Introduction au domaine de recherche : Représentations de groupes de surface

Alexis Gilles

8 décembre 2015

Table des matières

0.1 Introduction

Cette introduction au domaine de recherche souhaite présenter quelques aspects de la théorie des représentation du groupe fondamental d'une surface S dans un groupe de Lie G. On parlera à la fois de l'intérêt d'une telle représentation, mais aussi de celui de la *variété de représentation* définie comme

$$\mathrm{Rep}(\pi_1(S), G) := \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/G,$$

où G agit par conjugaison. De tels objets apparaissent naturellement en géométrie hyperbolique (pour $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ou $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$) ainsi qu'en théorie de jauge. Il existe aussi de nombreux liens avec la topologie, comme le théorème de Hurewicz qui affirme l'existence d'un isomorphisme de groupes entre

$\mathrm{Rep}(\pi_1(M), \mathbb{R})$, la variété de représentation du groupe fondamental d'une variété M connexe dans le groupe de Lie $\mathbb{R}$, et $H^1_{dR}(M, \mathbb{R})$ le premier groupe de cohomologie de de Rham de M.

Dans un premier temps, on parlera de (G, X)-structure, qui formalise la notion de structure géométrique sur une variété M et on montrera comment des représentations du groupe fondamental de M apparaissent naturellement.

Ensuite, portant notre attention à la théorie des modules, on reviendra au cas des surfaces.

0.2 (G, X)-structure

Définition

Félix Klein définit la géométrie comme l'étude des invariants d'un espace sous l'action transitive d'un groupe. Ainsi une géométrie est une paire (G, X) où X est une variété (lisse) et G un groupe de Lie agissant transitivement sur X. L'idée de modeler localement un espace sur une telle géométrie fut introduite par Ehresmann dans [**?**].

À partir d'une géométrie (G, X) on peut donner à une variété M de même dimension que X une structure géométrique locale associée, en munissant M d'un atlas de cartes où les cartes sont à valeurs dans X et les changements de cartes sont donnés par des restrictions d'éléments de G. (On impose aussi que l'action de G sur X soit analytique, c'est-à-dire que deux éléments de G agissant de la même manière sur un ouvert non vide sont égaux.) On appelle alors M une (G, X)-variété. Cette notion fut introduite et étudiée par Thurston dans [**?**].

Exemples

Pour certains choix de (G, X), on retrouve des exemples classiques.

Pour $X = \mathbb{R}^n$ et $G = O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ le groupe des isométries affines, les (G, X)-structures s'identifient aux métriques riemanniennes plates. Plus généralement, si X est une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle constante égale à κ et G son groupe d'isométrie, alors les (G, X)-structures s'identifient aux métriques riemanniennes à courbure sectionnelle constante égale à κ.

Propriétés

La donnée d'une (G, X)-structure sur une variété M est équivalente à la donnée d'un couple (D, ρ) où $\rho : \pi_1(M) \to G$ est une représentation du groupe fondamental de M qu'on appelle holonomie et D est un difféomorphisme local ρ-équivariant du revêtement universel de M dans X qu'on appelle développante. Plus précisement, la classe modulo G pour l'action $g \cdot (D, \rho) = (g \circ D, g \cdot \rho)$ (où l'action sur les représentations est par conjugaison) caractérise la (G, X)-structure.

Si $x_0 \in M$, $\rho : \pi_1(M, x_0) \to G$ et D un difféomorphisme local ρ-équivariant du revêtement universel de M dans X, alors au couple (D, ρ) correspond exactement une (G, X)-structure sur M et un germe de (G, X)-structure en x_0, où un tel germe est le germe en x_0 d'une application de M dans X qui, lue dans des cartes, correspond à l'action d'un élément de G.

Si on note $\mathcal{D}'$ l'espace des couples (D, ρ) précédent et $hol' : \mathcal{D}' \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, x_0), G)$, alors hol' est continue (on suppose que $\pi_1(M, x_0)$ est de type fini, et la topologie sur $\mathrm{Hom}(\pi_1(M, x_0), G)$ est celle de la convergence simple). De plus, on a le résultat suivant, du à Thurston [**?**].

Theoreme 0.2.1 *L'application hol' est ouverte.*

De plus, si $\mathrm{Diff}_0(M, x_0)$ est la composante neutre du groupe des difféomorphismes de M fixant x_0, alors $\mathrm{Diff}_0(M, x_0)$ agit proprement et librement sur $\mathcal{D}'$ et laisse hol' invariant. Si $\mathcal{D}$ désigne le quotient $\mathcal{D}' / \mathrm{Diff}_0(M, x_0)$, hol' induit un *homéomorphisme local* $hol : \mathcal{D} \to \mathrm{Hom}(\pi_1(M, x_0), G)$.

En revanche, on ne sait pas si l'application induite par hol

$$Hol : \mathcal{D}/G \to \mathrm{Rep}(\pi_1(M), G)$$

est un homéomorphisme local, où l'action de G sur $\mathcal{D}$ est l'action précédente $g \cdot (D, \rho) = (g \circ D, g \cdot \rho)$. En terme de (G, X)-germe, un élément de G agit par composition avec le germe.

Ainsi les espaces de déformations des (G, X)-structures et des représentations du groupe fondamental à valeur dans G fournissent chacun des informations sur l'autre. si (G, X) est un modèle de la géométrie hyperbolique de dimension 2 et S une surface, alors l'espace de déformation associé $\mathcal{D}/G$ n'est autre que l'espace de Teichmüller.

0.3 Variété de représentation

Si π est un groupe de type fini et G un groupe de Lie algébrique réductif, on pose

$$\mathrm{Rep}(\pi, G) := \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$$

la variété de représentation de π dans G (parfois nommée variété des caractères), où G agit par conjugaison. On s'intéresse surtout ici au cas où π est le groupe fondamental d'une variété.

On a vu que dans le cas où $G = \mathbb{R}$, on a l'isomorphisme de Hurewicz

$$\mathrm{Rep}(\pi_1(M), \mathbb{R}) \to H^1_{dR}(M, \mathbb{R}).$$

En définissant la variété de représentation associée au groupe fondamental de M de différentes manières, on peut énoncer une généralisation de ce résultat.

Autres définitions

Cette partie s'inspire de [**?**].

G-systèmes locaux

Pour $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'une variété, on pose

$$I^{(n)} = \{(i_1, \ldots, i_n) \in I^n : U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\}$$

Définition Soit M une variété et $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de M par des ouverts. Un *G-système local* sur M pour $\mathcal{U}$ est une collection d'éléments $(g_{(ij)})_{(i,j) \in I^{(2)}}$ de G telle que

$$g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$$

pour tout $(i, j, k) \in I^{(3)}$. Tout G-système local pour $\mathcal{U}$ est un G-systeme local pour tout raffinement de $\mathcal{U}$.

Le *groupe de jauge* du recouvrement $\mathcal{U}$ est le groupe G^I. Il agit sur l'espace des G-systèmes locaux pour $\mathcal{U}$

$$(h_i)_{i \in I} : (g_{ij}) \mapsto (h_i g_{ij} h_j^{-1}).$$

On dit que deux G-systèmes locaux pour le même recouvrement sont *jauge équivalents* s'ils sont dans la même orbite du groupe de jauge.

Deux G-systèmes locaux sont dit équivalents s'ils sont jauge équivalents sur un raffinement commun.

L'espace des classes d'équivalences de G-systèmes locaux sur M est la limite inductive des espaces de classes d'équivalences de G-systèmes locaux pour un recouvrement $\mathcal{U}$.

Remarque Si G est abélien, alors un G-système local est un 1-cocycle de Čech et sa classe équivalence est la classe de cohomologie de Čech associée. Il est alors connu que l'ensemble des classe d'équivalence de G-systèmes locaux est naturellement identifié avec $H^1(M, G)$. Dans le cas général, on peut donc voir l'ensemble des classes d'équivalence de G-systèmes locaux comme une version non abélienne de $H^1(M, G)$.

L'espace des classes d'équivalence de G-systèmes locaux sur M constitue un autre modèle de la variété de représentation. Pour le voir, il faut définir l'holonomie d'un G-système local pour un recouvrement $\mathcal{U}$. Pour cela, on utilise une version combinatoire du groupe fondamental utilisant le recouvrement, et on prend une limite inductive comme précédemment.

Définition Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'une variété M. Un *chemin pour le recouvrement partant de* i_0 est un élément $i_0 \ldots i_p$ du groupe libre engendré par I tel que $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \emptyset$. Une *boucle* est un chemin $i_0 \ldots i_p$ avec $i_0 = i_p$. Une *boucle triviale* est une boucle de la forme $i_0 \ldots i_p JKL i_p \ldots i_0$ avec $U_J \cap U_K \cap U_L \neq \emptyset$.

Le *groupe fondamental associé au recouvrement* $\pi_1^{\mathcal{U}}$ est le groupe des boucles basées en i_0 (sous-groupe du groupe libre engendré par I) modulo le groupe engendré par les boucles triviales.

On a alors le résultat suivant :

Theoreme 0.3.1 *Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement d'une variété M. On suppose que pour tout $i, j \in I$, U_i est simplement connexe et $U_i \cap U_j$ est connexe. Pour tout i on choisit $x_i \in U_i$ et pour toute paire (U_i, U_j) d'intersection non vide, on choisit un chemin γ_{ij} de x_i à x_j.*

Alors l'application qui à toute boucle $i_0 \dots i_p$ associe $\gamma_{i_0 i_1} \dots \gamma_{i_{n-1} i_n}$ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1^{\mathcal{U}}$ sur $\pi_1(M)$.

Désormais, à l'aide de cette vision du groupe fondamental, on peut définir l'holonomie d'un G-système local. Si on dispose d'un G-système local (g_{ij}) et si $i_0 \dots i_n$ est un chemin, on lui associe l'élément $g_{i_0 i_1} \dots g_{i_{n-1} i_n}$ de G.

On a le résultat suivant :

Theoreme 0.3.2 *Soit M une variété. Alors l'application d'holonomie entre l'espace des G-systèmes locaux modulo la relation de jauge et* $\mathrm{Rep}(\pi_1(M), G)$ *est une bijection.*

Ceci donne un nouveau point de vue sur $\mathrm{Rep}(\pi_1(M), G)$. Nous allons, plus rapidement cette fois, en donner un troisième.

Si G est un groupe linéaire sous-groupe de $GL(V)$ avec V espace vectoriel de dimension finie, à tout G-système local on associe le *fibré vectoriel associé* qui est le fibré vectoriel de fibre isomorphe à V, de groupe structural G et de fonction de transition le G-système local.

On peut munir ce fibré d'une G-connexion, c'est-à-dire une connexion dont la 1-forme associée soit à valeurs dans l'algèbre de Lie de G pour toute trivialisation. Le groupe des isomorphismes d'un fibré agit sur l'espace des connexions sur ce fibré par tiré en arrière. On l'appelle le groupe de jauge, et deux connexions équivalentes sous cette action sont dites jauge-équivalentes. Enfin si une G-connexion est plate (en tant que connexion, c'est-à-dire que sa courbure est nulle) alors son holonomie (en tant que connexion) est à valeurs dans G.

On a le résultat suivant, donnant une troisième définition de $\mathrm{Rep}(\pi_1(M), G)$.

Theoreme 0.3.3 *Soit M une variété. Alors l'application d'holonomie entre l'espace des paires (ξ, ∇) où ξ est un G-fibré vectoriel sur M et ∇ est une G-connexion plate sur ξ modulo relation de jauge et* $\mathrm{Rep}(\pi_1(M), G)$ *est une bijection.*

Si $G = \mathbb{R}$, alors les deux théorèmes précédents reviennent respectivement aux isomorphimes suivant :

$$H^1_{\check{C}ech}(M, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$$

et

$$H^1_{dR}(M, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}).$$

On retrouve le théorème de Hurewicz, et en combinant les deux on retrouve également l'égalité entre premier groupe de cohomologie entre la cohomologie de Čech et de de Rham.

On voit aussi que ces espaces paramétrant divres structures peuvent souvent être vu de plusieurs manières, ce qui participe à l'interêt qu'on leur porte.

Le cas des surfaces

Le théorème de Mostow

Le cas où la variété est une surface (orientée connexe compacte sans bord par exemple) et où le groupe G est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est particulier. Pour expliquer ce fait, on rappelle le théorème de rigidité de Mostow. On a besoin de quelques définitions.

On rappelle que si M est un espace symétrique, on dit que M est de type non compact si M est simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle et M n'est pas isométrique à un produit (riemannien) $\mathbb{R} \times M'$. Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, on appelle homothétie de X à X' toute isométrie de (X, d) sur $(X', \lambda d')$ où $\lambda > 0$. On appelle multi-homothétie toute application $h : X \to X'$ telle qu'il existe des décompositions en produits d'espaces métriques $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ et $X' = X'_1 \times \cdots \times X'_n$ pour lesquelles $h = h_1 \times \cdots \times h_n$ où $h_i : X_i \to X'_i$ soit une homothétie.

Soient M une variété riemanienne connexe complète à courbure sectionnelle négative ou nulle et Γ un sous-groupe discret sans torsion d'isométrie de M. Sous ces hypothèses, Γ agit proprement et librement sur M et il existe une unique structure de variété riemannienne sur M/Γ telle que la projection canonique $M \to M/\Gamma$ soit un revêtement riemannien. On dit que Γ est un *réseau d'isométries* si le volume riemannien de M/Γ est fini et qu'il est *cocompact* si M/Γ est compacte. Si M est simplement connexe, Γ est dit *irréductible* si dès que M est isométrique au produit non trivial $M_1 \times M_2$, en notant G, G_1 et G_2 les composantes neutres des groupes d'isométries de M, M_1 et M_2 respectivement et $p_i : G = G_1 \times G_2 \to G_i$ la i-ème projection, la projection $p_i(\Gamma)$ est un sous-groupe dense de G_i pour $i = 1, 2$. Si M ne se décompose pas en un tel produit, la condition est vide. On a alors le théorème de Mostow.

Theoreme 0.3.4 *Soient M et M' des espaces symétriques de type non compact non homothétiques au plan hyperbolique réel, et Γ, Γ' deux réseaux irréductibles d'isométries de M et M' respectivement. Si $\theta : \Gamma \to \Gamma'$ est un isomorphisme de groupes, alors il existe une multi-homothétie h de M dans M' telle que $\theta(\gamma) = h\gamma h^{-1}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.*

En particulier, deux quotients compacts d'espaces symétriques de type non compact irréductibles de dimension au moins 3, dont les groupes fondamentaux sont isomorphes, sont homothétiques. L'exclusion du plan hyperbolique réel (qui est un espace symétrique de type non compact irréductible) est nécessaire, car fixer le groupe fondamental d'une surface compacte ne fixe que sa topologie, mais il existe alors une infinité non dénombrable de structures hyperboliques (si le genre de la surface est plus grand ou égal à 2). Plus précisement, si Γ est le groupe fondamental d'une surface compacte orientable connexe de genre $g > 1$, si $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (isomorphe au groupe des isométries préservant l'orientation du plan hyperbolique réel), on note $\mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$ le sous-espace de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ constitué des morphismes injectifs d'image discrète (l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est muni de la topologie compacte-ouverte, qui est celle de la convergence simple car Γ est de type fini). On note $\mathrm{Rep}_{fd}(\Gamma, G) = \mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)/G$. Dans ce cas précis, l'espace $\mathrm{Rep}(\Gamma, G)$ est l'espace de Teichmüller de S, et on a la proposition suivante :

Proposition 0.3.5 *Si S est une surface compacte orientable connexe et Γ son groupe fondamental, l'espace $\mathrm{Rep}_{fd}(\Gamma, G)$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux copies de $\mathbb{R}^{6g-6}$.*

Soit $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ l'ensemble des automorphismes de groupe de Γ, alors il est dénombrable (Γ est de type fini). Si ρ est un élément de $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$, et ϕ un élément de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, alors en posant $\phi \cdot \rho := \rho \circ \phi^{-1}$, on définit une action (à gauche) de $Aut(\Gamma)$ sur $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ qui stabilise $\mathrm{Hom}_{fd}(\Gamma, G)$, et donc une action sur $\mathrm{Rep}_{fd}(\Gamma, G)$.

L'espace quotient de $\mathrm{Rep}_{fd}(\Gamma, G)$ par l'action de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ est l'espace modulaire de S, il est aussi non trivial, car quotient d'un ensemble non dénombrable par un ensemble dénombrable. Il est homéomorphe à l'espace topologique des classes d'isométries de métriques hyperboliques sur S (dont la topologie est la topologie quotient par l'action du groupe des isométries de S de la topologie induite de la topologie C^2 sur l'espace des sections lisses du fibré des formes bilinéaires sur S). L'homéomorphisme est d'ailleurs explicite : à une représentation ρ de Γ dans G, on associe la variété riemannienne quotient de $\mathbb{H}^2$ par $\rho(\Gamma)$. Cette application passe aux quotients précédent et induit l'homéomorphisme souhaité. Cet espace de module est aussi homéomorphe à l'espaces des modules de surfaces de Riemann sur S, l'homéomorphisme provenant du théorème d'uniformisation.

Ainsi le cas des surfaces hyperboliques apparait comme très particulier, et très riche. Parlons un peu plus de ces espaces de modules.

0.4 Espace de modules, espace de Teichmüller

Précisons un peu les espaces rencontrés précédemment. Soit S une variété lisse orientable compacte connexe à bord et ayant éventuellement un nombre fini de points retirés de son intérieur. On suppose que la caractéristique d'Euler de S est strictement négative. On admet qu'alors S admet (au moins) une métrique hyperbolique.

Définitions

Définition On appelle *métrique hyperbolique* la donnée sur S d'une métrique riemanienne complète de courbure sectionnelle constante égale à -1 de volume fini et telle que le bord de S soit totalement géodésique (c'est-à-dire que les composantes connexes de ∂S sont des géodésiques de S).

Si f est un difféomorphisme conservant l'orientation de S, alors f agit sur l'ensemble des métriques hyperboliques sur S par tiré en arrière. L'espace de Teichmüller est l'ensemble des classes d'équivalences de métriques hyperboliques sur S modulo la relation d'isotopie :

$$\mathrm{Teich}(S) = \{\text{métriques hyperboliques sur } S\}/\,\mathrm{Diff}_0(S).$$

Cet espace de Teichmüller n'est pas exactement celui considéré dans la partie précédente, mais il est homéomorphe à l'une des deux composantes connexes du précédent.

Si on note $\mathrm{Diff}^+(S, \partial S)$ l'ensemble des difféomorphismes de S qui préservent l'orientation et qui se restreignent à l'identité sur le bord de S, alors $\mathrm{Diff}^+(S, \partial S)$ agit sur $\mathrm{Teich}(S)$ et induit une action du *mapping class group*

$$\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}^+(S, \partial S)/\,\mathrm{Diff}_0(S, \partial S)$$

sur $\mathrm{Teich}(S)$. C'est un résultat important que cette action est proprement discontinue.

$$\mathcal{M}(S) = \mathrm{Teich}(S)/\,\mathrm{Mod}(S)$$

est *l'espace des modules des surfaces hyperboliques* homéomorphes à S.

Si l'espace $\mathrm{Teich}(S)$ est simple en tant qu'espace topologique, l'espace $\mathcal{M}(S)$ ne l'est pas. Sa topologie est très liée au groupe $\mathrm{Mod}(S)$, et réciproquement la topologie de $\mathcal{M}(S)$ encode beaucoup d'informations quant aux invariants de $\mathrm{Mod}(S)$, comme par exemple sa cohomologie.

Résultats connus

Soit g un entier plus grand ou égal à 2, et S_g la surface compacte orientée connexe de genre g. Alors l'espace de Teichmüller de S_g est homéomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6}$. Ce résultat date de 1897 et est du à Fricke et Klein. Pour prouver ce théorème, on découpe la surface S_g en pantalons (homéomorphes à une sphère privée de trois points). En fait, toute surface hyperbolique peut être découpée en un nombre fini de pantalons. Si on coupe ces pantalons le long de géodésique de S, les composantes connexes restantes sont encore des surfaces hyperboliques (des pantalons) et ils sont plus simples. On peut alors déterminer l'espace de Teichmüller d'un pantalon dont on a fixé les longueurs des bords, puis il est possible de décrire comment on recolle les pantalons pour arriver à calculer l'espace de Teichmüller de S_g.

On a vu plus haut que le groupe $\mathrm{Mod}(S_g)$ agissait proprement discontinument sur $\mathrm{Teich}(S_g)$. Le quotient, $\mathcal{M}(S_g)$, est donc une orbifold. On rappelle qu'un espace topologique est dit *asphérique* si tous ses groupes d'homotopies supérieures sont nulles.

Theoreme 0.4.1 *Pour $g > 1$, l'espace des modules $\mathcal{M}(S_g)$ est une orbifold asphérique et est finiment recouverte par une variété asphérique.*

Voir par exemple [?].

Une remarques très importantes est la non-compacité de $\mathcal{M}(S)$. Si X est une surface hyperbolique, on note $l(X)$ la plus courte longueur d'une courbe fermée qui ne soit pas homotope à un point, un cusp ou une composante du bord.

Theoreme 0.4.2 *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace*

$$\mathcal{M}_{\varepsilon>0}(S)\{X \in \mathcal{M}(S) : l(X) \geq \varepsilon\}$$

est compact.

Voir par exemple [?]

Ces compacts forment une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{M}(S)$, donc sortir de tout compact dans $\mathcal{M}(S)$ c'est réduire la taille de certaines courbes. On note $S_{g,n}$ la surface de genre g avec n points marqués. On peut construire la compactification de $\mathcal{M}(S_{g,n})$ en ajoutant les surfaces hyperboliques ayant une ou plusieurs géodésiques fermées simples de longueur 0, [?]. On note cette compactification $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}$.

La formule d'ELSV

Dans cette partie on présente la formule d'ELSV et sa généralisation aux structures spin. La référence est [?].

Nombres d'Hurwitz

Soit $g \geq 0$ et $n > 0$ des entiers et $k_1, \ldots, k_n$ des entiers strictement positifs rangés par ordre décroissant.

Définition Pour $f : C \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ un revêtement ramifié, on considère les conditions suivantes :

— C est une surface de Riemann compacte de genre g ;
— $\deg f = d$;
— $f^{-1}(\infty) = \sum k_i x_i$ en tant que diviseur, avec $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts de C ;
— tous les autres points de branchement de f sont simples, c'est-à-dire que si $b \in \mathbb{P}^1\mathbb{C} - \{\infty\}$ est une valeur critique de f alors il existe un unique point critique $x \in f^{-1}(b)$ et x est un point critique non dégénéré.

Définition On appelle nombre de Hurwitz et on note $h_{g;k_1,\ldots,k_n}$ le nombre de revêtements ramifiés à vérifiant les conditions de la définition précédente, où on ne compte pas deux revêtements isomorphes.

Remarque Par la formule de Riemann-Hurwitz, il y a alors $m = \sum k_i + n + 2g - 2$ points de ramification autres que l'infini.

On peut aussi voir les nombres de Hurwitz de façon combinatoire.
Soit $m = \sum k_i + n + 2g - 2$ et $K = \sum k_i$.

Définition Soit $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathfrak{S}_K$ m transpositions et $\sigma \in \mathfrak{S}_K$ une permutation produit de n cycles de longueur k_i.

On dit que $(\tau_1, \ldots, \tau_m, \sigma)$ est une factorisation transitive de l'identité de type $(k_1, \ldots, k_n)$ si $\tau_1 \cdots \tau_m \sigma = I_{\mathfrak{S}_K}$ et le sous-groupe de $\mathfrak{S}_K$ engendré par les τ_i agit transitiviement sur $\{1, \ldots, K\}$.

Proposition 0.4.3 *Le nombre de Hurwitz $h_{g;k_1,\ldots,k_n}$ est égal au nombre de factorisations transitives de l'identité de type $(k_1, \ldots, k_n)$ divisé par $K!$.*

Preuve Soit un revêtement $f : C \to \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ justifiable des hypothèses de la définition des nombres d'Hurwitz. Soit $x \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$ un point régulier. En regardant la monodromie du revêtement f en x et en numérotant les antécédents de x de 1 à K, on obtient une représentation du groupe fondamental de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ privé des points de ramification de f dans $\mathfrak{S}_K$.

La monodromie autour des points de ramifications simples correspond à des transpositions que l'on note τ_i, et la monodromie autour de l'infini donne une permutation σ possédant n cycles de longueur k_i (par définition de f). La monodromie étant transitive, le groupe engendré par les τ_i l'est. Enfin, $(\tau_1, \ldots, \tau_n, \sigma)$ est une factorisation transitive de l'unité car dans le groupe fondamental de la sphère privé de plusieurs points le produit de toutes les boucles autour de chaque point est l'identité.

Réciproquement, on peut construire à partir de la monodromie un revêtement ramifié.

Remarque On va avoir besoin de parler d'intégration sur une orbifold O compacte. Soit O une orbifold compacte et $H^*(O) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(O)$ la $\mathbb{Q}$-algèbre graduée par les groupes de cohomologie $H^k(O)$. Une classe de cohomologie appartenant à $H^k(O)$ est dite homogène de degré k, et si une classe de cohomologie est homogène de degré k pour un certain k, on dit que cette classe est homogène. On peut définir une intégration des classes de cohomologie, et par construction l'intégrale d'une classe de cohomologie appartenant à $H^k(O)$ est nulle sauf si k vaut la dimension topologique de O. Conséquemment, si les α_i sont des classes de cohomologie homogène qui commutent, l'intégrale $\int_O \prod \alpha_i$ s'annulera à moins que $\sum \deg \alpha_i = \dim O$. On peut donc intégrer une expression de la forme $\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{1-\beta}$ en developpant formellement les fractions puis en ne considérant que les termes de degré $\dim O$.

On va maintenant énoncer la formule d'ELSV sans correctement introduire les éléments auxquels elle fait appel mais plus dans le but de la comparer avec la conjecture dans le cas des structures spin.

Theoreme 0.4.4 *Soit $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}$ le compactifié de l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g et avec n points marqués, soit E le fibré de Hodge* *et $c(E^*)$ la classe de Chern totale de son dual et soit ψ_i la classe de Chern du fibré en droite cotangent au point i.*

On a alors l'égalité suivante :

$$h_{g;k_1,\dots,k_n} = m! \prod_{i=0}^{n} \frac{k_i^{k_i}}{k_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}_{g,n}}} \frac{c(E^*)}{(1-k_1\psi_1)\cdots(1-k_n\psi_n)}.$$

0.5 Structures r-spin

On renvoie pour cette partie à [?].

Plutôt que de s'intéresser directement à $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}$, on peut en construire des revêtements. L'un d'eux est l'espaces des structures r-spin sur une surface de Riemann. Soit r un entier supérieur ou égal à 0. Soit C une surface de Riemann compacte connexe de genre g avec n points marqués $(x_1,\dots,x_n)$. Soit K le fibré canonique de C et $a_1,\dots,a_n \in \{0,\dots,r-1\}$ des entiers tels que r divise $2g-2-\sum a_i$.

Définition Une *structure r-spin* sur C est un fibré en droites L et un isomorphisme

$$L^{\otimes r} \to K \otimes (-\sum a_i \cdot x_i).$$

On note $\mathcal{M}^{1/r}$ l'espace des modules des telles structures. Il a une structure d'orbifold, et une compactification a été construite [?], on la note $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}^{1/r}$. L'application d'oubli de la r-spin structure $\overline{\mathcal{M}_{g,n}}^{1/r} \to \overline{\mathcal{M}_{g,n}}$ est un revêtement.

On peut définir des *nombres de Hurwitz complété* $h_{g,r;k_1,\dots,k_n}$, ainsi qu'une classe de Chern remplaçant la classe $c(E^*)$ précédente, et on a la conjecture suivante :

Conjecture On a l'égalité suivante :

$$h_{g,r;k_1,\dots,k_n} = m! r^{m+n+2g-2} \prod_{i=1}^{n} \frac{(\frac{k_i}{r})^{p_i}}{p_i!} \int_{\overline{\mathcal{M}_{g,n}}^{1/r}} \frac{c(-R^*\pi_* L)}{(1-\frac{k_1}{r}\psi_1)\cdots(1-\frac{k_n}{r}\psi_n)}.$$

Bibliographie

[1] C. Ehresmann. Sur les espaces localement homogènes. *L'ens. Math.*, 35 :317–333, 1936.

[2] B. Farb and D. Margalit. *A primer on mapping class groups.* Proc. Symp. Pure and Applied Math., 2006.

[3] J. Harris and I. Morrisson. Moduli of curves. *Graduate Texts in Mathematics*, 187, 1998.

[4] T. Jarvis. Geometry of moduli of higher spin curves. *Internat. J. Math.*, 11 :637–663, 2000.

[5] F. Labourie. *Lectures on Reprentations of Surface Groups.* Zurich Lectures in Advanced Mathematics, 2012.

[6] Chiu-Chu M. Liu. Lectures on the ELSV formula. *Adv. Lect. Math. (ALM)*, 16, 2010.

[7] L. Spitz S. Shadrin and D. Zvonkine. Equivalence of ELSV and BM conjectures for r-spin Hurwitz numbers. *Mathematische Annalen*, 361(3) :611–645, 2015.

[8] W. Thurston. *The Geometry and Topology of* 3*-manifolds.* Princeton University Press, 1980.