Introduction à la classification des systèmes d'Anosov

Gabriel Lellouch

1 Introduction **1**

2 Des systèmes d'Anosov **2**
2.1 Introduction aux systèmes hyperboliques 2
2.2 Systèmes d'Anosov 3
2.3 Quelques propriétés 4

3 De la classification de ces systèmes **5**
3.1 Quelques exemples connus 5
3.2 Le problème de la transitivité 6
3.3 Un exemple frappant 7

4 Un exemple : le théorème de Franks-Newhouse **8**

5 Bibliographie **9**

1 Introduction

Il est monnaie courante de considérer que les multiples travaux de Poincaré, à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ont signé l'acte de naissance des systèmes dynamiques : de nombreuses questions sur les équations différentielles issues de la mécanique céleste tout d'abord, puis des problèmes plus conceptuels et abstraits furent les objets d'étude de quantité de ses contemporains.

Très vite après l'essor de cette branche des mathématiques, et en particulier quand des questions d'ergodicité et de chaoticité se sont posées, on a commencé à s'intéresser à une classe de systèmes bien particulière, à savoir les systèmes présentant de l'hyperbolicité. En 1967, dans son article *Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature*, le mathématicien soviétique Dmitri Anosov définit ce qu'il appelle tout d'abord les *U-systems*. Plus tard, ces systèmes, qui sont les exemples les plus naturels de dynamiques hyperboliques, seront appelés *systèmes d'Anosov*.

C'est à ces systèmes d'Anosov, et plus précisément à leur classification, que nous allons ici nous intéresser. Ces systèmes ont en effet ouvert un domaine de recherche particulièrement actif de nos jours, et comme nous allons le voir, de nombreuses questions en apparence simples restent actuellement sans réponse.

2 Des systèmes d'Anosov

2.1 Introduction aux systèmes hyperboliques

Pour bien appréhender les systèmes d'Anosov tels que nous les définirons au paragraphe suivant, commençons par des considérations plus générales sur les dynamiques hyperboliques. Pour plus de détails, on renvoie à [1] ou [2].

Regardons tout d'abord une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, n'ayant aucune valeur propre complexe de module 1. Un exemple fréquemment donné est de considérer l'automorphisme de $\mathbb{R}^2$ s'écrivant sous la forme matricielle :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c'est l'exemple le plus simple dans $SL_2(\mathbb{Z})$, et nous verrons plus tard l'intérêt de considérer une matrice de $SL_n(\mathbb{Z})$).

Cette application A a deux droites propres correspondant à ses deux valeurs propres $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 < 1$. De fait, l'orbite positive sous A d'un point de la droite propre associée à λ_1 s'éloignera exponentiellement de l'origine, tandis qu'un point de la droite associée à λ_2 s'en rapprochera exponentiellement. Les autres points, eux, ont une trajectoire d'*hyperbole*.

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 2.1. *Soit f un difféomorphisme d'une variété M. On dit qu'un point fixe $x \in M$ de f est hyperbolique si la différentielle de f en x, notée $Df(x) : T_xM \to T_xM$, n'a pas de valeur propre de module* 1.

Une telle dénomination est motivée par le fait qu'on retrouve alors les phénomènes de contraction et de dilatation exponentielles qui donnent son nom à l'hyperbolicité. En effet, il est intéressant de remarquer qu'on a alors une décomposition du fibré tangent en x de la forme :

$$T_xM = E^s \oplus E^u$$

où E^s est la somme des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module inférieur strictement à 1, et E^u est la somme des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module supérieur strictement à 1.

Dans le cas d'un difféomorphisme $f : M \to M$, il sera naturel de vouloir généraliser cette notion d'hyperbolicité pour les points fixes à tout un sous-ensemble de M :

Définition 2.2. *Soit $f : M \to M$, et $K \subset M$ un compact invariant par f. Le compact K est dit hyperbolique s'il existe deux constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$, et une décomposition continue du fibré tangent à K de la forme $TM_K = E^s \oplus E^u$ en deux sous-fibrés invariants par Df, telles que pour tout $x \in K$,*

$$\forall u \in E^s(x), \forall n > 0, \|Df_x^n(u)\| \leq C\lambda^n \|u\|$$

$$\forall v \in E^u(x), \forall n > 0, \|Df_x^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

2.2 Systèmes d'Anosov

Au paragraphe précédent, nous avons donc présenté quelques cas où l'on parle d'hyperbolicité pour les difféomorphismes. C'est dans ce cadre-là que l'on définit les *difféomorphismes d'Anosov*, et on renvoie à [2] ou [3] pour plus de précisions.

Définition 2.3. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'une variété M compacte connexe. On dit que f est un difféomorphisme d'Anosov si M est un ensemble hyperbolique.*

Autrement dit, f est un difféomorphisme d'Anosov s'il existe une décomposition $TM = E^u \oplus E^s$ du fibré tangent telle que :
(i) $E^u(x)$ et $E^s(x)$ dépendent continûment de $x \in M$
(ii) $E^u(x)$ et $E^s(x)$ sont invariants par Df_x, c'est-à-dire que pour tout $x \in M$, on a

$$E^s(f(x)) = Df_x(E^s(x)) \quad et \quad E^u(f(x)) = Df_x(E^u(x))$$

(iii) il existe des constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour tout $x \in M$,

$$\forall u \in E^s(x), \forall n > 0, \|Df_x^n(u)\| \leq C\lambda^n \|u\|$$

$$\forall v \in E^u(x), \forall n > 0, \|Df_x^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

On appelle E^s le *fibré stable*, et E^u le *fibré instable*.

En dynamique, on s'intéresse habituellement à deux grandes classes d'objets : les systèmes discrets (type difféomorphismes), et les systèmes à temps continu (c'est-à-dire les champs de vecteurs). L'hyperbolicité, et en particulier le caractère Anosov, que nous avons définie uniquement pour les difféomorphismes, peut s'adapter également aux champs de vecteurs. En particulier, on définit les *flots d'Anosov* :

Définition 2.4. *Un champ de vecteurs X sur une variété compacte M définit un flot dit d'Anosov s'il existe une décomposition de la forme $TM = E^s \oplus \mathbb{R}X \oplus E^u$, avec les conditions d'invariance, de contraction et d'expansion uniformes comme dans le cas des difféomorphismes.*

Par rapport au cas discret, on rajoute donc une composante correspondant à la direction du flot.

Terminons ce paragraphe par un résultat, sans doute le plus fondamental, sur ces systèmes d'Anosov. Le théorème suivant est appelé *théorème des variétés invariantes* et énonce que les sous-fibrés stable et instable sont intégrables. Plus précisément, énonçons-le dans le cas d'un difféomorphisme d'Anosov, et laissons au lecteur le soin de transposer le théorème au cas des flots :

Théorème 2.1. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov de classe C^r. Soit, pour $x \in M$ et $\epsilon > 0$,*

$$\mathcal{F}_x^s(\epsilon) = \{y \in M \text{ } t.q. \text{ } d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \text{ } pour \text{ } n > 0\}$$

et

$$\mathcal{F}_x^s = \{y \in M \text{ } t.q. \text{ } d(f^n(x), f^n(y)) \to 0\}.$$

Alors il existe $\epsilon > 0$, tel que pour tout $x \in M$, les propriétés suivantes soient vérifiées :
(i) $\mathcal{F}^s_x(\epsilon)$ est un disque de classe C^r,
(ii) $\{\mathcal{F}^s_x(\epsilon)$ pour $x \in M\}$ est une famille continue pour la topologie C^1,
(iii) $T_x\mathcal{F}^s_x(\epsilon) = E^s(x)$,
(iv) $\mathcal{F}^s_x(\epsilon) \subset \mathcal{F}^s_x$,
(v) $\mathcal{F}^s_x = \bigcup f^{-n}(\mathcal{F}^s_{f^n(x)}(\epsilon))$ est une immersion injective de E^s dans M.

On trouvera une preuve de ce théorème dans [4].

Autrement dit, ce théorème donne l'existence de deux feuilletages, qui intègrent les sous-fibrés stable et instable. C'est donc le point de départ de toute la théorie des systèmes d'Anosov, dont un tel résultat rend l'étude beaucoup plus géométrique et topologique.

Il est à noter que dans le cas des flots, on obtient ainsi l'existence de non plus deux, mais quatre feuilletages : on a le feuilletage stable fort (resp. instable fort), qui intègre le fibré E^s (resp. E^u), mais aussi le feuilletage centre stable (resp. centre instable), qui intègre le fibré $E^s \oplus \mathbb{R}X$ (resp. $E^u \oplus \mathbb{R}X$).

2.3 Quelques propriétés

Avant d'aborder les thématiques actuelles en matière de systèmes d'Anosov, commençons par présenter quelques propriétés marquantes qui justifient leur étude. En dynamique, on s'intéresse souvent à des questions de stabilité, ou de sensibilité aux conditions initiales, et de ces points de vue, les systèmes d'Anosov présentent des caractéristiques étonnantes. Pour les preuves des résultats ci-dessous, lire [3] ou [5].

Tout d'abord, et on eût pu s'en douter, les systèmes d'Anosov sont extrêmement chaotiques, c'est-à-dire très sensibles aux conditions initiales : ceci est bien sûr dû aux composantes instables sur lesquelles les distances sont exponentiellement dilatées.

Néanmoins, il est remarquable de constater certains phénomènes de stabilité qui viennent contrebalancer cet aspect chaotique. En particulier, on a la propriété suivante, appelée C^1*-stabilité structurelle* des systèmes d'Anosov, que nous énonçons ici dans le cas des difféomorphismes et qui s'adapte aussi aux flots :

Proposition 2.2. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov. Alors f est C^1-structurellement stable, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}_f \subset Diff^1(M)$ de f tel que pour tout $g \in \mathcal{U}_f$, il existe un homéomorphisme $h_g : M \to M$ avec $g = h_g f h_g^{-1}$.*

(Dans le cas des flots, l'équivalence est une "équivalence orbitale", c'est-à-dire que l'homéomorphisme h_g envoie orbites de f sur orbites de g, en préservant l'orientation, mais sans nécessairement préserver le temps)

Autrement dit, si l'on considère un système d'Anosov, alors tous les systèmes suffisamment proches de ce système seront aussi des systèmes d'Anosov, et lui seront topologiquement conjugués (c'est-à-dire que ce sont les mêmes systèmes à un changement de coordonnées près).

Ce résultat est très fort ! Par exemple, il en découle qu'à conjugaison topologique près, les systèmes d'Anosov sont en nombre dénombrable. C'est le fait qu'il y ait ainsi relativement peu de tels systèmes qui motive l'espoir de pouvoir les classifier, problème auquel nous nous intéresserons dans la section suivante.

Une autre propriété des plus frappantes est le résultat connu sous le nom de *shadowing lemma*, ou lemme de pistage, ou lemme de poursuite. Donnons tout d'abord quelques définitions.

On considère un difféomorphisme $f : M \to M$, où M est munie d'une métrique d.

Définition 2.5. *Une suite $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de points de M est une ϵ-pseudo-orbite de f si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $d(x_{i+1}, f(x_i)) < \epsilon$.*

Définition 2.6. *On dit que le point $x \in M$ δ-trace (ou piste) une suite $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de points de M si pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $d(f^i(x), y_i) < \delta$.*

Alors le *shadowing lemma* énonce que :

Théorème 2.3. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov. Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que toute ϵ-pseudo-orbite de f soit δ-pistée par un point de M.*

Autrement dit, imaginons que l'on veuille calculer les itérés d'un Anosov à l'aide d'un ordinateur. À chaque étape, un ordinateur effectuant des calculs approximatifs, le point n'est pas exactement l'image du précédent, mais un point proche. C'est-à-dire qu'on obtient précisément une pseudo-orbite f. On pourrait penser que les erreurs vont se multiplier, et que le résultat final sera très éloigné d'une orbite de f. Pourtant, le *shadowing lemma* affirme que la suite obtenue sera proche d'une véritable orbite de f.

Le caractère chaotique des difféomorphismes d'Anosov doit donc être mis en rapport avec ce *shadowing lemma*. Notons que, dans l'ordre logique des choses, c'est à partir du *shadowing lemma* que l'on peut montrer la C^1-stabilité structurelle des difféomorphismes d'Anosov.

3 De la classification de ces systèmes

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe précédent, il y a "relativement peu" de systèmes d'Anosov. Il est donc naturel de chercher à tous les comprendre, ou au moins à les classifier à conjugaison topologique près : c'est à ce problème que nous allons ici nous intéresser.

Cette classification des systèmes d'Anosov apparaît en fait beaucoup plus complexe qu'on aurait pu l'imaginer, et comme nous allons le voir maintenant, certaines questions en apparence très simples restent encore aujourd'hui des problèmes ouverts.

3.1 Quelques exemples connus

Puisque nous attaquons le problème de la classification des Anosov, il est peut-être temps de donner des exemples de tels systèmes. Commençons par construire quelques systèmes d'Anosov sur les tores $\mathbb{T}^n$. Nous verrons dans la suite qu'il est en fait difficile d'imaginer un exemple plus simple.

Considérons une matrice A de $SL_n(\mathbb{Z})$, dont les valeurs propres sont de module différent de 1. Un exemple typique a été présenté plus haut. Regardons le difféomorphisme $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Il induit la décomposition $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, où E^s est la somme directe des espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de f de module strictement inférieur à 1, et E^s est la somme directe des espaces caractéristiques correspondant aux valeurs propres de f de module strictement supérieur à 1 ; et de fait, il existe des constantes $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que

$$\forall u \in E^s, \forall n > 0, \|A^n(u)\| \leq C\lambda^n \|u\|$$

$$\forall v \in E^u, \forall n > 0, \|A^{-n}(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

Maintenant, A descend en un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^n$. De fait, la décomposition de $\mathbb{R}^n$ induit une décomposition du fibré tangent à $\mathbb{T}^n$, et les inégalités précédentes sont conservées : $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ est donc un difféomorphisme d'Anosov du tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n.

Un tel système est appelé *automorphisme hyperbolique du tore.*

Aujourd'hui, on sait classifier les difféomorphismes d'Anosov sur les tores, depuis un article de John Franks (voir [6]). Dans cet article, Franks cherche en particulier des conditions pour pouvoir conjuguer de tels difféomorphismes à des systèmes connus, en l'occurence les automorphismes hyperboliques du tore.

Mais l'intérêt de considérer les automorphismes hyperboliques du tore va bien au-delà de la classification des Anosov du tore. En effet, on peut conjuguer de nombreux systèmes, sur des variétés *a priori* très diverses, à ces automorphismes : un exemple éclairant est le théorème de Franks-Newhouse, dont on trouvera une preuve classique dans [7], et une preuve nouvelle que nous présenterons plus en détail dans la dernière section.

Définition 3.1. *Un difféomorphisme d'Anosov est dit de codimension 1 si le fibré instable ou le fibré stable a pour dimension 1.*

Le théorème de Franks-Newhouse énonce alors que :

Théorème 3.1. *Soit $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov. Si f est de codimension 1, alors f est conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore.*

3.2 Le problème de la transitivité

Historiquement, le théorème de Franks-Newhouse présenté ci-avant est issu de deux résultats. Le premier, dû à Franks en 1969 (voir [8]), énonce que :

Théorème 3.2. *Tout difféomorphisme d'Anosov, de codimension 1, transitif, est conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore.*

Un an plus tard, en 1970 dans [9], c'est Newhouse qui montre que :

Théorème 3.3. *Les difféomorphismes d'Anosov de codimension 1 sont transitifs.*

Le théorème de Franks-Newhouse cache donc une question des plus importantes que l'on se pose dans le cadre de cette classification : les systèmes d'Anosov sont-ils transitifs ? Rappelons qu'un système dynamique est dit *transitif* dès lors qu'il existe un point d'orbite dense.

Cette question de la transitivité reste aujourd'hui ouverte. Mais le cadre est légèrement différent selon que l'on s'intéresse aux difféomorphismes ou aux champs de vecteurs.

Dans le cadre des difféomorphismes, on sait qu'il existe des Anosov transitifs : les automorphismes hyperboliques du tore par exemple. Mais c'est même pire que ça :

Question : Existe-t-il un difféomorphisme d'Anosov non transitif ?

Et bien on ne sait pas.

Dans le cadre des flots, c'est à la fois plus simple et plus compliqué. Plus simple car on dispose de résultats précis et assez généraux sur cette question. Ainsi, un théorème dû à Verjovsky (voir [10]) énonce que :

Théorème 3.4. *En dimension supérieure à* 4*, les flots d'Anosov de codimension* 1 *sont transitifs.*

Le théorème de Newhouse pourrait-il s'adapter au cas des flots ? Malheureusement non :

Théorème 3.5. *En dimension 3, il existe un flot d'Anosov non transitif.*

Ce résultat est dû à Franks et Williams ([11]). Ils construisent directement un flot d'Anosov, sur une variété de dimension 3 (donc le flot est forcément de codimension 1), non transitif. Ceci montre qu'en un sens, les flots restent fondamentalement différents des difféomorphismes, et hélas aujourd'hui, encore plus difficilement compréhensibles.

3.3 Un exemple frappant

Terminons cette section par une remarque assez étonnante qui montre qu'aujourd'hui, les systèmes d'Anosov restent des objets d'étude pour lesquels des questions simples se posent encore.

Question : Existe-t-il des systèmes d'Anosov sur des variétés simplement connexes ?

Cette question, à l'heure actuelle, n'est pas résolue.

On voit donc bien que les systèmes d'Anosov sont à l'heure actuelle une thématique de recherche particulièrement intéressante pour les dynamiciens, dans la mesure où l'on connaît à la fois peu et beaucoup de choses à leur sujet. De nombreux problèmes en apparence simples restent ouverts, et pourtant, on n'hésite pas à aller aujourd'hui beaucoup plus loin que ces questions, ou à grandement complexifier les problématiques.

4 Un exemple : le théorème de Franks-Newhouse

Terminons cette présentation par un exemple plus détaillé de ce qu'on peut faire aujourd'hui dans le cadre de cette classification des systèmes d'Anosov. Nous allons donner le plan d'une nouvelle preuve du théorème de Franks-Newhouse, et ainsi nous aurons un aperçu des outils et raisonnements qui peuvent être utilisés dans ce domaine de recherche.

Rappelons l'énoncé de ce théorème :

Théorème de Franks-Newhouse : Tout difféomorphisme d'Anosov de codimension 1 est conjugué à un automorphisme hyperbolique du tore.

Cette nouvelle preuve va se faire en trois temps :
1) Un résultat préliminaire concernant l'holonomie des feuilletages de l'Anosov.
2) L'obtention du revêtement universel de la variété.
3) La construction de l'automorphisme du tore recherché.

C'est au point 1) que nous allons davantage nous intéresser, car il met en lumière un outil très important : l'holonomie des feuilletages. Commençons par donner la définition de cette notion :

Définition 4.1. *Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages transverses. Soit γ un chemin inclus dans une feuille L de $\mathcal{F}$. Un homéomorphisme $h : U \to V$, où U est un voisinage connexe de $\gamma(0)$ dans $\mathcal{G}_{\gamma(0)}$, et V est un voisinage connexe de $\gamma(1)$ dans $\mathcal{G}_{\gamma(1)}$, est appelé homéomorphisme d'holonomie le long de γ s'il existe une application $\Gamma : U \times [0,1] \to M$, continue, telle que :*
(i) $\forall z \in U$, $\{\Gamma(z,t), t \in [0,1]\}$ *soit un chemin dans $\mathcal{F}_z$ joignant z à $h(z)$,*
(ii) $\forall t \in [0,1]$, $\Gamma(\gamma(0), t) = \gamma(t)$,
(iii) $\forall t \in [0,1], \{\Gamma(z,t), z \in U\} \subset \mathcal{G}_{\gamma(t)}$.

Autrement, l'existence d'un homéomorphisme d'holonomie est équivalente à l'existence d'un rectangle biffeuilleté s'appuyant sur les feuilles passant par $\gamma(0)$ des deux feuilletages.

Cette situation s'applique parfaitement aux difféomorphismes d'Anosov ! En effet, rappelons qu'en vertu du théorème des variétés invariantes, à tout difféomorphisme d'Anosov sont associés deux feuilletages (le stable et l'instable), qui plus est transverses. On peut donc, si l'on dispose de chemins inclus dans une feuille, considérer leur holonomie.

Un exemple de résultat que l'on peut obtenir concernant l'holonomie des feuilletages d'un difféomorphisme d'Anosov est ce résultat récent, dû à V.Kleptsyn et Y.Kudryashov en 2013 (voir [12]) :

Théorème 4.1. *Soit M une variété connexe compacte, $f : M \to M$ un difféomorphisme d'Anosov de classe C^1 sur M. Notons $\mathcal{F}^s$ et $\mathcal{F}^u$ ses feuilletages stable et instable.*

Alors il existe un chemin γ_∞, contenu dans une feuille instable $\mathcal{F}^u_{\gamma_\infty(0)}$, avec $\gamma_\infty(0) \neq \gamma_\infty(1)$, et un homéomorphisme d'holonomie $h : \mathcal{F}^s_{\gamma_\infty(0)} \to \mathcal{F}^s_{\gamma_\infty(1)}$ de $\mathcal{F}^u$ le long de γ_∞ défini sur toute la feuille stable passant par $\gamma_\infty(0)$.

Autrement dit, il existe un chemin d'holonomie *globalement définie* (i.e. sur toute la feuille passant par son extrêmité).

L'holonomie est un outil très utilisé dès lors qu'on travaille avec des systèmes d'Anosov, et très appréciable dans la mesure où il rend la compréhension de la chose beaucoup plus topologique et visuelle : il ne s'agit que de considérer des chemins, et de "quadriller" notre variété par des morceaux de feuilles stables et instables. C'est un atout dans la théorie des systèmes d'Anosov rendu possible par l'existence de ces feuilletages.

Ainsi, pour revenir à cette nouvelle preuve du théorème de Franks-Newhouse, c'est de ce dernier résultat d'existence d'une holonomie globale que nous allons partir. En effet, on peut alors exhiber facilement le revêtement universel de la variété en utilisant cet homéomorphisme d'holonomie globalement défini. Cette étape ne nécessite aucune théorie particulière autre que des notions de base de topologie algébrique. Comme on peut s'y attendre, le revêtement universel a une structure de produit.

Pour conclure la preuve, il reste à déterminer le groupe fondamental de la variété, grâce au revêtement universel obtenu, qui s'avère être un $\mathbb{Z}^m$, comme pour le tore. On utilise alors les formes communes entre les groupes fondamentaux de la variété et du tore pour construire directement l'automorphisme recherché, et vérifier que l'Anosov de départ lui est bien conjugué.

Si nous avons rapidement évoqué les étapes de cette nouvelle preuve, c'est pour bien mettre en lumière le fait que les outils utilisés peuvent être finalement assez élémentaires : des bases en topologie algébrique et en géométrie différentielle, mais au niveau de la théorie des systèmes d'Anosov, il n'y a que très peu de choses à savoir pour démontrer un résultat assez fondamental. C'est l'un des attraits de ce domaine de recherche : un aspect "visuel" très important, et des prérequis relativement restreints (bien entendu, ce n'est qu'un exemple et de nombreux résultats aujourd'hui prouvés nécessitent un bagage nettement plus important !).

5 Bibliographie

[1] Katok A. et Hasselblatt B. *Introduction to modern theory of dynamical systems.* Cambridge University Press, 1995.

[2] Palis J. et De Melo W. *Geometric theory of dynamical systems : an introduction.* Springer, 1982.

[3] Matsumoto S. *Codimension one Anosov flows.* Lectures Notes Series, 27, 1995.

[4] Hirsch M. et Pugh C. et Shub M. *Invariant manifolds.* Springer, 1977.

[5] Bowen R. *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.* Springer-Verlag, 1975.

[6] Franks J. Anosov diffeomorphisms on tori. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969.

[7] Hiraide K. A simple proof of the Franks-Newhouse theorem on codimension-one Anosov diffeomorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2001.

[8] Franks J. Anosov diffeomorphisms. *Global Analysis*, 1968.

[9] Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, 1970.

[10] Verjovsky A. Codimension one Anosov flows. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1974.

[11] Williams B. et Franks J. Anomalous Anosov flows. *Global theory of dynamical systems*, 1979.

[12] Kleptsyn V. et Kudryashov Y. A curve in the instable foliation of an Anosov diffeomorphism with globally defined holonomy. *Ergodic theory and Dynamical systems*, 2013.