ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Introduction au domaine de recherche

Problème isopérimétrique avec une énergie répulsive non locale et un potentiel extérieur

François Générau

Encadrant de Master 2 : Vincent Millot

28 octobre 2016

Table des matières

1 Introduction au domaine de recherche

1.1 Introduction

Commençons par introduire intuitivement la notion de périmètre et de problème isopérimétrique. Étant donné un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ (imaginer par exemple une brave variété à bord de dimension n, telle une boule, une patate, un lapin ou un Barbapapa), on appelle *périmètre* de E et on note $P(E)$ la mesure $(n-1)$-dimensionnelle de son "contour" (pour une variété à bord, le "contour" est tout simplement son bord). Dans la droite $\mathbb{R}$, c'est le nombre de points au bord de E. Il vaut donc 2 pour un intervalle et 4 pour la réunion disjointe de deux intervalles. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, il s'agit de la notion habituelle de périmètre : la longueur du contour d'un ensemble. Il vaut donc par exemple $2\pi R$ pour un disque de rayon R. Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, cela correspond plutôt à ce que l'on appellerait classiquement la "surface" d'une forme. Le périmètre d'une boule de rayon R vaut donc $4\pi R^2$. Pour un ensemble quelconque, la notion de "contour" reste bien sûr très floue, mais mentionnons par exemple qu'il est vide pour un ensemble "plat", c'est-à-dire de dimension au plus $(n-1)$. Le périmètre d'une hypersurface est donc toujours nul.

Le problème isopérimétrique classique consiste en la question suivante : parmi les ensembles d'un volume donné, quels sont ceux qui ont un périmètre le plus petit ? Ou bien formulé de manière équivalente : parmi les ensembles de périmètre donné, quels sont ceux qui ont un volume le plus grand ? La réponse à cette question est bien connue, mais laissons planer un peu le suspense. La réponse est donnée en dimension 3 par l'observation des bulles de savon. En effet l'énergie potentielle d'une bulle de savon pas trop grande est proportionnelle à son aire. En cherchant à minimiser son énergie potentielle, la bulle de savon minimise donc son périmètre !
Force est de constater que les petites bulles de savons sont sphériques, et que la forme optimale pour le problème isopérimétrique doit donc être la boule. Il faudra cependant attendre la fin du 19e siècle pour les premières démonstrations rigoureuses en dimension 2 et 3. Jakob Steiner utilise ce que l'on appelle désormais la *symétrisation de Steiner* pour démontrer que si

FIGURE 1 – Des bulles de savon bien sphériques

une forme optimale existe, c'est nécessairement la boule (le disque en dimension 2), mais il faut attendre encore un peu plus longtemps pour avoir une preuve de l'existence d'une forme optimale. Notons que la solution du problème isopérimétrique peut se résumer par l'inégalité suivante, dite *inégalité isopérimétrique* :

Théorème 1.1 (Inégalité isopérimétrique)**.** *Pour tout $n \geq 2$, pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, on a l'inégalité suivante :*

$$P(E) \geq \left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{n-1}{n}} P(B), \tag{1.1}$$

où B désigne la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $|E|$ le volume de E.

Nous donnerons dans la partie suivante les idées d'une preuve de cette inégalité, reposant sur la symétrisation de Steiner. En 2008, Figalli et Maggi prouvent en utilisant des techniques de symétrisation une version quantitative de l'inégalité isopérimétrique, qui peut s'énoncer comme suit :

Théorème 1.2. *Pour tout $n \geq 2$, il existe une constante $C(n) > 0$ telle que pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ de volume $|E| = |B|$, l'inégalité suivante soit vérifiée :*

$$P(E) \geq P(B)\left(1 + C(n)A(E)^2\right), \tag{1.2}$$

où $A(E)$ est la distance de E à l'ensemble des boules de même volume, et constitue donc une mesure de l'asymétrie de E :

$$A(E) := \inf\{\frac{|E\Delta(x+B)|}{|E|} : x \in \mathbb{R}^n\}$$

.

Les extensions plus ou moins proches du problème isopérimétrique sont nombreuses et font encore l'objet de recherche active. Par exemple, la question a été et continue d'être étudiée non pas dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, mais dans les variétés riemanniennes, et même dans les espaces métriques mesurés (voir par exemple l'article [9]). Mentionnons également le périmètre anisotropique, qui est une généralisation de la notion de périmètre et qui intervient notamment dans la modélisation de certains cristaux, et pour lequel la première inégalité isopérimétrique a été obtenue en 1978 par J.E Taylor, et une version quantitative en 2010 par Figalli, Maggi et Pratelli grâce à des méthodes de transport optimal. Le troisième exemple est celui qui nous intéressera particulièrement. Il s'agit du modèle de Gamow du noyau, qui consiste en le problème de minimisation suivant :

$$\inf_{E\subset\mathbb{R}^n,|E|=m} P(E)+\mathcal{V}_\alpha(E),$$

où $m>0$ et $\mathcal{V}_\alpha(E)$ désigne le potentiel de Riesz de E :

$$\mathcal{V}_\alpha(E)=\int_{E\times E}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}},\quad \alpha\in(0,n).$$

Si $n=3$ et $\alpha=2$, le potentiel de Riesz n'est rien d'autre qu'un potentiel électrostatique de Coulomb sur un ensemble uniformément chargé. Remarquons que sans ce second terme, ce problème de minimisation est exactement le problème isopérimétrique initial. Nous reviendrons plus en détail sur ce problème dans la partie 1.5.

1.2 Définition du périmètre

En suivant [8], on définit le périmètre comme suit :

Définition 1.3. *Pour E sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ on définit le périmètre de E par*

$$P(E):=\sup\{\int_E \operatorname{div}T(x)\mathrm{d}x : T\in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \|T\|_\infty\le 1\}.$$

Remarque 1.4. Pour E ouvert C^1, cela s'écrit encore d'après la formule de Gauss-Green :

$$P(E)=\sup\{\int_{\partial E} T\cdot\nu_E\mathrm{d}\sigma : T\in C_c^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \|T\|_\infty\le 1\},$$

où ν_E désigne la normale extérieure à E et σ la mesure de surface sur ∂E. On obtient donc $P(E)=\sigma(E)$, et le périmètre correspond bien à la mesure de l'aire du bord de E.

Remarque 1.5. Le périmètre reste inchangé si on modifie E par un ensemble de mesure de Lebesgue nul. En particulier le périmètre d'un ensemble de mesure nulle est nul. De plus, le périmètre n'a rien à voir avec une quelconque mesure du bord topologique de E. En effet E peut être de mesure nulle (et donc avoir un périmètre nul) tout en ayant un bord topologique égal à tout l'espace !

Le format de cette introduction au problème isopérimétrique ne permet pas de rentrer dans les détails de la machinerie des ensembles de périmètre fini. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux livres de Giusti [4], ou de Maggi [8] par exemple. Pour démontrer l'existence d'un minimiseur dans un problème variationnel faisant intervenir le périmètre, nous avons généralement besoin des deux résultats suivants. Le premier est un théorème de compacité pour les ensembles de périmètre fini. Il provient essentiellement du théorème de compacité de Rellich-Kondrachov. Le second est un théorème de semi-continuité inférieure du périmètre. Celui-ci se démontre de manière élémentaire à partir de la définition du périmètre.

Théorème 1.6 (compacité). *Si (E_k) est une suite de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ tels que*

$$\sup_k P(E_k) < \infty \quad et \quad \sup_k |E_k| < \infty,$$

alors il existe une sous-suite de (E_k) qui converge en mesure vers un ensemble mesurable E(c'est-à-dire que les fonctions caractéristiques convergent dans $L^1(\mathbb{R}^n)$).

Théorème 1.7 (semi-continuité inférieure). *Si (E_k) est une suite de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$ qui converge localement en mesure vers un ensemble mesurable E (c'est-à-dire que les fonctions caractéristiques convergent dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$), alors*

$$P(E) \leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k).$$

Voici comment utiliser ces deux théorèmes pour obtenir l'existence d'un minimiseur, par le procédé classique de la *méthode directe*. Imaginons que nous cherchions à minimiser le périmètre sous la contrainte de contenir un ensemble donné. Précisément, étant donné un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ borné, on cherche un minimiseur du problème variationnel suivant :

$$\rho = \inf\{P(E) : F \subset E\}.$$

Tout d'abord, F étant borné on a $\rho \leq P(B_R)$ pour $R > 0$ suffisamment grand, donc $\rho < \infty$. On peut donc prendre une suite (E_k) dite *minimisante*, *i.e* telle que $\lim P(E_k) = \rho$, $F \subset E_k$, et $P(E_k) \leq P(B_R)$. D'après le théorème de compacité, à extraction près la suite converge en mesure vers une limite E, et d'après le théorème de semi-continuité on a alors $P(E) \leq \liminf P(E_k) = \rho$. Il ne reste plus qu'à vérifier que E vérifie également la contrainte $F \subset E$ pour conclure que E est bien un minimiseur du problème.

1.3 Symétrisation de Steiner et inégalité isopérimétrique

L'outil fondamental dans la preuve historique de l'inégalité isopérimétrique est la symétrisation de Steiner. Ce qu'il manquait à Steiner pour fournir une preuve complète, c'est l'existence d'une forme optimale, mais celle-ci vient facilement dans le cadre des ensembles de périmètre fini.

Définition 1.8. *Soit E une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note x' et x_n les éléments de $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\mathbb{R}$ tels que $x = (x', x_n)$, et on définit $E_{x'} \subset \mathbb{R}$ la coupe verticale de E au dessus du point x' par*

$$E_{x'} = \{x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in E\}.$$

Le symétrisé de Steiner de E par rapport à l'hyperplan $\{x_n = 0\}$ est alors l'ensemble E^s défini par

$$E^s = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leq \frac{|E_{x'}|}{2}\}.$$

Remarque 1.9. Pour $\nu \in S^{n-1}$, on définit le symétrisé de Steiner de E par rapport à l'hyperplan $\nu^\perp$ en prenant une base orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $e_n = \nu$ et en posant $E^s_\nu = E^s$.

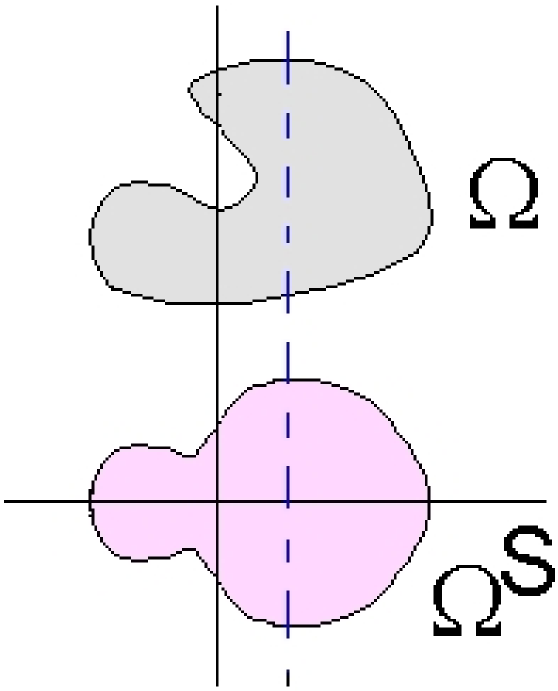

FIGURE 2 – Symétrisation de Steiner

L'intérêt de cette symétrisation réside dans le théorème suivant :

Théorème 1.10 (Inégalité de Steiner)**.** *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ de périmètre et volume finis. Alors on a*

$$P(E^s) \leq P(E).$$

De plus,

(i) s'il y a égalité, alors pour presque tout $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, la coupe verticale $E_{x'}$ est équivalente (pour la mesure de lebesgue) à un intervalle,

(ii) si E est convexe, alors il y a égalité si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $E = E^s + ce_n$.

Donnons maintenant les idées de la preuve de l'inégalité isopérimétrique :

Idées de la preuve de l'inégalité isopérimétrique. En utilisant la méthode directe présentée ci-dessus, on obtient un minimiseur E du problème isopérimétrique sous contrainte suivant :

$$\inf\{P(F) : F \subset B_R, |F| = |B|\}, \tag{1.3}$$

où B_R désigne la boule de rayon $R > 1$. On prouve alors que E est équivalent (au sens de la mesure) à la boule unité B. D'après l'inégalité de Steiner on a pour tout $\nu \in S^{n-1}$, $P(E^s_\nu) \leq P(E)$. Mais comme E est un minimiseur dans (1.3), on a aussi $P(E) \leq P(E^s_\nu)$. D'après le théorème précédent on conclut que pour presque tout $x \in \nu^\perp$, la coupe

$$\{s \in \mathbb{R} : x + s\nu \in E\} \quad \text{est équivalente à un segment.}$$

Comme c'est vrai dans toutes les directions $\nu \in S^{n-1}$, on en déduit que E est convexe. Toujours d'après le théorème précédent, il existe alors $c_\nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$E = c_\nu \nu + E^s_\nu.$$

Posons alors $F := -(c_1e_1 + ... + c_ne_n) + E$. Montrons que F est invariant par isométrie. Pour toute direction ν, comme F est convexe et $P(F^s_\nu) = P(F)$, il existe $d_\nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$F = d_\nu \nu + F^s_\nu.$$

Mais par construction F est invariant par symétrie par rapport à tous les hyperplans $\{x_k = 0\}$, et donc par symétrie par rapport à l'origine $x \to -x$. Ceci implique $d_\nu = 0$, et donc F est symétrique par rapport à tous les hyperplans vectoriels, donc invariant par isométrie. Comme c'est un convexe, c'est la boule.

Ainsi pour tout ensemble borné E de volume $|E| = |B|$, on a

$$P(E) \geq P(B),$$

avec égalité si et seulement si E est équivalent à la boule B. Il ne reste rien de bien compliqué pour obtenir la même propriété pour les ensembles non bornés... $\square$

1.4 Régularité des quasi-minimiseurs

Une question naturelle dans les problèmes de minimisation est celle de la régularité des solutions. En effet, avec la machinerie des ensembles de périmètres finis, il est parfois possible d'appliquer la méthode directe pour trouver des minimiseurs d'une fonctionnelle faisant intervenir le périmètre. Mais les minimiseurs trouvés sont seulement des ensembles de périmètres finis, alors qu'on espèrerait souvent de jolis formes telles des ouvert C^1. La question est donc la suivante : quelle est la régularité des minimiseurs ? Sont-ce des ouverts à bord Lipschitz ? C^1 ? C^∞ ? Ce genre de problème a été très étudié pour le problème de Plateau : étant donné un lacet dans $\mathbb{R}^3$, existe-t-il une surface d'aire minimale ayant pour bord ce lacet ? Ce problème porte le nom du physicien Joseph Plateau, qui s'intéressait aux films de savons, car ceux-ci minimisent leur aire.

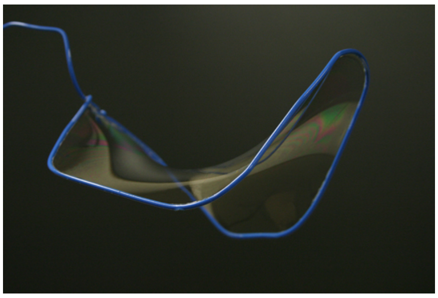

FIGURE 3 – Un film de savon qui minimise son aire, comme tous les autres.

Douglas et Radó apportèrent indépendemment une réponse positive à la question dans les années 1930 en dimension 3, mais la question restait ouverte en dimension supérieure. Elle est résolue indépendamment par Federer et Flemming avec la *théorie des courants*, et par le mathématicien italien Ennio de Giorgi grâce à sa théorie des ensembles de périmètre fini. On hérite notamment de ses travaux des théorèmes difficiles sur la régularité des surfaces minimales (les surfaces qui minimisent localement leur aire) et, ce qui nous intéresse particulièrement, des quasi-minimiseurs du périmètre.

Définition 1.11. *Etant donné $\Lambda > 0$, on dit qu'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ est un Λ-minimiseur si pour tout ensemble mesurable $F \subset \mathbb{R}^n$, on a*

$$P(E) \leq P(F) + \Lambda |E \Delta F| .$$

On a par exemple le théorème suivant (voir [8, Theorem 26.5]) :

Théorème 1.12. *Si E est un Λ-minimiseur, alors à un ensemble de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ nulle près, son bord est une hypersurface $C^{1,\gamma}$ pour tout $\gamma \in (0, 1/2)$.*

Comme la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-1}$ est une mesure l'aire $(n-1)$-dimensionnelle d'une hypersurface, cela signifie que du point de vue du périmètre, le bord de E est localement le graphe d'une fonction $C^{1,\gamma}$. Mentionnons sans entrer dans les détails, qu'une fois obtenu que le bord de$E$ est un graphe, il est fréquemment plus facile d'obtenir de la régularité supérieure en exploitant l'équation d'Euler-Lagrange du problème et les théorèmes de régularité des équations aux dérivées partielles (qui peuvent, eux, être hautement non triviaux).

Avant d'énoncer le théorème suivant, qui sera d'une grande utilité dans la suite, introduisons les ensembles *quasi-sphériques*.

Définition 1.13. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit quasi-sphérique si son bord est le graphe d'une fonction C^1 au dessus de la sphère, c'est à dire qu'il existe une fonction $u \in C^1(\partial B)$ telle que*

$$\partial E = \{(1+u(x))x : x \in \partial B\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.14. *Si (E_k) est une suite de Λ-minimiseurs, avec $\Lambda > 0$ indépendant de k, et si*

$$|E_k \Delta B| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors les E_k sont quasi-sphériques (à partir d'un certain rang), et les fonctions u_k associées vérifient

$$\|u_k\|_{C^1(\partial B)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.5 Un problème isopérimétrique avec potentiel de Riesz

Fort des outils que nous avons introduits, passons à l'étude du problème de minimisation sous contrainte de volume suivant :

$$\inf_{E\subset\mathbb{R}^n, |E|=m} \mathcal{F}(E) = P(E) + \mathcal{V}_\alpha(E), \tag{1.4}$$

où $m > 0$ est appelé la *masse* et $\mathcal{V}_\alpha(E)$ désigne le potentiel de Riesz de E :

$$\mathcal{V}_\alpha(E) = \int_{E\times E} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^{n-\alpha}}, \quad \alpha \in (0, n).$$

Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs (voir [2], [5], [6], [1] par exemple) jusque récemment et plusieurs questions restent encore ouvertes. Nous allons présenter certaines des questions étudiées, et des questions encore ouvertes.

Remarquons que d'après l'inégalité isopérimétrique, la boule minimise la fonctionnelle $\mathcal{F}$ à volume fixé. Cependant c'est exactement l'inverse pour le potentiel de Riesz, qui tend plutôt à éparpiller la masse autant que possible, et qui est maximisé par la boule. Notons aussi que le potentiel de Riesz n'admet pas de minimiseur, car son infimum est nul. Deux questions naturelles se posent alors :

– Le problème (1.4) admet-il un minimiseur ?
– Le(s) minimiseur(s), s'il existe, est-il une boule ?

La réponse à ces des questions dépend de la masse m à laquelle on minimise la fonctionnelle $\mathcal{F}$!

Un peu d'heuristique : pour $\lambda > 0$, on a

$$P(\lambda E) = \lambda^{n-1} P(E) \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\alpha(\lambda E) = \lambda^{n+\alpha} \mathcal{V}_\alpha(E).$$

Ainsi,

$$\text{quand} \quad \lambda \to 0, \ \mathcal{F}(\lambda E) \sim P(\lambda E),$$

et

$$\text{quand} \quad \lambda \to \infty, \ \mathcal{F}(\lambda E) \sim \mathcal{V}_\alpha(\lambda E).$$

Si on croit en notre bonne étoile, on peut donc s'attendre à ce que pour les petites masses m, le terme prépondérant soit le périmètre, et donc qu'il y ait un minimiseur et que celui-ci soit proche d'une boule, et que pour les grandes masses m il n'y ait pas de minimiseur. C'est exactement ce qui se passe, et on a même :

Théorème 1.15. *(i) Il existe une masse $m_0 = m_0(n, \alpha) > 0$ telle que pour toute masse $m < m_0$ le problème* (1.4) *admette la boule de volume m comme unique minimiseur.*

(ii) Si $\alpha \in (n-2, n)$, alors il existe une masse $m_1 = m_1(n, \alpha)$ telle que pour tout masse $m > m_1$ le problème (1.4) *n'admet pas de minimiseur.*

Le point 1.5 a été obtenu en toute généralité et dans le cadre plus large du périmètre fractionnaire par Figalli, Fusco, Maggi, Millot et Morini (voir [2]). Il avait déjà été obtenu par d'autres auteurs pour le périmètre classique avec des restrictions sur les paramètres (voir [5], [6] et [1]. Le point (ii) a été prouvé par Knupfer et Muratov dans [6], mais aussi par d'autres auteurs avec des méthodes différentes dans [3] et [7]. Nous allons donner les idées de la preuve du point qui est faite dans [2]. On a besoin :

– du package (compacité+semi-continuité) pour prouver l'existence d'un minimiseur pour les petites masses,
– de l'inégalité isopérimétrique quantitative pour prouver que les petits minimiseurs sont asymptotiquement proche de la boule en mesure,
– de la théorie de la régularité pour les Λ-minimiseurs pour montrer que les petits minimiseurs sont en fait quasi sphériques et proche de la boule en norme C^1,
– d'une estimation explicite de la fonctionnelle $\mathcal{F}$ pour les ensembles quasi-sphériques.

Idées de la preuve du théorème 1.15. On commence par faire un changement d'échelle : étant donné $E \subset \mathbb{R}^n$ mesurable, on pose

$$\gamma = \left(\frac{m}{|B|}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad E_* = \frac{1}{\gamma}E.$$

On a alors $|E_*| = |B|$ et

$$\mathcal{F}(E) = \gamma^{n-1}\left(P(E_*) + \gamma^{1+\alpha}\mathcal{V}_\alpha(E_*)\right).$$

Pour démontrer le point 1.5, il est donc équivalent de montrer que pour $\eta > 0$ assez petit, la boule unité B est l'unique minimiseur de

$$\inf_{|E|=|B|} \mathcal{F}_\eta(E) := P(E) + \eta\mathcal{V}_\alpha(E).$$

Étape 1 : Ce qui nous empêche d'appliquer la méthode directe, c'est la contrainte de volume $|E| = |B|$. En effet si (E_k) est une suite minimisante, on peut quitte à extraire supposer qu'elle converge vers un ensemble F, et celui ci vérifiera alors

$$P(F) + \eta\mathcal{V}_\alpha(F) = \inf_{|E|=|B|} P(E) + \eta\mathcal{V}_\alpha(E),$$

mais rien ne garantit que $|E| = |B|$. Une partie de la masse de E_k peut en effet s'échapper à l'infini, auquel cas on aurait $|E| < |B|$. Remarquons que l'on peut supposer $\mathcal{F}_\eta(E_k) \leq \mathcal{F}_\eta(B)$ (car la suite est minimisante), et donc que si η a été pris petit, $P(E_k)$ doit être proche de $P(B)$. D'après l'inégalité isopérimétrique quantitative, cela implique que E_k doit être proche de la boule unité (à translation près) en mesure. On utilise alors un lemme de troncature (voir [8, lemma 29.12]) qui fournit l'existence d'un rayon $r_k \in [1, 2]$ tel que

$$P(E_k \cap B_{r_k}) \leq P(E_k) - \frac{E_k \setminus B_{r_k}}{C(n)\,|E_k \Delta B|^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant cette inégalité, on montre que l'on peut en fait supposer $E_k \subset B_2$, et donc que la masse de E_k ne peut pas s'échapper à l'infini. On a donc l'existence d'un minimiseur pour tout masse suffisamment petite.

Étape 2 : On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite (η_k) qui converge vers 0, et une suite de minimiseurs (E_k) de $\mathcal{F}_{\eta_k}$ de volume $|B|$, telle que pour tout k

$$A(E_k) := \inf\{\frac{|E_k \Delta (x + B)|}{|E_k|} : x \in \mathbb{R}^n\} > 0.$$

On utilise l'inégalité isopérimétrique quantitative une nouvelle fois, ainsi que l'inégalité $\mathcal{F}_{\eta_k}(E_k) \leq F_{\eta_k}(B)$ pour montrer que, quitte à translater les E_k,

$$|E_k \Delta B| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Étape 3 : on montre que les E_k sont uniformément des Λ-minimiseurs du périmètre. Cela vient essentiellement du fait que les E_k sont des minimiseurs de $P+\eta\mathcal{V}_\alpha$, et que la fonctionnelle $\mathcal{V}_\alpha$ est localement lipschitz. On en conclut grâce au théorème de régularité présenté dans la section précédente que les E_k sont des ensembles quasi-sphériques dont le bord converge en norme C^1 vers la sphère.

Étape 4 : Étant donné un ensemble quasi sphérique E dont le bord est donné par le graphe d'une fonction $u \in C^1(\partial B)$, on peut écrire explicitement la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\eta_k}$ à l'aide d'intégrales faisant intervenir la fonction u, et faire des développements limités pour $\|u\|_{C^1(\partial B)}$ petit. Ces calculs montrent que la boule est l'unique minimiseur parmi les ensembles quasi-sphériques suffisamment proches, et la preuve est terminée. □

Ce théorème soulève naturellement d'autres questions :

(i) La boule est-elle l'unique minimiseur chaque fois qu'un minimiseur existe ?

(ii) L'ensemble des masses m pour lesquelles il existe un minimiseur est-il un intervalle ?

(iii) L'ensemble des masses m pour lesquelles la boule est un minimiseur est-il un intervalle ?

Knupfer et Muratov ont fourni une réponse positive à la première question dans le cas $n = 2$ et α suffisamment petit. On peut également se poser la question de la locale minimalité de la boule :

Definition 1.16. *On dit que la boule de volume m, $B[m]$, est un minimum local pour le problème* (1.4)*, si pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$ tel que $|E| = m$, on a*

$$P(B[m]) + \mathcal{V}_\alpha(B[m]) \leq P(E) + \mathcal{V}_\alpha(E)$$

dès que $|E\Delta B[m]|$ est suffisamment petit.

Figalli, Fusco, Maggi, Millot et Morini ont prouvé dans [2] le théorème suivant :

Théorème 1.17. *Il existe une masse $m_* = m_*(n,\alpha) > 0$ telle que si $m < m_*$, alors la boule est un minimum local, et si $m > m_*$, alors la boule n'est pas un minimum local.*

La encore se pose la question de savoir si les masses m_0 et m_* sont les mêmes.

Dans mon mémoire de master 2, on étudie pour $\beta > 0$ le problème variationnel suivant :

$$\inf_{E\subset\mathbb{R}^n, |E|=m} \mathcal{F}(E) = P(E) + \mathcal{V}_\alpha(E) + \int_E |x|^\beta \,\mathrm{d}x.$$

On s'attend à ce que l'ajout de ce troisième terme empêche la masse de partir à l'infini, et c'est effectivement ce qui se passe : il existe un minimiseur pour tout $m > 0$. On peut alors étudier les mêmes questions que précédemment, et démontrer des analogues des deux théorèmes précédents. Mais l'ajout de ce troisième terme permet en plus d'étudier la topologie des grands minimiseurs : comment se comporte les minimiseurs lorsque l'on fait tendre la masse m vers l'infini ? Dans le régime $\beta > \alpha$, en changeant d'échelle comme nous l'avons fait précédemment, on s'attend à ce que le terme prépondérant pour m grand soit le troisième terme : $\int_E |x|^\beta \,\mathrm{d}x$. Ce terme étant minimisé par la boule, on s'attend à ce que les grands minimiseurs soient de plus en plus sphériques. On peut en effet montrer que ceux-ci convergent asymptotiquement vers la boule. On peut alors se demander si la boule n'est pas l'unique minimiseur pour m suffisamment grand. Pour $\beta < 1$, ce n'est certainement pas le cas puisqu'on peut montrer que ce n'est même pas un minimum local. En revanche, pour $\beta > 1$ tout espoir est permis (travail en cours).

Références

[1] M. Bonacini and R. Cristoferi. Local and global minimality results for a nonlocal isoperimetric problem on $\mathbb{R}^n$. July 2013.

[2] A. Figalli, N. Fusco, F. Maggi, V. Milllot, and M. Morini. Isoperimetry and stability properties of balls with respect to nonlocal energies. March 2014.

[3] Rupert L. Frank, Rowan Killip, and Phan Thành Nam. Nonexistence of large nuclei in the liquid drop model. April 2016.

[4] Enrico Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variations.* Birkhauser, 1984.

[5] Hans Knüpfer and Cyrill B. Muratov. On an isoperimetric problem with a competing non-local term. I. The planar case. September 2011.

[6] Hans Knüpfer and Cyrill B. Muratov. On an isoperimetric problem with a competing non-local term. II. The general case. July 2012.

[7] Jianfeng Lu and Felix Otto. Nonexistence of minimizer for thomas-fermi-dirac-von weizsäcker model. July 2013.

[8] Francesco Maggi. *Sets of Finite Perimeters and Geometric Variational Problems : An Introduction to Geometric Measure Theory.* Cambridge Universty Press, 2012.

[9] Robert Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc. 84.*