

IDR : Topologie de contact et quelques liens avec la théorie des feuilletages

Fabio Gironella

10 juin 2015

Abstract

Dans la suite, je présenterai les aspects principaux du domaine de la topologie de contact que j'ai rencontré jusqu'à ce moment pendant mon chemin d'études et j'essaierai de présenter quelques liens avec la théorie des feuilletages.

1 Petite introduction et premières définitions

La géométrie de contact est, concrètement, l'étude des variétés différentielles de dimension impaire $2n+1$ munie d'une «structure de contact», i.e. une distribution d'hyperplans (qui n'est rien d'autre qu'un sous-fibré de rang $2n$ du fibré tangent TM) vérifiant en plus une propriété de «non-intégrabilité maximale», de laquelle on donnera une définition précise dans la suite.

Cette branche des mathématiques voit sa naissance, même si sous forme en peu implicite, dans [26]: ici, Lie introduit le concept de «transformation de contact» comme moyen pour étudier géométriquement les solutions d'une équation différentielle du premier ordre

$$F(x, u(x), u'(x)) = 0, \quad (1)$$

avec $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Étant donnée une solution u de l'équation (1), on peut considérer une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^3$ «canoniquement associée», i.e. données par $\gamma(x) = (x, u(x), p(x))$ où $p(t) = u'(t)$; d'autre part, l'association marche évidemment aussi bien dans l'autre sens, i.e. la deuxième coordonnée d'une courbe ainsi définie (i.e. une courbe qui est tangente à $F^{-1}(0)$ et un graphe au dessus de x) fournit une solution de (1). Autrement dit, chaque fonction u solution de (1) correspond de façon bijective à une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui est au même temps (1) contenue dans le niveau $F^{-1}(0)$ et (2) tangente à la distribution de plans $\eta = \ker(du - pdx)$. On peut clairement raisonner de même façon pour des équations différentielles *aux dérivées partielles* du premier ordre (i.e. quand on cherche des solutions $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ d'une équation du type $F(x, u(x), u'(x)) = 0$ avec $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n+1})$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u'(x)$ dénote donc le vecteur des dérivées partielles de u par rapport à x). Dans ce cas, il faut considérer les sous-variétés dans \mathbb{R}^{2n+1} données par l'image de $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, $L(x) = (x, u(x), u'(x))$: elles sont contenues dans le niveau $F^{-1}(0)$ et sont tangentes à la distribution $\eta = \ker(du - \sum_{i=1}^n p_i dx_i)$. Dans la littérature successive, on trouvera écrit que ces sous-variétés, i.e. γ et L , sont «legendriennes» pour la «structure de contact» η , sur \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^{2n+1} respectivement.

Ce point de vue nous permet alors d'avoir des informations sur les solutions de (1) en étudiant le comportement qualitatif des sous-variétés γ ou L associées. Plus précisément, Lie étudie dans [26] les transformations lisses $\phi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ qui préservent

la distribution η définie ci dessus et les appelle *transformations de contact*. L'avantage de cette formulation très astucieuse est le suivant: cette transformation ϕ envoie chaque sous-variété L contenue dans $F^{-1}(0)$ et tangente à η vers une sous-variété $L_1 = \phi(L)$ qui est contenue dans $F_1^{-1}(0)$, où $F_1 = F \circ \phi$, et tangente à $\phi_*\eta = \eta$ (ce qui assure que cette L_1 correspond à une solution u_1 de $F_1(x, u_1(x), u_1'(x)) = 0$). Alors, si on trouve une transformation de contact pour laquelle l'ensemble $F_1^{-1}(0)$ est «simple à décrire», on peut facilement décrire aussi le comportement globale des L_1 , donc celui des L (i.e. des solutions u de (1)).

On ne rentre pas dans les détails de [26] ici, puisque nous sommes intéressés par la géométrie de contact en soi, plutôt que par ses applications à l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre.

On peut à ce point commencer à parler en termes plus formels avec la définition suivante:

Définition 1.1. Soit M une $(2n+1)$ -variété lisse. On appelle *structure de contact* sur M une distribution de hyperplans (i.e. un sous-fibré vectoriel de rang $2n$ du fibré tangent de M) ξ qui vérifie la propriété suivante: pour chaque $p \in M$ il existe un voisinage U et un certain système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ sur U tels que $\xi|_U = \ker(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i)$. Pour simplicité, on dit que l'écriture $\xi = \ker(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i)$ vaut *localement*.

On appelle aussi *legendrienne* pour ξ toute sous-variété L de M de dimension n qui est tangente à ξ en tout point, i.e. telle que $T_p L \subset \xi_p$ pour tout $p \in L$.

Concrètement, les structures de contact sont donc toutes et seulement les distributions qui localement ressemblent aux distributions η décrites ci dessus en relation au travail de Lie. Autrement dit, une structure de contact peut être vue comme un atlas maximal sur M avec changement de coordonnées qui sont des *transformations de contact* au sens de Lie, i.e. qui préservent la structure de contact standard $\ker(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i)$ sur chaque ouvert des coordonnées locales. Si M est orientée, on peut aussi distinguer structures de contact *positive* et *negative* si les applications des coordonnées locales dans la définition ci dessus induisent respectivement la même orientation que celle de M ou celle opposée.

On souligne enfin que le sens du terme «non-intégrabilité» utilisé au début de cette section pour dénoter la propriété qui caractérise les structures de contact parmi les distributions de plans sera clarifié dans la section 4.

Étant donnée cette définition, il faut remarquer que l'étude de ce nouveau objet a vu depuis sa naissance un développement vers plusieurs directions, qui vont de l'étude d'exemples particuliers (mais très importants) de structures de contact à un étude d'un point de vue plus général, en utilisant des techniques provenant de la dynamique, de la géométrie symplectique, géométrie complexe et de beaucoup d'autre branches des mathématiques. En particulier, l'aspect topologique de la géométrie de contact, auquel nous sommes intéressés ici, a été pris en considération pour la première fois autour des années 1970 et a eu une vraie «explosion» à partir des années 1980, suite à l'introduction de nouveaux outils topologiques, dans un premier temps en dimension 3 et, récemment, aussi en dimension ≥ 5 . Ce développement très consistant est strictement lié au fait que, même si les structures de contact n'admettent aucun invariant local (en fait, d'après la définition 1.1 elles sont toutes localement isomorphes entre eux), il y a des phénomènes globaux qui sont étonnement *non triviaux*: le point de vue topologique permet donc focaliser l'attention sur ces comportements globaux pour mieux comprendre les propriétés «essentiels» des structures de contact.

Dans la suite, nous traiterons seulement quelques questions fondamentales en topologie de contact, en nous concentrant surtout sur la dimension 3. Ceci dit, il y a sûrement plein d'autres directions d'études très intéressantes et importantes qui ne seront pas couvertes ici pour des raisons pratiques de longueur. De plus, pour une meilleure clarté d'exposition, nous choisirons parfois un ordre de présentation des notions qui ne respecte pas exactement l'évolution historique des connaissances dans le domaine.

2 Le problème de l'existence en dimension 3 (et ≥ 5)

Vu le projet d'utiliser les structures de contact pour étudier la variété sous-jacente, le problème qui est le plus basique et fondamental est sans doute le suivant: étant donnée une variété M^{2n+1} , admet-elle des structures de contact? On commence ici par traiter le cas de dimension 3 et on fera ensuite un petit commentaire pour le cas de dimension ≥ 5 . Dans la suite toute variété M sera supposée *fermée*, i.e. compacte sans bord, sauf mention explicite.

Commençons par analyser un cas «simple» de 3-variété fermée: la sphère S^3 . Elle peut être vue de façon naturelle comme la sphère de norme 1 dans l'espace normé \mathbb{C}^2 . Ceci dit, sans doute S^3 n'est pas une sous-variété complexe de \mathbb{C}^2 puisque, par exemple, elle a dimension réelle impaire; plus précisément, TS^3 est un sous fibré réel de dimension 3 de $T\mathbb{C}^2$. On peut alors considérer le plus grand sous fibré *complexe* de $T\mathbb{C}^2$ qui est contenu dans TS^3 : il est donné simplement par $\xi := TS^3 \cap J(TS^3)$, où $J : T\mathbb{C}^2 \rightarrow T\mathbb{C}^2$ est l'application donnée par la différentielle de la multiplication complexe par i , i.e. la différentielle de $j : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $(z, w) \mapsto (iz, iw)$. Cette distribution de plans ξ est en effet une structure de contact sur S^3 .

Remarquons que la variété de contact (S^3, ξ) est un exemple très important en géométrie de contact, puisque le point de vue qu'on a donné ici voit évidemment son origine dans la géométrie complexe et est, donc, un exemple d'interaction avec cet domaine. Enfin, il faut ici souligner que l'idée de voir ξ comme distribution des «tangences complexes», i.e. comme le sous espace complexe $TS^3 \cap J(TS^3)$ contenu dans TS^3 , a ramené les chercheurs au concept de «remplissage symplectique», qui s'inscrit dans le problème très important (et encore ouvert) de comprendre quelles variétés de contact sont bord d'une variété symplectique.

Retournons maintenant à notre problème d'existence des structures de contact. On remarque que la simplicité de la description de la ξ ci-dessus est strictement liée au fait que S^3 est naturellement plongée dans \mathbb{C}^2 où on a un concept de *tangences complexes* bien défini.

En fait, il se trouve que l'existence des structures de contact en dimension 3 n'est pas une particularité liée à la «simplicité» de S^3 :

Théorème 2.1 (Martinet, [28]). *Toute 3-variété fermée admet au moins une structure de contact.*

La preuve originelle fournie par Martinet utilise un résultat de Lickorish [25] et Wallace [32] qui affirme que toute 3-variété fermée est obtenue à partir de S^3 par une «chirurgie» le long d'un entrelacs, i.e. une réunion disjointe de nœuds $K_1 \sqcup K_2 \sqcup \dots \sqcup K_m$. Ce qu'on appelle ici *chirurgie le long d'un nœud* K est, concrètement, l'opération de priver M d'un voisinage tubulaire $\mathcal{N}(K) \simeq S^1 \times \mathbb{D}$ de K et de coller à sa place un (autre) tore plein $T = S^1 \times \mathbb{D}$ via un difféomorphisme $\phi : \partial T \rightarrow \partial M$. Le résultat de Lickorish et Wallace a alors permis à Martinet de se ramener (avec un peu de travail) à l'existence d'une structure sur S^3 , qui peut donc être en peu considéré comme «exemple fondamental».

Une autre preuve très élégante qui vaut la peine d’être citée est celle fournie par Thurston-Winkelnkemper [30]; elle repose sur le concept, introduit par Alexander [1], de *décomposition* d’une 3-variété fermée *en livre ouvert*, idée qui est très importante en topologie de contact. On pourra consulter [14] sur ce sujet.

Il faut ici bien souligner que la structure de contact qui est créée via la construction de Martinet et celle de Thurston-Winkelnkemper appartient à une classe très particulière et sera appelée dans la suite «vibrillée»; voir la section 3.2 pour les détails.

Ceci étant dit, quel que soit la technologie utilisée pour la preuve et le type de structure de contact qui en sort, le théorème de Martinet est sans doute un résultat de fondamentale importance en géométrie de contact, puisqu’il répond positivement, au moins en dimension 3, au problème de l’existence de l’objet qu’on a défini dans la section 1.

En fait, comme Lutz a montré dans sa thèse, on peut même dire mieux:

Théorème 2.2 (Lutz, [27]). *Sur toute 3-variété fermée orientable, il existe une structure de contact dans chaque classe d’homotopie de distributions de plans coorientables (i.e. de distributions de plans η telles que le fibré quotient T^M/η est orientable).*

Ce résultat se trouve parfois dans la littérature sous le nom de théorème de Lutz-Martinet, puisqu’il est un renforcement du théorème de Martinet. En fait, il nous dit pas seulement qu’il existe au moins une structure de contact sur toute 3-variété fermée, mais aussi qu’il y en a au moins autant que les classes d’homotopie de distributions de plans coorientables.

Le problème de l’existence sur les variétés de dimension ≥ 5 est beaucoup plus compliqué, puisqu’il y a des obstructions homotopiques qui n’apparaissent pas en dimension 3. On renvoie le lecteur curieux à [12] et [6] qui ont constitué (jusqu’à l’an dernier) les meilleurs résultats d’existence, mais qui étaient cependant relatifs seulement à la dimension 5. Très récemment, le travail [3] de Borman-Eliashberg-Murphy résout le problème de l’existence pour toutes dimensions ≥ 5 , en montrant qu’en fait la seule obstruction à l’existence d’une structure de contact est de nature homotopique. Plus précisément, on peut trouver une structure de contact dans chaque classe d’homotopie de «structure presque de contact», i.e. d’un couple $(\eta, [\omega])$ avec η distribution de hyperplans sur M et $[\omega]$ classe «conforme» d’une 2-forme différentielle positive sur η . Ici avec le terme *classe conforme* on veut dénoter la classe de ω pour la relation $\omega' \sim \omega$ ssi $\omega' = f\omega$ pour un $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. Ceci est alors un problème de nature homotopique puisque des techniques de topologie algébrique nous aident à comprendre quand ces structures presque de contact existent sur une variété M^{2n+1} . Remarquons enfin que, comme on a déjà dit ci-dessus, que cette obstruction homotopique disparaît pour la dimension 3, i.e. M^3 admet toujours des structures presque de contact (et bien sûr des structures de contact aussi, d’après le théorème 2.1).

3 Classification à isotopie près

Vu le fait que chaque 3-variété fermée M est une variété de contact, une autre question qui se pose naturellement est la suivante: qu’est-ce qu’on peut dire sur l’espace $Cont(M)$ des structures de contact sur M ? Dès que notre point de vue topologique, plus précisément on se pose le problème suivant: quelle est la topologie de l’espace? On précise qu’on voit ici $Cont(M)$ comme sous-espace (avec la topologie induite) de l’espace $Distr(M)$ des distributions lisses des plans sur M , muni de la topologie C^∞ .

La question, ainsi posée, n'admet pas une réponse facile et, à ce moment, il n'y a pas de théorèmes très généraux sur le sujet, sauf pour ce qui concerne le $\pi_0(\text{Cont}(M))$, i.e. l'espace des composantes connexes de $\text{Cont}(M)$, qui sera objet des sections suivantes.

3.1 Théorème de Gray

Un premier pas vers la compréhension du $\pi_0(\text{Cont}(M))$ est le résultat suivant:

Théorème 3.1 (Gray, [19]). *Soit ξ_t , $t \in [0, 1]$, une famille lisse de structures de contact sur M . Il existe alors une isotopie ϕ_t , $t \in [0, 1]$, de M telle que $\phi_t^*(\xi_t) = \xi_0$.*

Ici, on appelle isotopie une application lisse $\phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\phi_t := \phi(\cdot, t)$ soit un difféomorphisme de M pour tout $t \in [0, 1]$.

Ce résultat affirme alors que les composantes connexes de l'espace $\text{Cont}(M)$ correspondent en fait aux classes d'isotopie des structures de contact, ce qui n'est absolument pas trivial (et pas vrai pour des distributions de plans quelconques, i.e. qui ne sont pas de contact). Autrement dit, on a changé le problème de l'étude des composantes connexes avec la question de quelles sont les classes d'isotopies de structures de contact, i.e. à partir de l'étude des homotopies parmi structures de contact on s'est ramené à l'étude de leurs isotopies: l'avantage est alors qu'en général être isotope est (au moins a priori) une condition plus facile à contrôler qu'être homotope.

Or, pour étudier ces classes d'isotopies, il faut cependant faire une distinction «qualitative» fondamentale entre deux classes de structures de contact: tendues et vrillées.

3.2 Dichotomie vrillée-tendue

3.2.1 Quelques mots sur les feuilletages caractéristiques des surfaces plongées

Soit ξ une distribution de plans sur M . Considérons aussi Σ une surface plongée dans M . On voit alors le fibré tangent à Σ comme un sous fibré du fibré tangent de M , i.e. $T\Sigma \subset TM$. On peut donc considérer l'intersection entre $T\Sigma$ et ξ , puisque les deux sont sous-fibrés de TM . On appelle ce sous-fibré $T\Sigma \cap \xi$ *feuilletage caractéristique* de Σ et on le note par $\Sigma(\xi)$.

Il s'agit en fait d'un feuilletage «singulier» sur Σ , c'est à dire que le sous fibré $T\Sigma \cap \xi$ n'est pas de rang constant 1 mais il y a des points à rang 2, qui sont appelés *points singuliers* de $\Sigma(\xi)$. Par contre, il y a clairement pas de point à rang 0 pour des raisons de dimension: pour tout $p \in \Sigma$, ξ_p et $T_p\Sigma$ sont deux sous espaces vectoriels de dimension 2 de T_pM , donc s'intersectent en au moins une droite.

Remarquons enfin que dans la petite explication du travail de Lie faite à la section 1, pour u qui varie dans l'ensemble des solutions de 1, les courbes γ dans le cas de dimension 3 et les sous-variétés L dans le cas de dimension ≥ 5 donnent les orbites (et les points singuliers) du feuilletage caractéristique $S(\eta)$, où $S := F^{-1}(0)$ et η est la structure de contact considéré par Lie sur \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}^{2n+1} .

3.2.2 Théorème de Bennequin et classification des structures vrillées

Considérons sur \mathbb{R}^3 les deux structures de contact suivantes:

1. Soit ξ_{std} définie par le noyau de $\alpha_{std} = dz - ydx$, où on utilise coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Cette structure de contact est dite *standard sur \mathbb{R}^3* , d'où l'indice *std*; la raison de cette nomenclature est le fait qu'elle correspond exactement au modèle local pour les structures de contact, selon la définition 1.1 donnée tout à l'heure.

2. Soit maintenant ξ_{ot} donnée par le noyau de $\alpha_{ot} = \rho \sin(\rho)d\theta + \cos(\rho)dz$, où on utilise ici les coordonnées polaires (ρ, θ, z) sur \mathbb{R}^3 ; un calcul facile montre qu'elle aussi est une structure de contact. On donnera une explication pour l'utilisation de l'indice ot dans la section 3.2.

Un des résultats clés en topologie de contact est le fait que ces deux structures de contact sont «substantiellement» différentes:

Théorème 3.2 (Bennequin, [2]). *Les structures de contact ξ_{std} et ξ_{ot} ne sont pas contactomorphes, i.e. il n'existe aucun difféomorphisme $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tel que $\phi_*\xi_{std} = \xi_{ot}$.*

Pour expliquer l'idée clé de ce résultat, on observe que pour la structure ξ_{ot} on peut trouver un disque Δ plongé dans \mathbb{R}^3 de sorte que son feuilletage caractéristique $\Delta(\xi_{ot})$ soit comme suit: le bord $\partial\Delta$ est entièrement constitué de points singuliers, il y a une singularité elliptique e au centre de Δ et toutes les autres orbites sortant de e arrivent jusqu'à $\partial\Delta$. Le disque Δ en question est simplement $\{(\rho, \theta, 0) | \rho \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^3$, et la figure 1 montre la structure de contact sur lui et le feuilletage caractéristique qu'en résulte.

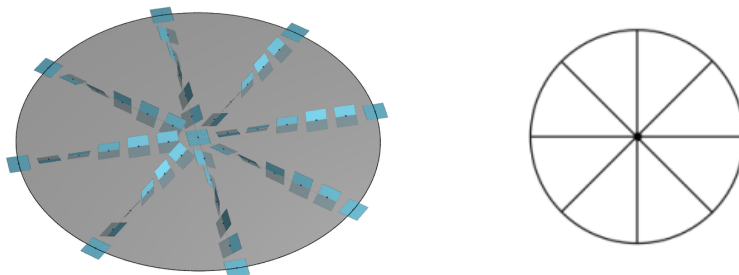


Figure 1: À gauche: un disque vrillé avec sa structure de contact (figure prise de la page professionnelle de Patrick Massot: <http://www.math.polytechnique.fr/perso/massot.patrick/>). À droite: feuilletage caractéristique correspondant.

Or, Bennequin a montré dans sa thèse [2] qu'un tel disque Δ n'existe pas dans \mathbb{R}^3 muni de la structure de contact ξ_{std} , ce qui implique qu'elle n'est pas contactomorphe à ξ_{ot} .

Cette idée d'étudier ce genre de disques plongés a été reprise par Eliashberg dans [8] pour le cas des 3-variétés fermées: il a en particulier donné le nom de *disque vrillé* à tout disque Δ plongé dans une variété de contact quelconque (M, ξ) et avec feuilletage caractéristique comme en figure 1. Il appelle alors *structure vrillée* une structure de contact ξ qui admet un disque vrillé plongé et *tendue* chaque ξ qui n'est pas non vrillée. Il se trouve alors que, dans le cas de 3-variété M fermée, la présence d'un tel disque vrillé pour la structure ξ considérée sur M donne un remarquable «phénomène de flexibilité»:

Théorème 3.3 (Eliashberg, [8]). *Deux structures de contact vrillées ξ et ξ' sont homotopes dans l'espace $Distr(M)$ si et seulement si elles le sont dans $Cont(M)$.*

On appelle ici *homotopie (entre ξ et ξ') dans un espace topologique X* une famille ξ_t , $t \in [0, 1]$, lisse en t , avec $\xi_0 = \xi$, $\xi_1 = \xi'$ et $\xi_t \in X$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Le théorème 3.1 de Gray dit en plus que l'homotopie parmi les structures de contact est en fait une isotopie. Autrement dit, on a ramené le problème de l'étude des classes

d'isotopies des structures de contact vrillées sur une M^3 fermée quelconque à une question purement homotopique; cet étude devient alors domaine de la topologie algébrique, qui fournit des moyens très efficaces pour trouver une classification explicite.

Remarquons enfin que le terme «flexibilité» utilisé ci dessus dénote exactement le fait que quand on parle de structures de contact vrillées toute l'information est en fait de nature homotopique, i.e. contenue dans la classe d'homotopie de la structure vue comme distribution de plans.

Or, qu'est ce qui se passe pour le cas de dimension ≥ 5 ? La définition qu'Eliashberg a donné dans [8] concerne exclusivement les 3-variétés. Plus précisément, un aspect très débattu qui a attiré l'intérêt de beaucoup de chercheurs dans le domaine était vraiment la recherche d'une définition «raisonnable» du terme *vrillé* pour des variétés de dimension impaire quelconque.

Le terme *raisonnable* signifie ici que la définition doit:

- être (relativement) simple à énoncer et à vérifier;
- permettre de montrer un résultat analogue au théorème 3.3, i.e. un résultat qui dit que les structures *vrillées* sont «plus simples» à classifier.

Il y a eu beaucoup de tentatives de définir un concept de vrillé qui respecte ceux deux propriétés et, enfin, deux très récent théorèmes, un dû à Borman-Eliashberg-Murphy, [3], et l'autre à Casals-Murphy-Prezas, [5], mettent un terme à cette recherche.

On ne rentre pas ici dans les détails (compliqués) de ces deux résultats, mais on précise quand-même brièvement les contributions de ces deux travaux à ce problème. Les auteurs de [3] donnent une première définition (compliquée) de vrillée et démontrent un résultat analogue au théorème 3.3. Ensuite, les auteurs de [5] montrent l'équivalence de cette définition avec des autres conditions plus simples à énoncer et vérifier (et qui ont des liens avec des autres définitions déjà apparues dans la littérature comme tentatives de définitions du concept de vrillé en toutes dimensions).

3.3 Structures tendues

La classification des classes d'isotopie des structures tendues est beaucoup plus complexe. Cette complexité est dû au fait que il n'y a plus le phénomène de flexibilité qu'on avait dans le cas vrillé, i.e. le problème ne peut pas être réduit simplement à une question homotopique.

Pour commencer, si d'une côté toute 3-variété admet une structure de contact vrillée pour le théorème 2.1 de Martinet (voir le comment qui suit le résultat) ou même pour le théorème 2.2 de Lutz-Martinet, ce n'est pas vrai que toute 3-variété admet une structure *tendue*:

Théorème 3.4 (Etnyre-Honda, [15]). *Il n'existe pas de structure de contact positive tendue sur la sphère d'homologie $\Sigma(2, 3, 5)$.*

La définition de la variété $\Sigma(2, 3, 5)$ n'est pas fondamentale pour notre présentation; la chose importante est en fait que l'exemple d'Etnyre-Honda dit que pour les structures de contact tendues il y a des autres obstructions que celles de nature homotopique. En particulier, on ne peut pas espérer de trouver une classification des classes d'isotopie aussi simple que celle trouvée pour le cas vrillé.

Ceci dit, il y a plusieurs résultats de classification pour des variétés «simples»; on ne veut pas rentrer dans les détails ici puisque la liste est en peu longue. Cependant, on doit sans doute citer les contributions très importantes suivantes:

1. Eliashberg, [9], donne une classification des structures de contact tendues sur \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.
2. Giroux, [18], et Honda, [22], [23], donnent indépendamment une classification des structures tendues sur le tore épais $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$, sur les fibrés en \mathbb{T}^2 au dessus de \mathbb{S}^1 (y inclus le tore \mathbb{T}^3) et des espaces lenticulaires (desquels on omet ici la définition). L'outil clé pour ces types de résultat de classification est la théorie des surfaces convexes, qui a été développée par Giroux dans [17]. Cette théorie dans le cas de la classification de Giroux est appliquée à l'étude «tomographique» des structures de contact (voir [18] pour les détails) et, dans le cas de la classification fournie par Honda, s'intègre avec des techniques d'attachements de rocares («bypass» en anglais; voir [22]). Pour une introduction très concise à ce type de techniques, le lecteur peut consulter les copies du cours [13] d'Etnyre.

Comme déjà dit, à part ces résultats pour des variétés (relativement) «simples», trouver une classification «intéressante» pour les structures tendues n'est pas un projet facile. Avec le terme *intéressante* on dénote un type de classification qui ne consiste pas seulement à énumérer les classes d'isotopie sur la variété qu'on étudie, mais une classification qui nous permet de comprendre les comportements *qualitatifs* des structures de contact dans chaque classe d'isotopie et qui nous explique *pourquoi* il y a exactement ces classes d'isotopie et pas d'autres, i.e. les raisons topologiques pour lesquelles la classification se présente ainsi. En fait, il y a eu dans la littérature des tentatives de trouver des classifications pour des variétés plus compliquées que celles écrites ci dessus, mais les résultats trouvés ont été presque toujours des tableaux d'invariants numériques qui classifient les structures tendues sur la variété en question mais qui, en fait, n'apportent pas grand chose à la compréhension des aspects *qualitatifs* du problème de la classification.

D'autre part, ce qu'on peut quand-même faire est trouver des invariants plus «profonds» qui, même s'ils ne donnent pas une classification complète, nous permettent de distinguer certaines structures de contact entre elles. On ne rentre pas dans les détails ici, mais on souligne qu'il y a des invariants algébriques (relativement) puissants qui viennent de la théorie symplectique des champs (SFT en anglais). Cette théorie a été introduite dans [10] par Eliashberg-Givental-Hofer, qui ont fait une utilisation massive des techniques de courbes «pseudo-holomorphes» dans les variétés symplectique introduite par Gromov dans [20], et constitue maintenant un domaine de recherche très active. Bien sûr, cet étude est conduite parallèlement d'un point de vue symplectique et de contact, ce qui en fait un outil très important pour étudier, par exemple, le problème des «cobordismes symplectiques», qui a connu beaucoup de développements pendant les dernières années.

On remarque enfin que les invariants algébriques associées à une variété de contact (M, ξ) via la SFT sont *triviales* dans le cas vrillé; voir [33] pour la dimension 3 et [4] pour celle ≥ 5 . La raison profonde de cette trivialité est à chercher dans le fait que les courbes pseudo-holomorphes sont des objets qui ont des «comportements rigides» qui sont en tous analogues à certains comportements des courbes holomorphes dans \mathbb{C}^n et qui sont strictement liés à la *géométrie* de la variété dans laquelle elles sont considérés (usuellement la symplectisation de (M, ξ)); elles ne peuvent donc pas «voir» les comportement «flexibles», i.e. tous ces comportements qui sont liés à des aspects purement homotopiques. Cependant, ceci n'est pas un point négatif de cette méthode: en fait, même si la SFT ne permet pas d'étudier les structures vrillée, trop flexibles, elle semble (la théorie est encore en cours de développement) être très utile dans l'étude des plus rigides structures tendues.

4 Quelques liens avec la théorie des feuilletages

On explique ici le mot «non-intégrabilité maximale» utilisé au début de la section 1 et on essaie de donner des liens avec la théorie des feuilletages de codimension 1. La référence principale dans cette section sera le texte [11] d'Eliashberg-Thurston.

Commençons par remarquer qu'il y a une définition de structure de contact qui est équivalente à celle donnée dans la section 1 et qui est plus souvent utilisée comme définition de départ dans la littérature moderne. Elle est donnée par le résultat suivant, dû à Darboux [7]:

Théorème 4.1 (Darboux). *Soit ξ une distribution d'hyperplans sur M^3 . Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. ξ est une structure de contact;
2. pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage U de p de sorte que $\xi|_U$ s'écrit comme $\ker(\alpha)$, où α est une 1-forme différentielle sur U vérifiant

$$\alpha \wedge d\alpha \neq 0 \text{ sur tout } U ; \tag{2}$$

3. pour tout point $p \in M$ et tout champs de vecteurs X, Y tangents à ξ au voisinage de p , $[X, Y]_p \notin \xi_p$, où $[X, Y]$ est le crochet de Lie de X et Y .

De plus, dans le point 2, on a $\alpha \wedge d\alpha > 0$ si et seulement si ξ est une structure de contact positive et $\alpha \wedge d\alpha < 0$ si et seulement si elle est négative.

Remarquons que si $\xi = \ker(\alpha) = \ker(\alpha')$ localement, alors $\alpha = f\alpha'$ avec $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En particulier, $\alpha' \wedge d\alpha' = f^2\alpha \wedge d\alpha$ et donc les conditions $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$, > 0 ou < 0 ne dépendent pas du choix de la 1-forme qui définit ξ ; autrement dit, la condition 2 a bien du sens.

La condition 3 (et donc les autres équivalentes aussi) est appelée parfois «condition de non-intégrabilité maximale». La raison pour cette nomenclature est le fait que ces trois conditions impliquent que la distribution de plans ξ est «non-intégrable en tout point», i.e. pour tout $p \in M$ il n'existe aucune surface Σ définie sur un voisinage U de p , qui passe par p et qui soit tangente à ξ en tout point $q \in \Sigma \cap U$.

Le lecteur qui connaît en peu de théorie des feuilletages, aura déjà remarqué le fait que cette propriété de non-intégrabilité des structures de contact est exactement à l'autre extrême de ce qui se passe avec les feuilletages: étant donnée une 3-variété M , une distribution de plans \mathcal{F} s'appelle *feuilletage* si pour tout point $p \in M$ il existe une surface Σ qui passe par p et qui soit localement intégrale pour \mathcal{F} , i.e. telle qu'il existe U voisinage de p de sorte que $T\Sigma_q \subset \mathcal{F}_q$ pour tout $q \in \Sigma \cap U$.

De plus, on peut aussi rappeler le suivant:

Théorème 4.2 (Frobenius). *Les énoncés suivants sont équivalents:*

1. \mathcal{F} est un feuilletage;
2. pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage U de p de sorte que $\mathcal{F}|_U$ s'écrit comme $\ker(\alpha)$, où α est une 1-forme différentielle sur U vérifiant $\alpha \wedge d\alpha = 0$ sur tout U .

La condition 2 du théorème 4.1 et la 2 du théorème 4.2 ont inspiré Eliashberg et Thurston, [11], à proposer une généralisation naturelle des concepts de feuilletages et structures de contact:

Définition 4.3. On appelle *feuilletact (positif)* une distribution de plans η sur M^3 qui vérifie la propriété suivante: pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage U de p tel que $\eta|_U$ s'écrit comme $\ker(\alpha)$, où α est une 1-forme différentielle sur U vérifiant $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$.

Il est intéressant de remarquer que, qualitativement, un feuilletact η donne une subdivision de M en deux parties $M_{\mathcal{F}}$ et M_{ξ} où il est, respectivement, un feuilletage et une structure de contact. Dans [11] on peut trouver des autres propriétés qualitatives (par exemple sur la structure de ces parties $M_{\mathcal{F}}$ et M_{ξ}), qui cependant seront omis parce que pas importants pour ce résumé.

Ce qu'il faut remarquer est plutôt que ce nouveau point de vue permet en fait de mieux comprendre les liaisons entre l'espace $Fol(M)$ des feuilletages de codimension 1 sur M et l'espace $Cont(M)$, où l'on considère les deux comme sous espace de l'espace des distributions de plans $Distr(M)$. Eliashberg et Thurston démontrent en particulier dans [11] un résultat d'approximation très remarquable:

Théorème 4.4 (d'approximation, Eliashberg-Thurston; [11]). *Soit \mathcal{F} un feuilletage C^2 sur M^3 fermée et orientée, différent du feuilletage $\mathcal{F}_0 = \mathbb{S}^2 \times \{*\}$ de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Alors \mathcal{F} peut être C^0 approximé par des structures de contact.*

Nous n'allons pas expliquer la nécessité de l'hypothèse de régularité C^2 , puisqu'elle est liée à un détail plutôt «technique» (mais qui joue un rôle très important en théorie des feuilletages, d'un point de vue dynamique et topologique). D'autre part, le fait d'exclure le feuilletage \mathcal{F}_0 n'est pas du tout une hypothèse technique pour la preuve. En fait, Eliashberg et Thurston ont aussi montré dans [11] que chaque feuilletact très C^0 -proche de \mathcal{F}_0 est difféomorphe à \mathcal{F}_0 (et, en particulier, il ne peut pas être une structure de contact).

Il faut aussi souligner qu'ici l'approximation fournie est en général seulement C^0 et pas C^r , pour $r > 0$. Autrement dit, ce résultat concerne seulement l'espace $Distr(M)$ muni de la topologie C^0 (avec $Fol(M)$, $Cont(M)$ munis de la topologie C^0 induite).

Ceci dit, il y a des cas particuliers de feuilletages pour lesquels on peut trouver pas seulement une approximation en régularité plus grande mais aussi ce qu'on appelle une *déformation lisse en structures de contact*, i.e. un chemin ξ_t , $t \in [0, 1]$, lisse en t , avec $\xi_0 = \mathcal{F}$ et ξ_t structure de contact pour tout $t \in (0, 1]$. Pour le lecteur qui connaît le concept d'holonomie linéaire en théorie des feuilletages, on peut énoncer le résultat précis suivant:

Théorème 4.5 (Eliashberg-Thurston, [11]). *Soit \mathcal{F} comme dans les hypothèses du théorème 4.4. Supposons en plus que chaque feuille fermée de \mathcal{F} admet une courbe avec holonomie linéaire non triviale. Alors, \mathcal{F} admet une déformation lisse en structures de contact.*

Comme dans le cas du théorème d'approximation, un meme résultat vaut si on remplace le feuilletage \mathcal{F} par un feuilletact.

Tout ça ouvre évidemment plein d'autres questions très intéressantes qui se situent à la limite entre topologie de contact et théorie des feuilletage; ceci dit, on ne rentrera pas ici dans les détails des plusieurs conséquences de ce nouveau point de vue. On cite (et commente brièvement) seulement un résultat très étonnant, dû à Vogel [31], qui met en évidence un phénomène très particulier qui concerne les approximations C^0 par des structures de contact:

Théorème 4.6 (Vogel). *Soit η un feuilletact C^2 vérifiant les propriétés suivantes:*

1. η n'est pas un feuilletage par cylindres;
2. η n'est pas un feuilletage par plans;
3. η n'admet aucune feuille difféomorphe au tore \mathbb{T}^2 .

Alors les structures de contact très C^0 proches à η sont uniquement déterminées à isotopie près, i.e. il existe un C^0 -voisinage \mathcal{U} de η tel que si $\xi_1, \xi_2 \in \text{Cont}(M) \cap \mathcal{U}$ alors ξ_1 et ξ_2 sont isotopes.

Pour ce qui concerne l'hypothèse de régularité C^2 , elle est encore une fois liée à un détail «technique». Pour ce qui concerne les hypothèses 1 et 2, d'après des résultats de Rosenberg [29] et Hector [21] on sait exactement quelles sont les variétés sur lesquelles un feuilletage par cylindres ou par plans existe; pour ces variétés on a en plus une classification explicite des classes d'isotopies des structures de contact (tendues), ce qui nous permet de conduire une analyse explicite des approximations de ces feuilletages par cylindres ou par plans.

Par contre, les feuilles toriques posent vraiment un problème pour l'unicité (à isotopie près) des approximations: on peut en fait fournir des contre-exemples au théorème de Vogel si on le considère sans l'hypothèse 3.

On remarque cependant que cette hypothèse peut être en peu affaiblie, à savoir on peut admettre l'existence de feuilles toriques mais on leur demande une holonomie linéaire non triviale; comme a bien souligné Vogel, même cette hypothèse en peu plus faible permet de montrer l'unicité à isotopie près des structures approchantes avec les mêmes techniques que celles utilisées dans le cas sans feuilles toriques.

Ceci dit, l'hypothèse de holonomie linéaire non triviale est plutôt restrictive et à ce moment, ce n'est pas encore trop clair jusqu'à quel point on peut affaiblir ultérieurement cette condition. Sans doute, réussir à comprendre l'effet de la présence de ces feuilles toriques sur les structures de contact approchantes nous mènerait à une meilleure connaissance des interactions entre feuilletages et structures de contact, ce qui est une question très fascinante et même très naturelle, d'après les résultats ci dessus.

References

- [1] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. volume 98, pages 93–95, 1923.
- [2] D. Bennequin. *Entrelacements et équation de Pfaff*. PhD thesis, Université de Paris VII, 1982.
- [3] M. S. Borman, Y. Eliashberg, and E. Murphy. Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions. arXiv:1404.6157.
- [4] F. Bourgeois and K. Niederkrüger. Towards a good definition of algebraically overtwisted. *Expositiones Mathematicae*, 28(1):85–100, 2010.
- [5] R. Casals, E. Murphy, and F. Presas. Geometric criteria for overtwistedness. arXiv:1503.06221.
- [6] R. Casals, D. M. Pancholi, and F. Presas. Almost contact 5-folds are contact. *Ann. Math.*, 182:1–62, 2015.
- [7] G. Darboux. Sur le problème de Pfaff. *Bull. Sci. Math.*, 6:14–36, 49–68, 1882.
- [8] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 98:623–637, 1989.

- [9] Y. Eliashberg. Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work. *Ann. Inst. Fourier*, 42:165–192, 1992.
- [10] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer. *Introduction to Symplectic Field Theory*, pages 560–673. Modern Birkhäuser Classics. 2010.
- [11] Y. Eliashberg and W. P. Thurston. *Confoliations*, volume 13 of *University Lecture Series*.
- [12] J. Etnyre. Contact structures on 5-manifolds. arXiv:1210.5208.
- [13] J. Etnyre. Convex surfaces in contact geometry: class notes. <http://people.math.gatech.edu/~etnyre/preprints/papers/surfaces.pdf>.
- [14] J. Etnyre. Lectures on open book decomposition and contact structures. <http://people.math.gatech.edu/~etnyre/preprints/papers/oblec.pdf>.
- [15] J. Etnyre and K. Honda. On the non-existence of tight contact structures. *Ann. Math.*, 153(3):749–766, 2001.
- [16] H. Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge studies in advanced mathematics. 2008.
- [17] E. Giroux. Convexité en topologie de contact. *Comment. Math. Helv.*, 66:637–677, 1991.
- [18] E. Giroux. Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces. *Invent. Math.*, 141(3):615–689, 2000.
- [19] J. W. Gray. Some global properties of contact structures. *Ann. Math.*, 69(59):421–450.
- [20] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82:307–347, 1985.
- [21] G. Hector. Feuilletages en cylindres. *Lecture Notes in Math.*, 597:252–270, 1977.
- [22] K. Honda. On the classification of tight contact structures I. *Geom. Topol.*, 42:309–368, 2000.
- [23] K. Honda. On the classification of tight contact structures II. *J. Differential Geom.*, 55:83–143, 2001.
- [24] Y. Kanda. The classification of tight contact structures on the 3-torus. *Anal. and Geom.*, 52:413–438, 1997.
- [25] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Annals of Math.*, 76(2):531–540, 1962.
- [26] S. Lie. Zur Theorie partieller Differentialgleichungen. *Göttiger Nachrichten*, page 480, 1872.
- [27] R. Lutz. *Sur quelques propriétés des formes différentielles en dimension trois*. PhD thesis, 1971.
- [28] J. Martinet. Formes de contact sur les variétés de dimension 3. volume 209 of *Proc. Liverpool Singularities Sympos. II*, pages 142–163. Springer-Verlag, 1971.
- [29] H. Rosenberg. Foliations by planes. *Topology*, 7:131–138, 1968.

- [30] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper. On the existence of contact forms. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 52:345–347, 1975.
- [31] T. Vogel. Uniqueness of the contact structure approximating a foliation. arXiv:1302.5672.
- [32] A. H. Wallace. Modifications and cobounding manifolds. *Canad. J. Math.*, 12:503–528, 1960.
- [33] M. L. Yau and Appendix by: Eliashberg, Y. Vanishing of the contact homology of overtwisted contact 3-manifolds. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 1(2):211–229, 2006.