X_m] \longmapsto X_i P$$

$$\tau_j : P \in k[X_1, ..., X_m] \longmapsto \frac{P - s_i P}{X_i - X_{i+1}}$$

où pour $P = P(X_1, ..., X_m) \in k[X_1, ..., X_m]$, $s_i P$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant X_i par X_{i+1} et vice versa dans P.

L'existence d'une telle réalisation de l'algèbre de Hecke carquois $R(m.i)$ comme algèbre d'endomorphismes sur un espace de polynômes n'est pas spécifique au cas $n = 1$. Dans [8], Khovanov-Lauda construisent de telles représentations polynomiales pour toutes les algèbres de Hecke carquois.

Dans [11] Varagnolo et Vasserot utilisent ces représentations polynomiales pour réaliser géométriquement les algèbres de Hecke carquois en utilisant des catégories de faisceaux sur des variétés drapeaux carquois. Par ailleurs, cette construction géométrique leur permet de résoudre positivement une conjecture formulée par Khovanov et Lauda dans [8] stipulant une correspondance bijective entre classes d'isomorphismes de certains modules simples sur les algèbres KLR et les éléments de la base canonique du groupe quantique correspondant à la même donnée de Cartan (voir [11]).

Dans une série de récents articles ([7], [6], [5]) Kang Kashiwara Kim et Oh définissent des opérateurs d'entrelacement dans la catégorie $R-pmod$ introduite plus haut. Etant donnés deux objets M et N de cette catégorie, ils définissent un opérateur

$$r_{M,N} : M \circ N \longrightarrow N \circ M$$

et montrent que ces opérateurs satisfont la relation de l'hexagone ; par conséquent ce sont des opérateurs d'entrelacement.

Toutefois il est important de noter que contrairement au cas des catégories de représentations de dimension finie sur les groupes quantiques, il n'existe a priori pas de R- matrice universelle dans le cas des algèbres KLR : on a simplement des opérateurs d'entrelacement $r_{M,N}$ pour chaque choix de modules M et N mais pas de solution de l'équation de Yang-Baxter $\mathcal{R}$ vivant dans un produit tensoriel d' algèbres de Hecke carquois et redonnant les $r_{M,N}$ après spécialisation sur $M \circ N$.

Références

[1] R.J. Baxter. Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model. *Ann.Phys.*, 70 :193–228, 1971.

[2] V. Chari and A. Pressley. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[3] V. Drinfeld. A new realization of Yangians and of quantum affine algebras. *Soviet Math. Dokl.*, 36 :212–216, 1988.

[4] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[5] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh. Monoidal categorification of cluster algebras, December 2014. arXiv 1412.8106v1.

[6] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh. Simplicity of heads and socles of tensor products. *Compos.Math.*, 151(no.2) :377–396, 2015.

[7] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 111(no.2) :420–444, 2015.

[8] M. Khovanov and A. D. Lauda. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I. *Represent. Theory*, 13 :309–347, 2009.

[9] R. Rouquier. Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras. *Algebra Colloq.*, 19(no.2) :359–410, 2012.

[10] Jean-Pierre Serre. Lie algebras and Lie groups. 1964 lectures given at Harvard University, Lecture Notes in Mathematics, 1500, 2006.

[11] M. Varagnolo and E. Vasserot. Canonical bases and KLR algebras. *J. reine angew. Math.*, 659 :67–100, 2011.