# Introduction au domaine de recherche : Étude de solutions ondes progressives pour certaines EDP non dispersives

Louise Gassot
Sous la direction de Patrick Gérard

Octobre 2017

## Introduction

Pour modéliser des phénomènes naturels, nous avons souvent recours aux équations aux dérivées partielles. D'un point de vue mathématique, la vue d'une équation aux dérivées partielles soulève immédiatement quelques questions : y a-t-il des solutions, et de quelle régularité ? Une solution éventuelle est elle unique pour une condition initiale donnée ? Pour aller plus loin, on peut aussi s'intéresser à des problèmes de stabilité.

Pour une certaine classe d'équations, les équations dispersives, on dispose d'une méthode spécifique afin de répondre à ces questions. Intéressons-nous en particulier à une équation issue de la mécanique quantique, l'équation de Schrödinger (non-linéaire, cubique, focalisante)

$$i\partial_t u - \Delta u = |u|^2 u, \tag{NLS}$$

où $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$, et $M$ est une variété riemanienne. Il s'agit d'une équation dispersive dans les cas les plus courants, par exemple, lorsque $M = \mathbb{R}^d$, $1 \leq d \leq 4$, et $\Delta$ est le laplacien usuel.

En changeant la géométrie, c'est-à-dire la variété $M$ sur laquelle on se place, on peut se demander comment évolue le comportement qualitatif des solutions de l'équation de Schrödinger (NLS) : que se passe-t-il lorsque $M = \mathbb{S}^d, \mathbb{H}^d, \mathbb{T}^d$, etc. [15] ? Il peut arriver que, selon le choix de $M$, les propriétés de dispersion disparaissent complètement [17], et alors nous n'avons même plus l'assurance que des solutions régulières existent. L'enjeu de mon mémoire de M2, effectué avec Patrick Gérard, est de construire puis d'étudier des solutions sous forme d'ondes progressives pour certaines équations non dispersives, afin de mieux comprendre les solutions de l'équation de Schrödinger dans le cas non dispersif.

## Table des matières

# 1 Contexte

## 1.1 Qu'est-ce qu'une équation dispersive ?

La notion de dispersion trouve son origine en physique pour des équations différentielles linéaires. Considérons une onde plane progressive harmonique

$$u(x,t) = Ae^{i(k\cdot x - \omega t)},$$

$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, solution d'une équation différentielle linéaire. On désigne par $A$ l'amplitude de $u$, $k \in \mathbb{R}^d$ son vecteur d'onde et $\omega = \omega(k)$ la pulsation correspondante. L'équation différentielle vérifiée par $u$ devient simplement une relation entre $k$ et $\omega$, appelée *relation de dispersion*, qui permet d'exprimer $\omega$ comme une fonction de $k$.

La vitesse de phase de l'onde est $v_\varphi = \frac{\omega}{\|k\|^2}k$, où $\|k\|$ est la norme $L^2$ de $k$ dans $\mathbb{R}^d$, et la vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. On dit qu'il y a *dispersion* lorsque $\omega = \omega(k)$ est réel, et $\det\left((\frac{\partial^2\omega}{\partial k_i \partial k_j})_{1\leq i,j\leq d}\right) \neq 0$ [16]. Cela traduit le fait que la vitesse de groupe dépend de $k$, et donc que la vitesse de phase ne dépend pas de façon affine de $k$.

Par exemple, pour l'équation de Schrödinger linéaire sur $\mathbb{R}^d$

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \tag{S}$$

la relation de dispersion devient $\omega = \|k\|^2$. Alors $(\frac{\partial^2\omega}{\partial k_i \partial k_j})_{1\leq i,j\leq d} = 2I_d$ est de déterminant non nul, l'équation de Schrödinger linéaire est donc dispersive.

En revanche, pour l'équation de transport sur $\mathbb{R}$

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \tag{T}$$

la relation de dispersion est $\omega = k$, il s'agit donc d'une équation non dispersive.

Lorsqu'il y a dispersion, les différentes fréquences spatiales $k$ de l'onde vont s'étaler au cours du temps, ce qui n'est pas le cas pour une équation non dispersive comme l'équation de transport.

## 1.2 L'équation de Schrödinger : une équation dispersive ?

D'un point de vue mathématique, la dispersion peut s'interpréter comme une décroissance de la solution dans certaines normes à cause de l'étalement des fréquences selon les différentes directions d'espace. Observons ce qui se passe pour l'équation de Schrödinger linéaire. Pour une condition initiale $u_0$ donnée, soit $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}.$$

Il est assez facile de trouver une expression de $u$ en utilisant la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ en $x$ lorsque celle-ci est bien définie : pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, la solution $u$ est donnée par

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathscr{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2}\mathscr{F}(u_0)) \\ &= \mathscr{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2}) \star u_0. \end{aligned}$$

Or, pour $t > 0$, la transformée de Fourier inverse de la gaussienne $e^{-i|\xi|^2}$ vaut

$$\mathscr{F}^{-1}(e^{-i|\xi|^2}) = \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{\pi^{d/2}}{t^{d/2}}e^{-id\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{|x|^2}{4t}},$$

donc

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}^d}e^{-id\frac{\pi}{4}}\int_{y\in\mathbb{R}^d} e^{i\frac{|x-y|^2}{4t}}u_0(y)\,\mathrm{d}y.$$

En notant $e^{it\Delta}u_0 := u(t,\cdot)$, on obtient alors une *inégalité de dispersion* de la forme

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{\sqrt{t}^d}\|u_0\|_{L^1_x(\mathbb{R}^d)},$$

où $C$ est une constante strictement positive. Plus généralement, on peut montrer des inégalités de dispersion pour les normes $\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p_x(\mathbb{R}^d)}$ avec $p > 2$ en fonction d'autres normes de $u_0$. On peut même majorer certaines normes $\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^q_t L^p_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}$ simplement en fonction de la norme $L^2_x(\mathbb{R}^d)$ de $u_0$, ce qui est le cas le plus utile en pratique ; ces majorations sont appelées *inégalités de Strichartz.*

Ce comportement est à mettre en opposition avec ce qui se passe pour l'équation de transport

$$\partial_t u + \partial_x u = 0,$$

dont les solutions $u(t,x) = u_0(x-t)$ ne peuvent pas vérifier d'inégalité de dispersion, puisqu'elles ont les même normes au temps $t$ que la condition initiale $u_0$.

L'étude habituelle de l'équation de Schrödinger cubique (NLS)

$$i\partial_t u - \Delta u = |u|^2 u, u = u(t,x), (t,x) \in \mathbb{R}\times M$$

se base sur la propriété de dispersion, et l'existence d'inégalités de Strichartz. En effet, pour résoudre localement le problème de Cauchy associé à une condition initiale $u_0$, la technique consiste à montrer que l'on peut appliquer un théorème de point fixe à la fonction

$$u \mapsto e^{-it\Delta}u_0 + \frac{1}{i}\int_0^t e^{-i(t-s)\Delta}(|u|^2u)(s)\,\mathrm{d}s$$

dans un espace de Banach $X$ bien choisi. La fonction est contractante de $X$ dans $X$ pour un temps petit grâce aux inégalités de Strichartz, et alors le point fixe de cette fonction est une solution de l'équation de Schrödigner (NLS). Ensuite, on peut se servir de la conservation de la masse $\|u\|_{L^2_x(M)}$ et de l'énergie $E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2_x(M)} - \frac{1}{4}\|u\|^4_{L^4_x(M)}$ de $u$ pour éventuellement l'étendre en une solution globale (définie pour tout $t \in \mathbb{R}$), par exemple lorsque la donnée initiale est de petite masse. Cela permet dans la plupart des cas de définir un flot régulier en temps :

**Définition 1.** *Soit $s \geq 0$. On dit que l'équation* (NLS) *est bien posée avec un flot régulier sur $H^s(M)$ si, pour tout ouvert borné $B$ de $H^s(M)$, il existe $T > 0$ et un espace de Banach $X_T$, inclus continûment dans $\mathcal{C}([-T,T],H^s(M))$, tels que*

- *Pour toute donnée initiale $u_0 \in B$, il existe une unique solution $u \in X_T$ de* (NLS) *telle que $u(t=0) = u_0$;*
- *Si $u_0 \in H^\sigma(M)$ pour $\sigma > s$, alors $u \in \mathcal{C}([-T,T],H^\sigma(M))$;*
- *L'application $u_0 \in B \mapsto u \in X_T$ est lisse.*

Réciproquement, s'il existe un flot régulier en temps pour l'équation de Schrödinger (NLS) sur $M$, alors on doit avoir des inégalités de Strichatz [4] :

**Théorème 1.** *Si l'équation* (NLS) *est bien posée avec un flot régulier dans $H^s(M)$ pour un $s \geq 0$, alors pour tout $r > s$, on a l'inégalité de type Strichartz*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^4([0,1]\times M)} \leq C(r)\|u_0\|_{H^{r/2}(M)}.$$

Il a néanmoins été montré [17] que, pour les solutions radiales de l'équation de Schrödinger associée au sous-laplacien sur le groupe de Heisenberg $\mathbb{H}^1$, la dispersion disparaissait complètement. Il en est de même pour une version simplifiée, l'équation de Schrödinger-Grushin, dans les espaces de Sobolev associés $H^s_G$. En effet, il ne peut pas y avoir d'inégalités de Strichartz pour $r < 2$ pour la première équation [3] et pour $r < \frac{3}{2}$ pour la seconde [4], alors qu'il est naturel de se placer dans l'espace d'énergie (respectivement $H^1(\mathbb{H}^1)$ et $H^1_G$, correspondant à $s = 1$) dans ce contexte. Par conséquent, les preuves classiques utilisées pour étudier l'équation de Schrödinger tombent en défaut dans ces cas de figure.

## 1.3 Les équations en jeu

Nous nous intéresserons ici en particulier à deux équations. La première est l'équation de Schrödinger cubique associée au sous-laplacien sur le groupe de Heisenberg. Le groupe de Heisenberg est noté $\mathbb{H}^1 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_s$, avec $z = x + iy$. En ce qui concerne notre étude, il faut essentiellement penser que la solution dépend de quatre variables : le temps $t$, et trois variables réelles $x, y$ et $s$. L'équation s'écrit

$$i\partial_t u - \Delta_{\mathbb{H}^1} u = |u|^2 u. \tag{H}$$

On se restreindra aux solutions radiales, c'est-à-dire telles que $u(t,x,y,s) = u(t, \sqrt{x^2+y^2}, s)$. L'opérateur $\Delta_{\mathbb{H}^1}$ s'appelle le sous-laplacien sur le groupe de Heisenberg. Lorsque la fonction $u$ est radiale, il s'exprime sous la forme

$$\Delta_{\mathbb{H}^1} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + (x^2+y^2)\partial_s^2.$$

Les solutions $u(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ sont cherchées à valeurs dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{H}^1)$, où les $H^s(\mathbb{H}^1)$ sont les espaces de Sobolev sur le groupe de Heisenberg

$$H^s(\mathbb{H}^1) := \{f \in L^2(\mathbb{H}^1); \|f\|_{H^s(\mathbb{H}^1)} < +\infty\},$$

avec

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{H}^1)} := \|f\|^2_{L^2(\mathbb{H}^1)} + \|(-\Delta_{\mathbb{H}^1})^{s/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{H}^1)}.$$

La deuxième équation est une version simplifiée de la première, dans le sens où l'on a enlevé une variable : il s'agit de l'équation de Schrödinger-Grushin (cubique, focalisante) sur $\mathbb{R}^2$ :

$$i\partial_t u - Gu = |u|^2 u, \tag{G}$$

où

$$G = \partial_x^2 + x^2 \partial_y^2$$

est l'opérateur de Grushin. On considérera des solutions $u = u(t,x,y)$ à valeurs dans l'espace d'énergie $H^1_G$, où les $H^s_G$ sont les espaces de Sobolev adaptés à l'opérateur de Grushin

$$H^s_G := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2); \|f\|_{H^s_G} < +\infty\},$$

avec

$$\|f\|^2_{H^s_G} := \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|(-G)^{s/2} f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

les espaces de Sobolev $H^s_G$ étant plus adaptés dans ce contexte que les espaces de Sobolev usuels $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Le premier problème auquel nous sommes confrontés est : comment construire des solutions de ces équations ? Une méthode possible, que nous employons dans la suite, est la recherche de solutions ondes progressives.

Les solutions ondes progressives ont déjà été étudiées [12], [13] pour une équation similaire, non dispersive dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$, appelée équation de demi-onde

$$\begin{cases} i\partial_t u + |D_x| u = |u|^2 u \\ u(t=0) = u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \end{cases}. \tag{HW}$$

On a noté $D_x = -i\partial_x$ l'opérateur qui correspond à la multiplication par $\xi$ en variable de Fourier, et $|D_x|$ l'opérateur qui correspond à la multiplication par $|\xi|$ en variable de Fourier :

$$\mathscr{F}(|D_x| f) := |\xi| \mathscr{F}(f).$$

C'est en nous basant sur les résultats obtenus pour l'équation de demi-onde que nous étudierons le comportement des ondes progressives pour les équations (G) et (H).

## 2 Ondes progressives

### 2.1 Définition

La notion d'onde progressive apparait pour la première fois dans la littérature en 1834, alors qu'un ingénieur écossais, John Scott Russell, observait le mouvement d'un nouveau type d'onde à la surface d'un canal. Cette onde semblait garder sa forme tout en parcourant plusieurs kilomètres sans faiblir ni ralentir. Ce n'est néanmoins qu'à partir des années 1960 que l'on a pris la mesure de l'intérêt des ondes progressives en tant qu'état stable essentiel pour certaines équations non linéaires. On retrouve maintenant des ondes progressives dans de nombreux domaines tels que l'hydrodynamique, l'optique, la biologie moléculaire, la météorologie, la physique des particules, la mécanique quantique, les plasmas, etc. [8].

Nous nous intéressons aux solutions ondes progressives pour les équations (HW), (G) et (H), que l'on définit de la façon suivante.

**Définition 2** (Onde progressive)**.** *Une solution $u$ de* (HW) *est appelée onde progressive s'il existe un profil $Q$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ et des réels $\omega$ et $\beta$ tels que, pour tous réels $t, x$ et $y$,*

$$u(t,x) = e^{-i\omega t} Q(x+\beta t).$$

*Une solution $u$ de* (G) *est appelée onde progressive s'il existe un profil $Q$ dans $H^1_G$ et des réels $\omega$ et $\beta$ tels que, pour tous réels $t, x$ et $y$,*

$$u(t,x,y) = e^{-i\omega t} Q(x, y+\beta t).$$

*De même, une solution $u$ de* (H) *est appelée onde progressive s'il existe un profil $Q$ dans $H^1(\mathbb{H}^1)$ et des réels $\omega$ et $\beta$ tels que, pour tous réels $t, x$ et $y$,*

$$u(t,x,y) = e^{-i\omega t} Q(x, y, s+\beta t).$$

*Le réel $\beta$ est la vitesse de l'onde progressive, et $\omega$ est sa fréquence.*

En construisant les solutions, on va voir plus précisément que dans les trois cas, il existe des ondes progressives de vitesse $\beta$ pour tout $\beta \in ]-1,1[$, et on va les écrire sous la forme suivante :

— pour (HW) : $u(t,x) = e^{-it} Q_\beta\left(\frac{x+\beta t}{1-\beta}\right)$

— pour (G) : $u(t,x,y) = e^{-it} Q_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta}}, \frac{y+\beta t}{1-\beta}\right)$

— pour (H) : $u(t,x,y,s) = Q_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{1-\beta}}, \frac{y}{\sqrt{1-\beta}}, \frac{s+\beta t}{1-\beta}\right)$.

Les équations vérifiées par les solutions $u$ deviennent des équations en les profils $Q_\beta$, qui ne dépendent donc plus du temps :

— pour (HW) : $\frac{|D_x|-\beta D_x}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$

— pour (G) : $-\frac{G+\beta D_y}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$

— pour (H) : $-\frac{\Delta_{\mathbb{H}^1}+\beta D_s}{1-\beta} Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$.

### 2.2 Construction

Décrivons brièvement la méthode de construction de solutions pour l'équation de demi-onde (HW). Les inégalités de Gagliardo-Nirenberg permettent de déduire que, pour tout $\beta \in ]-1,1[$, l'infimum

$$I_\beta := \inf_{u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\big((|D|-\beta D)u, u\big)\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^4}^4}$$

est strictement positif. On peut voir qu'à un changement d'échelle $Q \rightsquigarrow \lambda Q(\lambda^2 x)$ près, les minimiseurs éventuels $Q_\beta \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ de $I_\beta$ sont solutions de l'équation que l'on cherchait à étudier

$$\frac{|D_x|-\beta D_x}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta.$$

Il reste encore à montrer que ces minimiseurs existent, c'est-à-dire que l'infimum est effectivement atteint. Pour cela, on considère une suite minimisante, et on se sert d'un résultat de compacité, le théorème de décomposition en profils [7] [5] [6], pour en extraire une sous-suite convergente.

De même, on construit des solutions ondes progressives de vitesse $\beta \in ]-1,1[$ pour l'équation de Schrödinger-Grushin (G) à partir d'une suite minimisante pour

$$I_\beta(G) := \inf_{u \in H^1_G \setminus \{0\}} \frac{\big(-(G+\beta D_y)u,u\big)^{3/2}\|u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^4}^4}.$$

Le fait que cet infimum est strictement positif vient de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1_G \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^2)$ [18]. La compacité pour la suite minimisante est garantie par une version du théorème de décomposition en profils adaptée à l'espace $H^1_G$. Les minimiseurs vérifient, à un changement d'échelle $Q \rightsquigarrow \lambda Q(\lambda x, \lambda^2 y)$ près, l'équation

$$-\frac{G+\beta D_y}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta.$$

Enfin, on construit de la même façon des solutions ondes progressives de vitesse $\beta \in ]-1,1[$ pour l'équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg (H) à partir d'une suite minimisante pour

$$I_\beta(H) := \inf_{u \in H^1(\mathbb{H}^1) \setminus \{0\}} \frac{\big(-(\Delta_{\mathbb{H}^1}+\beta D_s)u,u\big)^{2}}{\|u\|_{L^4}^4}.$$

Le fait que cet infimum est strictement positif vient de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1(\mathbb{H}^1) \hookrightarrow L^4(\mathbb{H}^1)$. La compacité est garantie par une version du théorème de décomposition en profils adaptée à l'espace $H^1(\mathbb{H}^1)$ [1]. Les minimiseurs de $I_\beta(H)$ vérifient l'équation

$$-\frac{\Delta_{\mathbb{H}^1}+\beta D_s}{1-\beta} Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$$

au changement d'échelle $Q \rightsquigarrow \lambda Q(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 s)$ près.

### 2.3 Une équation limite

La vitesse des ondes progressives construites vérifie : $-1 < \beta < 1$. Que se passe-t-il lorsque l'on fait tendre cette vitesse vers 1 ? La réponse est connue dans le cas de la demi-onde. Intuitivement, comme le profil $Q_\beta$ vérifie

$$\frac{|D_x|-\beta D_x}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta,$$

alors en cas de convergence de la suite $(Q_\beta)_\beta$, le terme $\frac{|D_x|-\beta D_x}{1-\beta} Q_\beta$ reste borné. Par conséquent, la fonction $Q_\beta$ doit se concentrer sur les endroits où $|D_x| = D_x$, c'est-à-dire les fréquences positives en Fourier. C'est en effet ce qui se passe.

Posons

$$H^{\frac12}_+(\mathbb{R}) := \{u \in H^{\frac12}(\mathbb{R}); \operatorname{Supp}(\mathscr{F}(u)) \subset \mathbb{R}_+\},$$

et $\Pi_+$ le projecteur de Szegő, c'est-à-dire le projecteur orthogonal de $H^{\frac12}(\mathbb{R})$ sur $H^{\frac12}_+(\mathbb{R})$. Alors [13]

**Proposition 1.** *Pour tout $\beta < 1$, soit $Q_\beta \in H^{\frac12}$ un minimiseur pour $I_\beta$. Alors il existe une fonction $Q^+ \in H^{\frac12}_+$ et une famille $(x_\beta)_{\beta<1}$ de réels tels que, à une sous-suite extraite près,*

$$Q_\beta(\cdot - x_\beta) \underset{\beta \to 1}{\longrightarrow} Q^+ \text{ fortement dans } H^{\frac12}(\mathbb{R}).$$

*La fonction $Q^+$ satisfait l'équation*

$$D_x Q^+ + Q^+ = \Pi_+(|Q^+|^2 Q^+). \tag{$HW_{\text{lim}}$}$$

*De plus, $Q^+$ minimise*

$$I^+ := \inf_{u \in H_+^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{(Du,u)\|u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^4}^4}.$$

La fonction $Q^+$ correspond à une onde progressive pour une équation appelée l'équation de Szegő

$$i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u), \tag{Sz}$$

il suffit en effet de poser $u(t,x) = e^{-it}Q^+(x-t)$.

On montre des résultats similaires pour les deux équations (G) et (H).

Pour l'équation (G), soit $\mathscr{F}_y$ la transformée de Fourier selon la variable $y$, et $\eta$ la variable de Fourier correspondante. De même que pour l'équation de demi-onde, la fonction $Q_\beta$ étant solution de

$$-\frac{G + \beta D_y}{1-\beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta,$$

pour que la suite $(Q_\beta)_\beta$ puisse converger, il faudrait qu'elle concentre autour de l'espace des fonctions telles que $-G = D_y$. On peut montrer que cet espace correspond à

$$V_0^+(G) := \{u \in H_G^1; \mathscr{F}_y(u)(x,\eta) = f(\eta) e^{-\eta x^2/2} \chi(\eta \geq 0)\},$$

et sur $V_0^+(G)$ on a aussi $-G = D_y = |D_y|$. Notons $\Pi_0^+$ le projecteur orthogonal sur $V_0^+(G)$. On a le résultat suivant [2] :

**Proposition 2.** *Pour tout $\beta < 1$, soit $Q_\beta \in H_G^1$ un minimiseur pour $I_\beta(G)$. Alors il existe une fonction $Q^+ \in V_0^+(G)$ et une famille $(y_\beta)_{\beta<1}$ de réels tels que, à une sous-suite extraite près,*

$$Q_\beta(\cdot, \cdot - y_\beta) \underset{\beta \to 1}{\longrightarrow} Q^+ \text{ fortement dans } H_G^1.$$

*La fonction $Q^+$ satisfait l'équation*

$$D_y Q^+ + Q^+ = \Pi_0^+(|Q^+|^2 Q^+). \tag{$G_{\text{lim}}$}$$

*Elle minimise*

$$I^+(G) := \inf_{u \in V_0^+(G) \setminus \{0\}} \frac{(|D_y|u,u)^{3/2}\|u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^4}^4}.$$

Ce résultat est encore vrai pour l'équation (H). Soit $\mathscr{F}_s$ la transformée de Fourier selon la variable $s$, et $\sigma$ la variable de Fourier correspondante. Posons

$$V_0^+(\mathbb{H}^1) := \{u \in H^1(\mathbb{H}^1); \mathscr{F}_s(u)(x,y,\sigma) = f(\sigma) e^{-\sigma(x^2+y^2)/2} \chi(\sigma \geq 0)\},$$

espace sur lequel $-\Delta_{\mathbb{H}^1} = D_s = |D_s|$. On note encore $\Pi_0^+$ le projecteur orthogonal sur $V_0^+(\mathbb{H}^1)$. Dans ce cas, on a [2] :

**Proposition 3.** *Pour tout $\beta < 1$, soit $Q_\beta \in H^1(\mathbb{H}^1)$ un minimiseur pour $I_\beta(H)$. Alors il existe une fonction $Q^+ \in V_0^+(\mathbb{H}^1)$ et une famille $(s_\beta)_{\beta<1}$ de réels et une famille $(\alpha_\beta)_{\beta<1}$ de réels strictement positifs tels que, à une sous-suite extraite près,*

$$\alpha_\beta Q_\beta(\alpha_\beta \cdot, \alpha_\beta \cdot, \alpha_\beta^2(\cdot - s_\beta)) \underset{\beta \to 1^-}{\longrightarrow} Q^+ \text{ fortement dans } \dot{H}^1(\mathbb{H}^1).$$

*La fonction $Q^+$ satisfait l'équation*

$$D_s Q^+ = \Pi_0^+(|Q^+|^2 Q^+). \tag{$H_{\text{lim}}$}$$

*Elle minimise*

$$I^+(H) := \inf_{u \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^1) \cap V_0^+(\mathbb{H}^1) \setminus \{0\}} \frac{(|D_s|u,u)^2}{\|u\|_{L^4}^4}.$$

# 3 Quelques questions de stabilité

L'étude des équations limites que nous venons de déterminer est un bon point de départ pour tenter de mieux comprendre les équations d'origine. En particulier, elle permet parfois d'obtenir des informations sur la stabilité d'une solution. Si les résultats obtenus jusqu'ici étaient très similaires entre les trois équations, les spécificités de chaque équation vont maintenant se faire sentir, comme nous allons le voir dans cette partie.

## 3.1 Équation de demi-onde

L'étude de l'équation de Szegő (Sz), puis de ses interactions avec l'équation de demi-onde, conduit à des résultats tout à fait remarquables d'unicité et de stabilité.

Une première avancée dans ce cas est l'unicité des ondes solitaires minimisantes (c'est-à-dire construites comme des minimiseurs de $I^+$) pour l'équation de Szegő [9] :

**Proposition 4.** *Les minimiseurs de $I^+$ correspondant à des solutions de l'équation de Szegő ($HW_{\lim}$) sont de la forme*

$$Q^+(x) = \frac{e^{i\gamma}}{x + x_0 + \frac{i}{2}},$$

*où $\gamma \in \mathbb{T}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.*

L'unicité est valable aux paramètres $\gamma$ et $x_0$ près, ce qui est dû au fait que l'équation limite ($HW_{\lim}$)

$$D_x Q^+ + Q^+ = \Pi_+(|Q^+|^2 Q^+).$$

est invariante par les symétries par rotation (si $Q$ est une solution, alors $e^{i\gamma}Q$ aussi) et par translation en la variable $x$ (si $Q$ est une solution, alors $Q(\cdot - x_0)$ aussi).

Pour étudier la stabilité d'une solution $Q^+$, une possibilité est d'analyser le linéarisé autour de $Q^+$ :

$$\mathcal{L}h = D_x h + h - 2\Pi_+(|Q^+|^2 h) - \Pi_+((Q^+)^2 \overline{h}).$$

Pour l'équation de demi-onde, on peut montrer la coercivité du linéarisé en dehors des directions dégénérées $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(Q^+, \partial_x Q^+)$ (dues aux symétries de l'équation). En particulier [11], il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $h \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(Q^+, \partial_x Q^+)^\perp$,

$$(\mathcal{L}h, h) \geq c\|h\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}.$$

De ce résultat, on déduit un grand nombre de propriétés d'unicité et de stabilité, non seulement pour l'équation de Szegő (Sz) mais aussi pour l'équation de demi-onde (HW). D'une part, on a la stabilité orbitale pour l'équation de Szegő [10] :

**Théorème 2** (Stabilité orbitale pour l'équation de Szegő)**.** *Il existe des constantes $\epsilon > 0$ et $C > 0$ telles que, pour toute fonction $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}_+(\mathbb{R})$ telle que $\|u_0 - Q^+\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq \epsilon$, alors la solution de l'équation de Szegő correspondante $u$ :*

$$\begin{cases} i\partial_t u = \Pi_+(|u|^2 u) \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

*vérifie*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \inf_{(\gamma, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}} \|e^{i\gamma} u(t, \cdot - x_0) - Q^+\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq C\|u_0 - Q^+\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}.$$

D'autre part, il est possible de remonter à l'équation de demi-onde. On peut montrer que les solutions de l'équation de demi-onde $Q_\beta$ sont uniques aux symétries par rotation et translation près lorsque la vitesse $\beta$ est suffisamment proche de 1. Par ailleurs, nous avons également des résultats de stabilité orbitale pour l'équation de demi-onde :

**Théorème 3** (Stabilité orbitale pour l'équation de demi-onde)**.** *Il existe $\beta_* \in ]-1,1[$ tel que, pour tout $\beta \in ]\beta_*, 1[$, il existe des constantes $\epsilon(\beta) > 0$ et $C(\beta) > 0$ telles que, pour toute fonction $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ telle que $\|u_0 - Q_\beta(\frac{\cdot}{1-\beta})\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq \epsilon(\beta)$, alors la solution de l'équation de demi-onde correspondante $u$ :*

$$\begin{cases} i\partial_t u + |D_x|u = |u|^2 u \\ u(t=0) = u_0 \end{cases}$$

*vérifie*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{(\gamma,x_0)\in\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \left\|e^{i\gamma}u(t,\cdot - x_0) - Q_\beta(\frac{\cdot}{1-\beta})\right\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})} \leq C(\beta)\left\|u_0 - Q_\beta(\frac{\cdot}{1-\beta})\right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})}.$$

## 3.2 Équation de Schrödinger-Grushin

Les choses sont plus décevantes pour l'équation limite correspondant à l'équation de Schrödinger-Grushin.

Il faudrait également prouver que le linéarisé autour d'une solution $Q^+$

$$\mathcal{L}h := D_y h + h - 2\Pi_0^+(|Q^+|^2 h) - \Pi_0^+((Q^+)^2\overline{h})$$

est inversible en dehors des directions dégénérées, mais ce problème reste encore ouvert. La grande différence par rapport à l'équation de demi-onde est la nature du projecteur $\Pi_0^+$. En effet, le projecteur de Szegő $\Pi_+$, qui projette sur les fonctions à fréquences de Fourier positives, est beaucoup plus simple à comprendre que le projecteur $\Pi_0^+$. Par ailleurs, l'unicité des solutions minimisantes $Q^+$ est connue dès le départ pour l'équation limite correspondant à l'équation de demi-onde ($HW_{\text{lim}}$), ce qui n'est pas le cas pour ($G_{\text{lim}}$).

## 3.3 Équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg (solutions radiales)

En revanche, pour l'équation de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg, mon mémoire de M2 a permis d'obtenir certains résultats qui vont dans le sens de ceux pour la demi-onde [2].

Tout d'abord, nous parvenons à montrer l'unicité des ondes solitaires minimisantes :

**Proposition 5.** *Les minimiseurs de $I^+(H)$ solutions de l'équation ($H_{\text{lim}}$) sont de la forme*

$$Q^+(x,y,s) = \frac{e^{i\gamma}\sqrt{\alpha}}{s + s_0 + i\frac{x^2+y^2}{2} + i\alpha},$$

*où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma \in \mathbb{T}$ et $s_0 \in \mathbb{R}$.*

Cette fois-ci, il y a trois paramètres $\alpha, \gamma$ et $s_0$ en raison de l'invariance de l'équation ($H_{\text{lim}}$) par trois symétries : rotation, translation selon la variable $s$ et changement d'échelles $u \mapsto \lambda u(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 s)$. Par défaut, on note $Q^+$ la solution correspondant au choix de paramètres $(\alpha, \gamma, s_0) = (1, 0, 0)$.

La connaissance complète des minimiseurs permet de montrer un premier résultat de stabilité :

**Proposition 6.** *On pose, pour $u \in \dot{H}^1(\mathbb{H}^1) \cap V_0^+$,*

$$\delta(u) := \left|(D_s u, u) - (D_s Q^+, Q^+)\right| + \left|\|u\|^4_{L^4(\mathbb{H}^1)} - \|Q^+\|^4_{L^4(\mathbb{H}^1)}\right|.$$

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\dot{H}^1(\mathbb{H}^1) \cap V_0^+)^{\mathbb{N}}$ des fonctions radiales. Si $\delta(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, quitte à extraire une sous-suite, il existe des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un angle $\gamma \in \mathbb{T}$ tels que*

$$\left\|u_n - \frac{e^{i\gamma}}{\sqrt{\alpha_n}} Q^+\Big(\frac{\cdot}{\sqrt{\alpha_n}}, \frac{\cdot}{\sqrt{\alpha_n}}, \frac{1}{\alpha_n}(\cdot + s_n)\Big)\right\|_{\dot{H}^1(\mathbb{H}^1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour aller plus loin, regardons le linéarisé autour d'une solution $Q^+$

$$\mathcal{L}h := D_s h - 2\Pi_0^+(|Q^+|^2 h) - \Pi_0^+((Q^+)^2 \overline{h}).$$

Il n'est pas forcément coercif ici, mais on peut néanmoins montrer qu'il est défini positif en dehors des directions dégénérées :

**Proposition 7.** *Pour toute fonction $h$ dans $Vect_{\mathbb{C}}(Q^+, \partial_s Q^+)^\perp$ non identiquement nulle,*

$$(\mathcal{L}h, h) > 0.$$

Comme pour l'équation de demi-onde et de Schrödinger-Grushin, on s'appuye sur l'existence d'un prolongement holomorphe des fonctions de $H_+^{\frac{1}{2}}$, $V_0^+(G)$ ou $V_0^+(\mathbb{H}^1)$ au demi-plan complexe $\mathbb{C}_+$ grâce à des variantes du théorème de Paley-Wiener [14]. Il s'agit ensuite ici d'utiliser correctement les théorèmes usuels d'analyse complexe et d'étudier quelques inégalités.

On peut alors espérer faire une étude similaire à la demi-onde afin de décrire les solutions $Q_\beta$ pour $\beta$ proche de 1. Néanmoins, les démonstrations pour l'équation de demi-onde (HW) n'aident plus directement à la compréhension de l'équation (H).

# Conclusion

Notre étude, basée sur des résultats pour l'équation de demi-onde et ses similarités avec les équations non dispersives en jeu ici, a permis de montrer l'existence de solutions globales sous forme d'ondes progressives de vitesse $\beta \in ]-1, 1[$ des équations de Schrödinger-Grushin (G)

$$i\partial_t u - Gu = |u|^2 u$$

et de Schrödinger sur le groupe de Heisenberg (H)

$$i\partial_t u - \Delta_{\mathbb{H}^1} u = |u|^2 u.$$

Ces solutions ont été construites à partir de solutions minimisantes pour les équations

$$-\frac{G + \beta D_y}{1 - \beta} Q_\beta + Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$$

pour (G), et

$$-\frac{\Delta_{\mathbb{H}^1} + \beta D_s}{1 - \beta} Q_\beta = |Q_\beta|^2 Q_\beta$$

pour (H). Enfin, on a pu en tirer un comportement asymptotique en faisant tendre la vitesse $\beta$ des ondes progressives vers la vitesse limite 1. Néanmoins, nous ne disposons pas de résultat d'unicité des solutions pour les équations de départ (G) et (H).

Une approche possible pour répondre à cette question nous invite à nous intéresser d'abord aux équations limites $(G_{\lim})$

$$D_y Q + Q = \Pi_0^+(|Q|^2 Q)$$

et $(H_{\lim})$

$$D_s Q = \Pi_0^+(|Q|^2 Q).$$

La question ouverte qui se pose alors est l'inversibilité ou non du linéarisé associé à ces équations limites autour de solutions minimisantes dans les directions non dégénérées.

La réponse est satisfaisante pour l'équation de (H). On peut alors espérer faire une étude similaire à celle de la demi-onde afin de décrire les solutions $Q_\beta$ pour $\beta$ proche de 1 (notamment de montrer leur unicité) pour ensuite s'intéresser aux questions de stabilité orbitale.

Néanmoins, les problèmes de non dégénérescence du linéarisé et de stabilité restent largement ouverts pour l'équation de Schrödinger-Grushin (G).

# Références


[1] J. Benameur. Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev sur le groupe de Heisenberg. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 15 :599–624, 2008.

[2] L. Gassot. Étude de solutions ondes progressives pour des équations de type Grushin et Heisenberg. *Mémoire de M2*, 2017.

[3] P. Gérard ; S. Grellier. L'équation de Szegö cubique. *Séminaire X-EDP, École Polytechnique*, 2008.

[4] P. Gérard ; S. Grellier. The cubic Szegö equation. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 43(5) :761–810, 2010.

[5] P. Gérard. Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 3 :213–233, 1998.

[6] T. Hmidi ; S. Keraani. Blowup theory for the critical nonlinear Schrödinger equations revisited. *International Mathematics Research Notices*, 2005(46) :2815, 2005.

[7] T. Cazenave ; P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, 85(4) :549–561, 1982.

[8] R.K. Dodd ; J.C. Eilbeck ; J.D. Gibbon ; H.C. Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations.* Academic Press, 01 1982.

[9] O. Pocovnicu. Traveling waves for the cubic Szegö equation on the real line. *Anal. PDE*, 4(3) :379–404, 2011.

[10] O. Pocovnicu. Étude d'une équation non linéaire, non dispersive et complètement intégrable et de ses perturbations. *Thèse de doctorat sous la direction de Patrick Gérard*, 2011.

[11] O. Pocovnicu. Soliton interaction with small Toeplitz potentials for the Szegö equation on the real line. *Anal. PDE*, 4(3) :379–404, 2013.

[12] J. Krieger ; E. Lenzmann ; P. Raphaël. Nondispersive solutions to the L2-critical Half-Wave Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 209(1) :61–129, 2013.

[13] P. Gérard ; E. Lenzmann ; O. Pocovnicu ; P. Raphaël. A Two-Soliton with Transient Turbulent Regime for the Cubic Half-wave Equation on The Real Line. Submitted in 2016, arXiv :1611.08482.

[14] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, 3rd Ed.* McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1987.

[15] N. Burq ; P. Gérard ; N. Tzvetkov. Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Inventiones mathematicae*, 159(1) :187–223, 2005.

[16] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons Inc., New York, 1999.

[17] H. Bahouri ; P. Gérard ; C.-J. Xu. Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg. *Journal d'Analyse Mathématique*, 82(1) :93–118, Dec 2000.

[18] J.-Y. Chemin ; C.-J. Xu. Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 30(6) :719–751, 1997.