ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Introduction au Domaine de Recherche

Théorie de l'indice d'Atiyah-Singer locale, torsion analytique.

Finski Siarhei
29 juin 2016

Le but du cette article est l'introduction dans la théorie d'Atiyah-Singer locale. On va motiver cette théorie par la théorème de Riemann-Roch-Hirzerbruch.

En première section on va fixer la notation et on va donner l'introduction courte dans la théorie de variétés complexes. Dans la section suivante on va donner un récit historique dans la théorie d'Atiyah-Singer locale. Dans la même temps on va introduire la cohomologie de Dolbeaut, on va donner une exposition courte de la théorie de Hodge et on va introduire des classes caractéristiques. Dans la troisième section on va décrire grandes lignes de la démonstration moderne de la théorie d'Atiyah-Singer locale. Dans la section 4 on va introduire la torsion analytique et on va donner la motivation pour l'étudier dans la section 5. Finalement, dans la section 6 on va décrire quelques problèmes ouvertes de la théorie de la torsion analytique.

1 NOTATION ET DÉFINITIONS DE BASE SUR LA GÉOMÉTRIE COMPLEXE

Soit M est une variété différentielle [1]. On note par $\Omega^i(M)$ l'espace de sa i-formes. Pour E un fibré vectorielle sur M, on note par $\Omega^i(M,E)$ l'espace $\mathscr{C}^\infty\left(M, \Lambda^i T^*M \otimes E\right)$. On fixe la $\mathbb{Z}$-graduation pour l'espace $\Omega(M,E)$, donné par la degré.

Definition (Structure Euclidienne). *On dit qu'un fibré vectorielle E est muni d'une structure euclidienne s'il y a un élément fixe $g \in \mathscr{C}^\infty\left(M, Sym^2 E^*\right)$, telle que pour chaque $x \in M$, $v \in E\setminus\{0\}$; g_x satisfait $g_x(v,v) >$* 0.

Par la l'algèbre linéaire on déduit que la structure Euclidienne sur$E$ induit la structure Euclidienne sur tous les fibrées vectorielles associées : $\Lambda^\cdot E, \mathrm{Sym}^k(E)$, etc.

1. Après on dira juste variété.

Definition (Variété Riemannienne). *Une variété Riemannienne M est une variété avec une structure euclidienne sur TM.*

La définition de la variété Riemannienne est indispensable dans toute la géométrie. Elle nous permets d'introduire la longueur du chemins dans la variété, elle nous donne une façon naturelle d'intégrer de fonctions sur les variétés orientées par la définition qui suit

Definition (Forme de volume Riemannienne). *Sur une variété Riemannienne orienté M il y a un seul élément $dv_M \in \Lambda^{\max} T^*M$ telle que l'orientation donné par dv_M coïncide avec l'orientation de M et $g(dv_M, dv_M) = 1$. On appelle tel élément dv_M une forme de volume Riemannienne.*

Definition (Variété complexe). *Une variété complexe M est une variété avec une atlas de cartes $\mathbb{C}^n$ avec de fonctions de transitions holomorphes.*

Definition (Structure presque complexe). *Une structure presque complexe J est un élément dans $\mathscr{C}^\infty(M, End(TM))$ tel que $J^2 = -Id$.*

La structure presque complexe nous donne la décomposition$TM \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M$ dans des vecteurs propres correspondantes aux valeurs propres $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ de J. Cette décomposition induit la décomposition de T^*M. On note par $\Lambda^{i,j}T^*M = \Lambda^i T^{(1,0),*}M \otimes \Lambda^j T^{(0,1),*}M$. On note par $\Omega^{(0,i)}(M)$ l'espace $\mathscr{C}^\infty\left(M, \Lambda^{0,i}T^*M\right)$. Et pour E-une fibré vectorielle sur M, on note par $\Omega^{(0,i)}(M,E)$ l'espace $\mathscr{C}^\infty\left(M, \Lambda^{0,i}T^*M \otimes E\right)$.

On dit qu'un structure presque complexe J provient de la structure complexe si J est donné par la multiplication par $\sqrt{-1}$ dans des coordonnes holomorphes. Dans la variété complexe on appelle la structure presque complexe J *la structure standard* s'il provient de la structure complexe. Pour des structures standards nous avons la décomposition de l'opérateur de la dérivé extérieure $d = \partial + \overline{\partial}$, où ∂ augmente la degré par $(1,0)$ et $\overline{\partial}$ augmente la degré par $(0,1)$. En plus, nous avons l'égalité $\overline{\partial}^2 = 0$. C'est pour ça, il est légitime de donner la définition suivante

Definition (Cohomologie de Dolbeault). *On considère le complexe différentielle (qu'on appellera le complexe de Dolbeault)*

$$\Omega^{0,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,n}(M),$$

on note la cohomologie du cet complexe par $H^{0,i}(M)$.

Cohomologie de Dolbeault est une invariant d'une variété complexe, c'est-à-dire que si on change la structure complexe d'une variété, la cohomologie de Dolbeault va changer aussi. Donc on peut dire que le calcul explicite de la cohomologie de Dolbeault est une tâche assez difficile, parce que cette calcul n'est pas une problème topologique on ne peut pas utiliser des méthodes de la topologie algébrique.

Definition (Fibré vectorielle holomorphe, hermitienne). *Soit M est une variété complexe, le fibré vectorielle complexe E sur M est holomorphe si ses fonctions de transitions sont holomorphes. On dit que E est hermitien s'il a un élément fixé $h \in \mathscr{C}^\infty\left(M, E^* \otimes \overline{E}^*\right)$ telle que pour chaque $x \in M$, $v, w \in E_x$ nous avons $h_x(v, \overline{v}) > 0$ et $h_x(v, \overline{w}) = \overline{h_x(w, \overline{v})}$.*

On note que pour un fibré vectorielle holomorphe on peut éteindre l'opérateur $\overline{\partial}$ sur $\Omega^{(0,i)}(M,E)$. On note telle opérateur $\overline{\partial}^E$, mais si ça ne cause pas de problème de la notation, on écrit tout simplement $\overline{\partial}$.

Definition (Cohomologie de Dolbeaut tordue par un fibré vectorielle holomorphe)**.** *On considère le complexe différentielle (qu'on appellera aussi le complexe de Dolbeaut)*

$$\Omega^{0,0}(M,E) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,1}(M,E) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \Omega^{0,n}(M,E),$$

on note la cohomologie du cette complexe par $H^{0,i}(M,E)$.

Pour motiver cette définition on va dire que $H^{0,0}(M,E)$ est tout simplement l'espace de sections holomorphes de E.

Par l'analogie de la décomposition de d, pour chaque fibré vectorielle (E,∇^E) sur la variété complexe, on peut décomposer la connexion ∇^E dans les parties $\nabla^{(1,0)}, \nabla^{(0,1)}$.

Definition (Connexion de Chern)**.** *Soit* (E,h^E) *est une fibré vectorielle holomorphe hermitien sur une variété complexe* M. *On dit que* ∇^E *est une connexion de Chern s'il satisfait deux propriétés suivantes*

Il est holomorphe : $\nabla^{(0,1)} = \overline{\partial^E}$.

Il est hermitienne : h^E *est parallèle pour la connexion* ∇^E.

C'est possible à prouver que pour chaque fibré vectorielle holomorphe hermitien il y a la seule connexion de Chern.

Dans ce qui suit on munit implicitement chaque fibré vectorielle holomorphe hermitien de sa connexion de Chern. Donc si on dit R^E, ça veut dire la courbure de la connexion de Chern sur E, etc.

Definition (Variété Kählérienne)**.** *Une variété Riemannienne complexe* (M,g) *est une variété Kählérienne si pour la structure presque complexe standard* J *la métrique* g *est* J*-invariant et la* $2-$*forme* $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ *satisfait* $d\omega = 0$.

On va juste remarquer que des variétés Kählériennes sont des variétés sur lesquelles on peut faire l'étude de la cohomologie de Dolbeaut par des méthodes de la topologie algébrique.

Par la définition $T_{ah}M$ est un fibré vectorielle complexe TM où la multiplication par $\sqrt{-1}$ est donné par l'opérateur $-J$. Évidemment, cette fibre fibré vectorielle complexe possède une structure hermitienne naturelle, qui vient de la structure Riemannienne sur TM. On voit bien que nous avons l'isomorphisme naturelle

$$T^{0,1}M \to T_{an}M, \qquad X + iJX \to X$$

Par cette isomorphisme on peut munir le fibré vectorielle complexe $T^{0,1}M$ d'une structure hermitienne, qu'on notera $h^{T^{(0,1)}M}$. Bien sûr, elle va induire la métrique hermitienne sur des fibrés vectorielles associées.

Soit E est un fibré hermitien holomorphe sur la variété Kählérienne M. On peut munir l'espace $\Omega^{(0,i)}(M,E)$ d'un produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$, qu'on appellera la produit L^2

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \int_M \langle\alpha(x),\beta(x)\rangle_{h^{\Lambda^{0,i}T^*M\otimes E}}\, dv_M,$$

où dv_M est une forme de volume Riemannienne. On note $\overline{\partial}^*$ l'opérateur adjoint à $\overline{\partial}$ par rapport à cet produit hermitien. On note aussi $\Box = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ le Laplacien complexe.

Le livre de Demailly [Dem] est une excellente référence pour cette section.

2 LA DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DE LA THÉORIE D'ATIYAH-SINGER

La motivation principale de l'auteur pour étudier la théorie d'Atiyah-Singer [2] est venu des applications de cette théorie dans les autres branches de mathématique, notamment dans la topologie algébrique. Dans la preuve moderne de la théorème d'AS locale la topologie algébrique ne joue pas un rôle aussi important qu'il a joué avant. C'est pour ça, de point de vue de l'auteur, le meilleur façon d'apprécier la théorème d'AS, c'est d'étudier le contexte historique de la théorie, c'est-à-dire présenter pas seulement la théorie d'AS, mais aussi des résultats, qui ont contribué à sa développement.

Aujourd'hui on peut présenter la preuve de la théorème d'AS locale avec tous les définitions nécessaires dans une trentaine de pages. C'est une tâche incroyable pour la première preuve de la théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch [3] locale, qui est un cas particulier de la théorème d'AS locale. La preuve court éclaire des aspects techniques de la théorie, mais, au moins pour l'auteur, la rétrospective historique donne la motivation pour étudier ces aspects. Comme cette article fait partie de la présentation de la domaine de recherche pour non-spécialistes, on trouve qu'on gagne plus de la présentation historique détaillé.

On ne prétends pas que cette présentation historique est complet. Pour ne rentre pas dans des détailles spécialisées, on ne dit absolument rien sur la théorème d'AS en famille, sur sa formulation équivariante et sur beaucoup d'autres choses qui portent leur propre intérêt.

On utilise comme la référence l'article par N. Hitchin [Hit10], préparé à l'honneur de la réception de prix d'Abel par Atiyah et Singer en 2004.

1850-1860

Théorème de Riemann-Roch.

Definition (Surface de Riemann)**.** *Une surface de Riemann est une variété complexe de la dimension* 1.

Ici on va considérer seulement des surfaces de Riemann compactes. Chaque surfaces de Riemann compacte est une surface orienté, donc on peut définir le genre g de surface de Riemann. Par la définition, le genre est un invariant topologique.

Definition (Diviseur)**.** *Un diviseur D dans la surface de Riemann S est une combinaison linéaire des points de S aux coefficients dans $\mathbb{Z}$, c'est-a-dire*

$$D = \sum_i a_i(p_i) - \sum_j b_j(q_j), \qquad a_i, b_j \in \mathbb{N}, p_i, q_j \in S.$$

Pour D-un diviseur sur S, on note $l(D)$ - l'espace vectorielle de fonctions méromorphes f telles que

f est holomorphe dehors des points q_i,

f a des zéros d'ordre $\geq a_i$ dans des point p_i,

f a des des pôles d'ordre $\leq b_j$ dans des points q_j.

C'est possible à prouver que l'espace $l(D)$ est une espace vectorielle de dimension fini.

C'est possible a prouver que chaque surface de Riemann possède une forme méromorphe α. On peut associer à α le diviseur $[\alpha]$, qui est égale à

$$\sum_i a_i(p_i) - \sum_j b_j(q_j),$$

2. Après on utilise la notation AS.
3. Après on dit RRH.

où p_i sont des zéros d'ordre a_i de α et q_i sont des pôles d'ordre b_j de α.

Theorem (Riemann-Roch)**.** *Pour D-un diviseur dans S, nous avons l'identité suivante*

$$\dim l(D) - \dim l([\alpha] - D) = d + 1 - g,$$

où $d = |D| = \sum_i a_i - \sum_j b_j$.

On peut dire que la théorème de Riemann-Roch identifie des objets analytiques aux objets topologiques, pour cette raison on dire que c'est une première instance de la théorie d'Atiyah-Singer (pour la formulation de la théorème d'Atiyah-Singer, regarder p. 7).

1931

Cohomologie de De Rham.

La cohomologie de De Rham $H_{DR}(M)$ est la cohomologie d'un complexe différentielle

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n(M).$$

On voit bien que la définition de la cohomologie de De Rham dépend de la structure différentielle d'une variété. C'est assez etonnant que nous avons le résultat suivant

Theorem (De Rham)**.** *Le morphisme naturelle entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie singulier*

$$H^k_{DR}(M) \to H^k(M, \mathbb{R}), \qquad \omega \mapsto \left[c \in H_k(M), c \mapsto \int_c \omega \right],$$

est une isomorphisme.

On peut dire que cette résultat est vraie au cause de le fait que pour chaque variété M on peut trouver un recouvrement fini qui a la propriété suivante : chaque intersection des ouverts de recouvrement de M est difféomorphe à la boule euclidienne standard. Et donc chaque variété est constitue de pièces 'simples'. C'est possible à prouver qu'on peut calculer la cohomologie d'une variété M juste à partir de la combinatoire de la recouvrement.

Pour des detailes, voir le livre [BT95].

1941

Théorie de Hodge.

Soit M est une variété Kählérienne et E est un fibré vectorielle holomorphe sur M. Pour l'opérateur $\overline{\partial}$ sur des formes $\Omega^{(0,\cdot)}(M,E)$ on peut construire son adjoint $\overline{\partial}^*$ par rapport à la produit L^2 naturelle. On considère l'espace

$$\mathscr{H}(M,E) = \{\alpha \in \Omega^{(0,\cdot)}(M,E) : \overline{\partial}\alpha = \overline{\partial}^* \alpha = 0\}.$$

On appelle des éléments de $\mathscr{H}(M,E)$ des formes harmoniques. Nous avons l'identité

$$(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2 = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial},$$

qui implique que l'opérateur $(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2$ préserve le degré. Nous avons aussi l'identité

$$\langle (\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2 s, s \rangle = ||\overline{\partial} s||^2 + ||\overline{\partial}^* s||^2,$$

qui implique que

$$\ker \overline{\partial} \cap \ker \overline{\partial}^* = \ker(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) = \ker(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2.$$

Donc on voit que $\mathscr{H}(M,E)$ est naturellement $\mathbb{Z}$-gradué, où la graduation est induit de la graduation de formes différentielles.

Il y a une morphisme $\mathbb{Z}$-graduée naturelle

$$\mathscr{H}(M,E) \to H^{0,\cdot}(M,E).$$

La théorie de Hodge dit en particulier dit que c'est une isomorphisme. On note que comme la partie droite est de la dimension fini, on peut conclure que l'espace de formes harmoniques est aussi de dimension fini.

Ce qui est important pour la développement de la théorie d'AS, c'est qui ce théorème nous exprime $H^{0,\cdot}(M,E)$ comme le noyau d'un opérateur différentielle $\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$.

Pour plus de l'information regarder le livre [Dem].

1935-1950

Théorie de classes caractéristiques (d'après Stiefel-Whitney, Chern, Pontryagin).

Des classes caractéristiques sont des invariants cohomologiques de fibrés vectorielles. Par exemple, des classes de Chern d'une fibré vectorielle complexe $\pi : E \to M$ sont des éléments $c_i(E) \in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$, $i \in 0,1,\ldots$, telles que pour la classe $c(E) = \sum_{i=0} c_i(E) \in H(M,\mathbb{Z})$ nous avons des propriétés suivantes

Fonctorialité : Si $f : N \to M$, alors $f^* c(E) = c(f^* E)$,

Additivité : Pour une suite courte exacte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ des espaces vectorielles sur M, nous avons l'egalité $c(E) = c(E') \smile c(E'')$.

Normalisation : Nous avons l'egalité $c(\mathscr{O}(-1))_{\mathbb{C}P(n)} = 1 - H$, ou H est le Poincaré dual de l'hyperplan $\mathbb{C}P(n-1) \hookrightarrow \mathbb{C}P(n)$.

C'est possible à prouver que des classes de Chern sont uniquement définis par ces propriétés. Pour nos besoins, ils suffit de penser aux classes de Chern comme aux invariants cohomologiques d'un fibre vectorielle.

La théorie de classes caractéristiques joue un rôle principale dans la théorème d'AS. Premièrement, cette théorie est utilisé dans l'annonce de la théorème d'AS et deuxièmement il est utilisé dans la théorie de cobordismes d'après Thom, qui est utilisé dans la première preuve de la théorème d'AS.

Pour la référence regarder le livre de Milnor [MS74].

1940-1950

Theorie de Chern-Weil.

Bien qu'on a donne la définition de classes de Chern, nous n'avons pas donné la méthode pour les calculer. La théorie de Chern-Weil est une théorie de classes caractéristiques sur des variétés différentielles qui permet de donner des formules explicites aux images de classes de Chern par l'homomorphisme $H(M,\mathbb{Z}) \to H(M,\mathbb{R})$.

Pour donner ces formules il faut fixer une connexion ∇ sur un fibré vectorielle E sur M. On va noter par $R^E = \nabla^2 \in \Omega^2(M, \mathrm{End}(E))$ la courbure de E. C'est possible à prouver que pour $i \in \mathbb{N}$ la classe $\mathrm{Tr}^E\left[(R^E)^i\right] \in H^{2i}_{DR}(M)$ ne dépend pas de la choix du connexion ∇, et nous avons l'égalité suivante

$$1 + c_1(E) + c_2(E) + \ldots = \exp\left\{\mathrm{Tr}\left[\log\left(I + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^E\right)\right]\right\}.$$

La théorie de Chern-Weil donne une procédure théorique pour calculer de classes de Chern. L'aspect 'théorique' apparaisse dans le fait qu'on doit construire la connexion sur un fibre vectorielle. C'est possible de le faire si on a une structure hermitienne sur un fibré vectorielle holomorphe, parce qu'on peut l'associer naturellement la connexion de Chern. Pour faire ça en générale, on doit construire une partition d'unité et pratiquement c'est assez difficile à faire.

Pour la référence, vous pouvez regarder le livre de Ma-Marinescu [MM07, Appendice B] où le livre de Weiping Zhang [Zha01].

1956

Théorème de Riemann-Roch-Hirzerbruch.

Theorem (Riemann-Roch-Hirzerbruch)**.** *Soit M est une variété complexe compact et E-un fibré vectorielle holomorphe. Nous avons l'égalité*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim H^{0,i}(M,E) = \int_X [ch(E)Td(M)], \tag{2.1}$$

où $Td(M), ch(E)$ sont certaines polynômes en classes de Chern de TM et E.

La preuve originale du cette théorème est indirect, elle reduit la theoreme a la verification de quelques cas particuliers, dans lesquelles c'est possible a calculer $\dim H^{0,i}(M,E)$ explicitement. Pour cette preuve, regarder le livre de Hirzerbruch [Hir66].

Par la théorie de Hodge la partie à gauche peut être considéré comme la somme alterné

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \ker(\partial+\partial^*)^2|_{\Omega^{0,i}(M,E)}.$$

C'est possible à prouver que la partie à droite est une invariant différentielle.

Pour la preuve qui utilise la theorie d'AS voir [LM89]. Pour la preuve moderne qui utilise la théorie d'AS locale (et qui est vraie seulement dans un cas M-Kähler), regarder [BGV92, Chapitre 4].

1963

Théorème d'Atiyah-Singer.

Soit M est une variété compacte et E, F sont deux fibrés vectorielles sur M.

Definition (Opérateur différentielle)**.** *Dans une variété M, une opérateur différentielle $P : \mathscr{C}^\infty(E) \to \mathscr{C}^\infty(V)$ est une combinaison linéaire de termes $a_i \nabla_{e_1} \dots \nabla_{e_k}$, où $a_i \in End(E,F)$, ∇ est une connexion sur E et e_i sont des champs de vecteurs sur M. On dit qu'une opérateur différentielle P a le degré k si k est est le plus petit nombre entier telle que P peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $a_i \nabla_{e_1} \dots \nabla_{e_l}, l < k$ dans la notation précédente.*

Definition (Symbole principale de l'opérateur différentielle)**.** *Pour chaque opérateur différentielle $P = \sum_i a_i \nabla_{e_1} \dots \nabla_{e_{k_i}}$ du degré k on peut associer son symbole principale $\sigma(P) \in \mathscr{C}^\infty\big(M, S^k(TM) \otimes End(E,F)\big)$. Qui est égale à*

$$\sigma(P) = \sum_i{}' \frac{\sqrt{-1}^k}{k!} a_i \sum_{\alpha \in S_{k_i}} e_{\alpha(1)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha(k_i)},$$

où S_{k_i} est la groupe de permutation et $\sum_i'$ signifie la somme où il n'y a que des termes de la longueur k.

Remark. 1. *C'est possible à prouver que le symbole principale ne dépend pas de la présentation de l'opérateur comme une combinaison linéaire de termes $a_i \nabla_{e_1} \dots \nabla_{e_{k_i}}$.*

2. *Le terme $\sqrt{-1}^k$ a un rôle de la normalisation, il n'est pas très important.*

Definition. *On dit qu'un opérateur P est elliptique si sa symbole principale a une propriété suivante : pour chaque $\xi \neq 0 \in T^*M$*

$$\sigma(P)(\xi, \xi, \dots, \xi) \text{ est invertible.}$$

Maintenant on va décrire pourquoi on s'intéresse aux opérateurs elliptiques. Pour ça on va donner la définition de l'indice de l'opérateur.

Definition (Indice de l'opérateur)**.** *Soit $A : B \to B'$ est un opérateur linéaire. On suppose que* $\ker A$, *coker*A *sont de la dimension fini. On note*

$$Ind\, A = \dim \ker A - \dim coker A.$$

Évidemment, l'indice de l'opérateur de Fredholm est bien défini. C'est possible à prouver que l'espace des opérateurs de Fredholm est une sous-espace ouverte dans l'espace des opérateurs bornées et l'indice ne change pas par une petite perturbation de l'opérateur Fredholm. En fait l'indice de l'opérateur de Fredholm A ne dépend que de sa composante connexe dans l'espace des opérateurs de Fredholm. C'est ici on voit bien que l'indice de l'opérateur de Fredholm - c'est plutôt une quantité topologique.

On peut faire une sorte de la théorie de Hodge pour des opérateurs différentielles elliptiques, qui va nous dire que le noyau et le conoyau de l'opérateur différentielle elliptique sont des espaces vectorielles de la dimension fini.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ c'est possible de construire des espaces de Banach $B_k(E)$ et $B_k(F)$ telle que $\mathscr{C}^\infty(M,E) \subset B_k(E), \mathscr{C}^\infty(M,F) \subset B_k(F)$ et chaque opérateur différentielle P de degré k se prolonge sur une opérateur borné $\tilde{P} : B_k(E) \to B_k(F)$. C'est possible à prouver que dans cette construction la prolongation des opérateurs elliptiques sont des opérateurs Fredholm. En plus, pour des opérateurs elliptiques c'est possible à prouver que $\ker \tilde{P} \simeq \ker P, \mathrm{coker} \tilde{P} \simeq \mathrm{coker} P$. Donc on voit bien que l'étude de l'indice de l'opérateur différentielle elliptique est réduit à l'étude de l'indice de l'opérateur de Fredholm. Mais on a déjà dit que l'indice de l'opérateur de Fredholm est plutôt la quantité topologique. Il faut noter que la construction des espaces $B_k(E), B_k(F)$ est en fait la construction des équivalentes de l'espaces de Sobolev, qui dépend de la géométrie. Donc on ne peut pas dire que l'indice de l'opérateur différentielle est une quantité topologique, c'est plutôt une quantité différentielle.

Fixons deux opérateurs différentielles P_0, P_1 qui ont le même symbole principale. Si on suppose qu'il sont elliptiques, alors c'est évident que pour chaque $t \in [0,1]$, l'opérateur $tP_0 + (1-t)P_1$ est elliptique aussi. Donc ces opérateurs sont dans la même composante connexe de l'espace d'opérateurs de Fredholm et donc ses indices coïncident. On aimerait bien avoir une formule de l'indice a partir de laquelle cette indépendance serait triviale. C'est exactement ce que la théorème d'AS nous donne.

Theorem (Atiyah-Singer)**.** *Dans la notation du cette paragraphe nous avons l'égalité suivante*

$$IndP = [ch(P)Td(M)]([M]), \tag{2.2}$$

où $ch(P)$ est une élément de $H(M, \mathbb{R})$ qui ne dépend que de la symbole principale de P.

Dans le contexte de la géométrie complexe c'est possible à prouver que la théorème d'AS implique la théorème de RRH.

Le livre de Lawson [LM89, Chapitre 3, sections 4,5] est une excellente référence pour cette paragraphe.

1970-1980

Théorème d'Atiyah-Singer locale (d'apres McKean-Singer, Patodi, Gilkey, Atiyah-Bott).

La théorème d'AS locale dit que pour certains opérateurs différentielles $P : \mathscr{C}^\infty(M,E) \to \mathscr{C}^\infty(M,E)$ on peut prouver la formule

$$\mathrm{Ind} P = \int_M f_P(x)\, d v_M,$$

où la fonction $f_P(x)$ dépend seulement de la germe d'une data géométrique en x. Ça implique, en particulier, que si nous avons deux opérateurs différentielles P, Q, telles que P coïncide avec Q au voisinage d'une point $x \in M$, alors $f_P(x) = f_Q(x)$

Pour illustrer la force de cette théorème, on va donner deux applications. Soit $\tilde{M}$ est une revêtement fini d'ordre k d'une variété orienté M. On admets le fait que le nombre d'Euler $\chi(M)$ et la signature $\mathrm{sign}(M)$ peuvent être représentées comme l'indice des opérateurs différentielles sur M et qu'il est légitime à les appliquer la théorème de l'indice locale. On voit immédiatement que

$$\chi(\tilde{M}) = k \cdot \chi(M), \qquad \mathrm{sign}(\tilde{M}) = k \cdot \mathrm{sign}(M).$$

Si on utilise le fait que dans ces problèmes de l'indice le choix de la métrique est arbitraire, on voit aussi deux faites moins évidentes : pour M_1, M_2 des variétés orientées

$$\mathrm{sign}(M_1 \# M_2) + \mathrm{sign}(S^n) = \mathrm{sign}(M_1) + \mathrm{sign}(M_2),$$

$$\chi(M_1 \# M_2) + \chi(S^n) = \chi(M_1) + \chi(M_2),$$

où $M_1 \# M_2$ est la somme connexe de variétés orientées de dimension n. Pour plus de l'information, vous pouvez consulter le livre de Gilkey [Gil93, Théorème 1.3.2].

On appellera telle fonctions f_P des fonctions locales. En plus, dans le cas $P = \Box = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ on peut obtenir que f_P est la représenté de Chern-Weil (par rapport à une connexion de Chern) de la partie droite dans la théorème de RRH. Donc dans cette cas la theorie d'AS locale implique la theoreme de RRH.

3 L'IDÉE DE LA PREUVE DE LA THÉORÈME D'AS LOCALE

Le point essentiel dans la preuve de la théorème d'AS locale est l'étude de l'opérateur $\exp(-tP)$. L'opérateur $\exp(-tP)$ est défini par des propriétés suivantes : pour $f \in \mathscr{C}^\infty(M,E)$

$$\lim_{t\to 0} \exp(-tP) f = f, \qquad \partial_t \big(\exp(-tP) f\big) + P\big(\exp(-tP) f\big) = 0.$$

Le fait que telle opérateur existe et il est unique est une conséquence de la théorie des opérateurs elliptiques sur les variétés compactes, pour la référence regarder [LM89, Chapitre 3, section 6]. Cette opérateur a des propriétés intéressantes, mais pour les introduire on doit donner la définition suivante

Definition (Noyau de Schwartz)**.** *On dit qu'un opérateur A sur $\mathscr{C}^\infty(M,E)$ a le noyau de Schwartz si pour $x,y \in M$ il y a un élément*

$$A(x,y) \in E_x \otimes E_y^*,$$

qui dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ de x,y, et nous avons l'égalité suivante : pour $f \in \mathscr{C}^\infty(M,E)$

$$Af(x) = \int_M \langle A(x,y), f(y)\rangle \, dv_M(y),$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ signifie l'accouplage de E^* et E.

C'est possible à prouver que l'opérateur $\exp(-tP)$ a le noyau de Schwartz.

Des physiciens interprètent l'opérateur $\exp(-t\Box)$ comme l'opérateur de l'évolution de la propagation de la chaleur. Avec cette interprétation on peut penser à la quantité $A(x,y)$ comme à la quantité de la chaleur transmis du point y à x. Avec cette intuition on peut définir la trace du telle opérateur par l'identité

$$\mathrm{Tr}\left[\exp(-tP)\right] = \int_M \mathrm{Tr}^E\left[\exp(-tP)(x,x)\right] dv_M,$$

qui ressemble formellement la formule du trace pour la matrice.

On note que on peut définir le trace de l'opérateur $\exp(-tP)$ dans l'autre maniéré. On peut dire que si λ_i, $i \in \mathbb{N}$ sont des valeurs propres de P, alors

$$\mathrm{Tr}\left[\exp(-tP)\right] = \sum_i e^{-t\lambda_i},$$

et la somme à droite converge. Il y a un petit défaut dans notre explication : $\mathscr{C}^\infty(M,E)$ n'a pas du structure de l'espace de Banach et donc on n'a aucune propriété sur des valeurs propres d'un opérateur P. C'est possible de résoudre cette subtilité, mais on ne va pas décrire comment. A partir d'ici on va parler librement de la spectre de l'opérateur P.

Pour la facilite, on va considérer le cas quand il existe ξ-fibre vectorielle holomorphe sur une variété Kählérienne compacte M telle que $E = F = \Lambda^{0,\cdot}T^*M \otimes \xi$ et $P = \Box$. La théorème de McKean-Singer relie l'opérateur $\exp(-tP)$ à la théorème de RRH (et AS en générale).

Theorem (McKean-Singer)**.** *Si on note $Tr_i\left[\exp(-tP)\right]$ le trace de l'opérateur $P^i = P|_{\Omega^{(0,i)}(M,E)}$, alors on a l'identité suivante*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \, Tr_i\left[\exp(-tP)\right] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^{0,i}(M,\xi) = Ind(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*),$$

où $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ est considéré comme l'opérateur $\Omega^{0,paire}(M,\xi) \to \Omega^{0,impaire}(M,\xi)$.

On va décrire l'idée de la preuve. Premièrement, c'est possible à prouver par l'ellipticité que le spectre de P est discret. Pour $\lambda \in \mathrm{Spec}P$ on note n_λ^+, n_λ^- la multiplicité de λ dans $\Omega^{0,\mathrm{paire}}(M,\xi)$ et $\Omega^{0,\mathrm{impaire}}(M,\xi)$.

On verra que si $\lambda \neq 0$, alors $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$. L'opérateur $D = \overline{\partial}^* + \overline{\partial}$ commute à l'opérateur $\Box$, donc on peut restreindre D à l'espace propre, correspondante à la valeur propre λ de l'opérateur $\Box$. Si $\lambda \neq 0$, $D^2 = \lambda$ sur cette espace et donc D est inversible. Mais $D = \overline{\partial}^* + \overline{\partial}$ échange des formes anti-holomorphes paire et impaire, donc on conclut que $n_\lambda^+ = n_\lambda^-$.

La théorème résulte d'une chaîne des identités

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}_i \left[\exp(-tP)\right] = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec} P} e^{-t\lambda}(n_\lambda^+ - n_\lambda^-) = n_0^+ - n_0^- = \mathrm{Ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*).$$

Pour la preuve détaillé consulter le livre [BGV92, Théorème 3.50].

Donc pour chaque $t > 0$ on peut se demander : peut être la fonction $\sum_{i=0}^n (-1)^i \exp(-tP)(x,x)$ est locale ? La réponse est non. La raison physique pour ça est le fait que l'opérateur $\exp(-t\Box)$ décrit l'évolution de la propagation de la chaleur et la vitesse de la propagation de la chaleur est infini. Par exemple, si $M = \mathbb{C}^n$ [4], $\xi = \mathbb{C}$ avec des structures holomorphes et Riemannienne/hermitienne standard, le Laplacien $\Box$ sur $\Omega^0(\mathbb{C}^n) = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ est le Laplacien usuelle $\Delta = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ sur $\mathbb{C}^n$. Le noyau de Schwartz du cet Laplacien n'a pas de support autour de la diagonale dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, car on peut calculer explicitement $\exp(-t\Delta)$ et il est égale à la fonction Gaussienne. C'est ici qu'on s'intéresse a la développement asymptotique de $\mathrm{Tr}_i(\exp(-t\Box))$ quand $t \to 0$. La motivation pour étudier cette asymptotique vient de le fait que bien que la chaleur va être partout dans la variété, pour le temps petit la plupart de la chaleur sera condensé prés d'une point chauffé.

Theorem (Minakshisundaram, Pleijel)**.** *Pour t prés de 0 nous avons l'estimation suivante*

$$\sum_i (-1)^i Tr^{\Lambda^{0,i} T^*M \otimes \xi} \left[\exp(-tP^i)(x,x)\right] = \sum_{i=-n}^{K} t^i a_i(x,x) + O(t^{K+1}),$$

en plus, des fonctions $a_i(x,x)$ sont des fonctions locales.

Pour la preuve regarder [BGV92, Théorème 2.26]. Si on admet cette résultat, on obtiens par la théorème de McKean-Singer que $f_p = a_0$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Ind} P = \int_M a_0(x,x)\, dv_M.$$

Maintenant on va vaguement expliquer comment la terme t^{-n} apparaisse.

On fixe $x \in M$ et on admet, qu'il existe une opérateur différentielle L_x sur T_xM qui "coïncide" avec L autour de x et nous avons l'estimation suivante [MM07, analogue de Lemme 1.6.5] : pour t petit

$$\left|\exp(-tL)(x,x) - \exp(-tL_x)(0,0)\right| = o(t^{+\infty}).$$

Donc pour trouver l'asymptotique de $\exp(-tL)(x,x)$, il faut trouver l'asymptotique de $\exp(-tL_x)(0,0)$.

Pour étudier l'opérateur $\exp(-tL_x)$ on va utiliser l'opérateur de dilatation $S_t : \mathscr{C}^\infty\left(T_xM, \Lambda^{0,\cdot} T^*M \otimes \xi\right) \to \mathscr{C}^\infty\left(T_xM, \Lambda^{0,\cdot} T^*M \otimes \xi\right), S_t(s)(X) = s\left(\frac{X}{\sqrt{t}}\right)$. On va noter $L_x^t = S_t^{-1} t L_x S_t$. Premièrement on va prouver l'identité [5]

$$\exp(-L_x^t)\left(\frac{Y}{\sqrt{t}}, \frac{Z}{\sqrt{t}}\right) = t^n \exp(-tL_x)(Y,Z).$$

On le voit à partir de la chaîne des égalités :

4. Bien sûr, ce n'est pas une variété compact, mais c'est une illustration !

5. Rigoureusement, cette identité n'est pas vraie. Mais il est vraie si on va supposer que la forme de volume est constante dans le coordonnées géodésiques. Dans le cas générale, c'est pas très difficile de modifier l'argument pour qu'il devient correcte.

$$t^{-n}\int_{T_xM}\exp(-L_x^t)\left(\frac{Y}{\sqrt{t}},\frac{Z}{\sqrt{t}}\right)s(Z)\,dZ = t^{-n}\int_{T_xM}\exp(-tL_x)\left(Y,\frac{Z}{\sqrt{t}}\right)s\left(\frac{Z}{\sqrt{t}}\right)dZ$$
$$= \int_{T_xM}\exp(-tL_x)(Y,Z)s(Z)\,dZ$$

On remarque que nous avons par la définition de la symbole principale

$$\lim_{t\to+0} L_x^t = \Delta = -\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

On peut calculer l'opérateur $\exp(-t\Delta)$ explicitement par la formule de Mehler. En particulier, nous aurons l'identité suivante

$$\exp(-\Delta)(0,0) = (4\pi)^{-n}.$$

Il reste à dire que c'est possible à prouver par des méthodes de l'analyse fonctionnelle pur que $\lim_{t\to+0}\exp(-L_x^t)(0,0) = \exp(-\Delta)(0,0)$, et ça finit la démonstration. Idée du cette preuve est écrit très clairement dans une contexte de d'inégalités de Morse holomorphes dans le livre de Ma-Marinescu [MM07, Chapitre 1].

La partie difficile de la preuve de la théorème d'AS locale est dans le calcul explicite de la terme $a_0(x,x)$. Dans notre cas de la théorème de RRH il faut prouver que

$$\textstyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathrm{Tr}^{\Lambda^{(0,i)}T^*M\otimes\xi}\left[a_j(x,x)\right] = \begin{cases} 0 & j<0 \\ \text{Chern-Weil respresenté de la partie droite de la théorème 2.1} & j=0 \end{cases}.$$

Il y a beaucoup de preuves du cette fait, la preuve de Getzler [Get86] est assez semblable à ce qu'on a fait pour calculer le coefficient $a_{-n}(x,x)$. En gros il fait la même chose sauf qu'il change l'opérateur de dilatation et l'analyse devient beaucoup plus complique.

Pour des détailles regarder dans [BGV92, Section 3,4].

4 Introduction dans l'étude des invariants spectraux par des méthodes de la théorie locale d'Atiyah-Singer

Soit M est une variété kählérienne compacte de dimension n et (E, h^E) est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur M. On considère le complexe du Dolbeaut

$$\Omega^0(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\Omega^{0,1}(M,E)\xrightarrow{\overline{\partial}}\ldots\xrightarrow{\overline{\partial}}\Omega^{0,n}(M,E).$$

On note par $\square_i$ la restriction de l'opérateur $\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}$ sur $\Omega^{0,i}(M,E)$. On note P_i la projection spectrale de l'opérateur $\square_i$ sur des valeurs propres strictement positives.

C'est possible à prouver que pour $z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)>0$ l'opérateur $\square_i^{-z}P_i$ est un opérateur sur $\Omega^i(M,E)$, qui pour $\mathrm{Re}(z)\geq n$ a le noyau de Schwartz $\mathscr{C}$. En particulier, il a une trace pour $\mathrm{Re}(z)\geq n$. On note pour $z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)\geq n$:

$$\theta(z) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1} i\,\mathrm{Tr}\left[\square_i^{-z}P_i\right],$$

dans l'article [See67] Seeley a prouvé que cette fonction prolonge holomorphiquement en 0.

Definition. *On appelle le nombre réelle* $\exp(-\frac{1}{2}\theta'(0))$ *la torsion analytique de Ray-Singer et on le note* $T^{RS}(X,E)$. *On voit formellement qu'on a l'identité suivante*

$$\exp(-\frac{1}{2}\theta'(0)) = \prod \left(\det{}'\Box_i\right)^{(-1)^{i+1}i},$$

où $\det'$ *signifie le produit de valeurs propres non nulles.*

5 Motivation pour l'étude des invariants spectraux

Soit Z est une variété kählérienne compacte et (E,h^E) est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur Z. Pour l'auteur, la motivation pour la torsion analytique de Ray-Singer complexe vient de la métrique de Quillen. Dans le cas plus simple c'est une métrique de la ligne complexe

$$\det H^0(Z,E) \otimes (\det H^1(Z,E))^{-1} \otimes \ldots \otimes (\det H^n(Z,E))^{(-1)^n} = \lambda(Z,E).$$

On va décrire la construction du cette métrique. On note par $\mathscr{H}^i(Z,E)$ des i-formes harmoniques. Sur cette espace il y a une métrique naturelle, qui est défini par la restriction de la métrique L^2. Par la théorie de Hodge nous avons l'isomorphisme naturelle $H^i(Z,E) \simeq \mathscr{H}^i(Z,E)$. On note $|\cdot|_i$ la métrique induit sur $H^i(Z,E)$. On note $|\cdot|$ la métrique induit sur $\lambda(Z,E)$. Par la définition, la métrique de Quillen sur $\lambda(Z,E)$ est $||\cdot|| = T^{RS}(X,E)\,|\cdot|$.

En générale si M est une variété kählérienne, B est une variété complexe connexe et $\pi : M \to B$ est une submersion holomorphe propre avec des fibres $Z_y, y \in B$ [6]. Soit E est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur M. On considère des espaces vectorielles $H^i(Z_y, E|_{Z_y})$. C'est important à noter que $\dim H^i(Z_y,, E|_{Z_y})$ dépend de $y \in B$. Et donc ces espaces vectorielles en générale ne forment pas un fibré vectoriel sur B. Mais on peut munir $\lambda(Z_y, E|_{Z_y})$ d'une structure de la fibré en droites lisse $\lambda^G(M,E)$. Ce résultat est prouvé algébriquement dans le cas π-projective dans l'article [MK76]. On peut munir cette fibré en droites d'une métrique naturelle $||\cdot||$, qui est appellé la métrique de Quillen. Elle est introduit dans l'article [Qui85] pour le cas où Z_y sont des surfaces de Riemann. Dans les articles [BF86a, BF86b] il y a une généralisation du cette construction pour n'importe laquelle fibré Z_y et une opérateur le long de fibré plus générale que $\overline{\partial}^E_y$. Dans les articles [BGS88a, BGS88b, BGS88c] Bismut-Gillet-Soulé montrent que le fibré en droites $\mathscr{C}^\infty$ $\lambda^G(M,E)$ muni d'une structure holomorphe, et la métrique de Quillen est une métrique lisse sur $\lambda^G(M,E)$. En plus ils ont calculé la courbure de Chern de $(\lambda^G(M,E), ||\cdot||)$, et pour π-projective ils ont construit une isomorphisme entre la construction de [MK76] et de [BGS88c].

Dans la construction générale du $||\cdot||$ il y a aussi le terme $T^{RS}(X,E)$ qui apparaît naturellement comme le 'determinant de $\overline{\partial}^E_y$ régularisé'. Par exemple si $\dim H^i(Z_y, E|_{Z_y}) = 0$ pour $i > 0$ et $y \in B$, par la théorème de RRH on peut dire que la dimension de $H^0(Z_y, E|_{Z_y})$ ne change pas et des espace vectorielles $H^0(Z_y, E|_{Z_y})$ forment un fibré vectoriel holomorphe sur B. Dans ce cas la formule de $||\cdot||$ est donne comme avant $||\cdot||_y = |\cdot|_y\, T^{RS}(Z_y, E|_{Z_y})$.

6. Par la théorème de fibration d'Ehresmann chaque les fibres sont difféomorphes, donc chaque série des variétés seulement la structure complexe change.

6 PROBLÈMES OUVERTES

Definition (Fibré en droites positive)**.** *Soit* (L, h^L) *est une fibré en droites holomorphe hermitien sur la variété Kählérienne* (M, g). *On dit que* (L, h^L) *est positive s'il satisfait*

$$R^L(U, \overline{U}) > 0, \qquad U \in T^{(1,0)}M.$$

Soit M est une variété kählérienne compacte, (L, h^L, ∇^L)est un fibré en droites holomorphes hermitien positive, muni d'une connexion de Chern ∇^L sur M et (E, h^E) est fibré vectoriel holomorphe hermitien sur X.

Theorem (Bismut-Vasserot [BV89])**.** *Quand le nombre naturelle* $p \to \infty$ *nous avons l'asymptotique suivante*

$$T^{RS}(M, L^p \otimes E) = \frac{1}{2} rk(E) \int_M \log\det\left(\frac{p\dot{R}^L}{2\pi}\right) e^{p\omega} + o(p^n),$$

où ω *est une forme kählérienne de* M *et* $\dot{R}^L \in \mathscr{C}^\infty\left(M, End(T^{(1,0)}M \otimes L)\right) = \mathscr{C}^\infty\left(M, End(T^{(1,0)}M)\right)$, *défini par la loi : pour* $u, v \in T^{(1,0)}M$ *et* $\xi, \nu \in L$ $\langle R^L(u, \overline{v})\xi, \nu\rangle = \langle \dot{R}^L(u \otimes \xi), v \otimes \nu\rangle$.

Cette théorème donne des termes $p^n \log p, p^n$ de l'asymptotique pour $p \to \infty$. On peut se demander si l'asymptotique de $T^{RS}(X, L^p \otimes E)$ va être de la forme $\sum_{i \leq n} a_i \cdot p^n \log p + \sum_{i \leq n} b_i \cdot p^n$? Quelles son des coefficients suivantes de cette asymptotique ? Quelle est la rapport avec les asymptotiques d'autres fonctions spectrales ?

La motivation générale pour cette problème vient de le fait que si on fait tendre $p \to \infty$, on sait que par la théorème d'annulation de Kodaira $H^i(M, L^p \otimes E) = 0$ pour $i > 0$, donc nous sommes exactement dans la situation décrit dans la section précédente. Dans ce cas la métrique plus naturelle sur $\det H^0(M, L^p \otimes E)$ est $|\cdot|$. Et la torsion montre exactement quelle est la différence entre cette métrique et la métrique de Quillen sur le fibré déterminante.

RÉFÉRENCES

[BF86a] J.-M. Bismut and D. S. Freed. The analysis of elliptic families. I. Metrics and connections on determinant bundles. *Comm. Math. Phys.*, 106(1) :159–176, 1986.

[BF86b] J.-M. Bismut and D. S. Freed. The analysis of elliptic families. II. Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem. *Comm. Math. Phys.*, 107(1) :103–163, 1986.

[BGS88a] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion. *Comm. Math. Phys.*, 115(1) :49–78, 1988.

[BGS88b] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott-Chern forms. *Comm. Math. Phys.*, 115(1) :79–126, 1988.

[BGS88c] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants. *Comm. Math. Phys.*, 115(2) :301–351, 1988.

[BGV92] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat Kernels and Dirac Operators*. Grundlehren Text Editions. Springer Berlin Heidelberg, 1992.

[BT95] R. Bott and L.W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1995.

[BV89] J.-M. Bismut and É. Vasserot. The asymptotics of the Ray-Singer analytic torsion associated with high powers of a positive line bundle. *Comm. Math. Phys.*, 125(2) :355–367, 1989.

[Dem] J.-P. Demailly. *Complex analytic and differential geometry.*

[Get86] Ezra Getzler. A short proof of the local atiyah-singer index theorem. *Topology*, 25(1) :111 – 117, 1986.

[Gil93] Peter B. Gilkey. *Applications of spectral geometry to geometry and topology*. Lecture notes series, 12. Seoul, Korea : Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center., 1993.

[Hir66] F. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1966.

[Hit10] Nigel Hitchin. *The Abel Prize : 2003–2007 The First Five Years*, chapter The Atiyah–Singer Index Theorem, pages 117–152. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.

[LM89] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1989.

[MK76] D. Mumford and F. Knudsen. The projectivity of the moduli space of stable curves. i : Preliminaries on "det" and "div". *Mathematica Scandinavica*, 39 :19–55, 1976.

[MM07] X. Ma and G. Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254. Birkhäuser Verlag Basel, Progress in Mathematics, 2007.

[MS74] J.W. Milnor and J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1974.

[Qui85] D. Quillen. Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface. *Functional Analysis and Its Applications*, 19(1) :31–34, 1985.

[See67] R. T. Seeley. Complex powers of an elliptic operator. *Proc. Symp. Pure Math.*, 10 :288–307, 1967.

[Zha01] W. Zhang. *Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations*. Nankai tracts in mathematics. World Scientific, 2001.