Jeux différentiels Stochastiques Non-Markoviens

Kaitong HU*

Table des matières

*Ecole Normale Supérieure, kaitong.hu@ens.fr

1 Introduction

1.1 Problème de Principal-Agent

Le problème de principal-agent consiste à modéliser mathématiquement puis optimiser les contrats entre deux contreparties dans un environnement incertain. Le principal peut être les investisseurs et l'agent le gestionnaire du portefeuille ; ou bien le principal est une société et l'agent le directeur général. Le principal offre un contrat à l'agent qui doit effectuer une certaine mission pour le principal.

Le problème économique est pour le principal de construire un contrat de telle sorte que l'agent accepte le contrat, i.e. la contrainte de participation ; et que le principal reçoive le plus provenant de la performance de l'agent en terme de fonction d'utilité. Comment cela peut être fait dépend majoritairement des informations disponibles au principal et à l'agent. Dans la suite, on va considérer trois types de situations :

- Partage des risques
- Action cachée
- Type caché

Partage des risques Dans le cas du partage des risques, le principal et l'agent partagent les mêmes informations. On suppose que le principal rédige le contrat et qu'il décide l'action de l'agent (sinon il peut pénaliser l'agent sévèrement). Si on note U_P, U_A la fonction d'utilité du principal et de l'agent respectivement et a le choix de l'action, le problème s'écrit

$$\max_{c,a}\{\mathbb{E}[U_P(c,a)+\lambda U_A(c,a)]\} \tag{1}$$

où c représente le choix du contrat et λ le niveau du partage des risques. On appelle le cas du partage des risques **first best**.

Action cachée Dans la deuxième situation, l'action choisie par l'agent n'est plus observable par le principal pour une raison de coût ou difficulté de surveillance. Par exemple, c'est en général très difficile de surveiller combien un gestionnaire de portefeuille a investi dans chaque actif. Dans ce cas le principal ne peut choisir l'action que l'agent fera. Toutefois, on suppose qu'étant donné un contrat c, l'agent choisit l'action qui maximise sa fonction d'utilité. Ceci est ainsi un problème d'incitation. Plus précisément, on doit tout d'abord résoudre le problème de l'agent

$$V_A(c) = \max_a \mathbb{E}[U_A(c,a)]. \tag{2}$$

Supposons qu'il y a une et une seule action optimale pour l'agent $a(c)$, alors le problème du principal s'écrit

$$V_P = \max_c \mathbb{E}[U_P(c,a(c)) + \lambda U_A(c,a(c))]. \tag{3}$$

On appelle le cas d'action cachée **second best**. En général on suppose en plus que le résultat ne dépend pas directement de l'action de l'agent au sens où en choisissant une action, l'agent choisit une distribution de probabilité $\mathbb{P}^a$ sous laquelle les espérances ci-dessus seront calculées.

Type caché En fait, dans beaucoup de situations c'est raisonnable de supposer que le principal ne connait pas les caractéristiques de l'agent. Le cas le plus intuitif est le vendeur de voitures (principal) et ses clients(agents). Le vendeur de voitures ne sait pas si un client est riche ou pas, mais son but est de faire payer le plus possible le client. Ces caractéristiques cachées changeront beaucoup le comportement de l'agent en fonction des types de contrat. On suppose dans le cas du type caché, que le principal propose d'appeler un menu de contrats révélateurs : l'agent montrera son vrai type θ en choisissant le contrat $c(\theta)$. Par exemple le vendeur de voitures propose à ces clients soit une voiture de base à dix mille euros, soit une voiture avec un système Hifi à douze mille euros ou bien une voiture avec des chaises en cuir de crocodile à vingt mille euros. Les clients choisiront leur voiture selon leur propres caractéristiques.

Mathématiquement parlant, on doit résoudre d'abord le problème de l'agent lorsqu'il choisit le contrat $c(\theta')$ et il est du type θ :

$$V_A(c(\theta'), \theta) = \max_a \mathbb{E}[U_A(c(\theta'), a, \theta)]. \tag{4}$$

On suppose qu'il y a une et une seule action optimale qui résout le problème de l'agent pour chaque paire $(c(\theta'), \theta)$ et on note $a(c(\theta)) := a(c(\theta), \theta)$. La contrainte de révélation de la vérité s'écrit ;

$$\max_{\theta'} V_A(c(\theta'), \theta) = V_A(c(\theta), \theta). \tag{5}$$

On suppose que la distribution des types potentiels de l'agent donnée par les informations disponibles au principal est $F(\theta)$. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des contrats qui sont révélateurs. Alors le problème du principal s'écrit :

$$V_P = \max_{c \in \mathcal{T}} \int \mathbb{E}^\theta[U_P(c(\theta), a(c(\theta)))]dF(\theta). \tag{6}$$

1.2 Exemple dans le cas discret

On suppose que le paiement du contrat a lieu une seule fois à la maturité $T = 1$ et on le note C_1. Le principal prend utilité dans la valeur finale qui est donnée par

$$X_1 = X_0 + a + B_1 \tag{7}$$

où B_1 est une variable aléatoire fixée, la constante a est l'action de l'agent.

On suppose que la fonction d'utilité de l'agent est donnée par

$$U_A(C_1 - g(a)) = -\frac{1}{\gamma_A} e^{-\gamma_A [C_1 - ka^2/2]} \tag{8}$$

où $g(a)$ est la fonction de coût de l'agent. La fonction d'utilité du principal est donnée par

$$U_P(X_1 - C_1) = -\frac{1}{\gamma_P} e^{-\gamma_P[X_1 - C_1]}. \tag{9}$$

1.2.1 Partage des risques

Comme toute information est disponible dans ce cas, il suffit de maximiser la valeur suivante

$$\mathbb{E}[U_P(X_1 - C_1) + \lambda U_A(C_1 - g(a))]. \tag{10}$$

En dérivant à l'intérieur de l'espérance par rapport à C_1, on obtient

$$\frac{U_P'(X_1 - C_1)}{U_A'(C_1 - g(a))} = \lambda, \tag{11}$$

c'est ce que l'on appelle **la règle de Borch**. Si on note $\rho = \frac{1}{\gamma_A + \gamma_P}$, l'optimum est donné par

$$C_1 = \rho[\gamma_P X_1 + \gamma_A k a^2/2 + \log \lambda]. \tag{12}$$

On remarque que la sensibilité du contrat par rapport à la valeur finale est égale à $\frac{\gamma_P}{\gamma_P + \gamma_A}$ qui est inférieure à 1. On peut interpréter comme suit : un agent qui déteste les risques ne doit pas être exposé à beaucoup d'incertitudes liées à la valeur finale ; par contre, pour un agent qui est risque neutre, la sensibilité est égale à 1, ce qui correspond à la situation où le principal vend l'entreprise entière à l'agent en échange d'une somme de cash fixée en avance. Si on regarde ensuite la dérivée de la fonction (10) par rapport à l'action étant donné le contrat, en utilisant la règle de Borch, l'action qui maximise la fonction d'utilité collective est donnée par

$$a = \frac{1}{k}. \tag{13}$$

On voit dans le cas des fonctions d'utilité exponentielles, l'action optimale ne dépend ni de la valeur finale, ni du niveau d'aversion au risque. Remarquons que le contrat optimal calculé ci-dessus dépend fortement de l'hypothèse sur l'observabilité de l'action de l'agent. Si ce n'était pas le cas, on pourrait vérifier que l'action optimale de l'agent ne serait pas $a = \frac{1}{k}$ étant donné le contrat ci-dessus.

1.2.2 Action cachée

On suppose ici que l'action de l'agent n'est plus observable, et que la valeur finale est donnée par

$$X_1 = X_0 + \sigma B_1 \tag{14}$$

où X_0 est une constante et B_1 une variable aléatoire centrée réduite. Pour simplifier on suppose que $X_0 = 0$. Si l'agent choisit d'exercer l'action a, alors la probabilité $\mathbb{P}$ devient $\mathbb{P}^a$ sous laquelle B_1 est normale de moyenne $\frac{a}{\sigma}$. Ainsi, sous $\mathbb{P}^a$ X_1 a pour moyenne a.

Mirrlees(1999) a montré qu'en général on ne peut pas espérer l'existence d'un contrat optimal sous ces conditions là. Pour cette raison, on va supposer que les contrats sont linéaires en X_1 et donc en B_1, i.e. $C_1 = k_0 + k_1 B_1$.

Le problème de l'agent s'écrit :

$$\min_a \mathbb{E}^a[e^{-\gamma_A[k_0+k_1B_1-ka^2/2]}], \tag{15}$$

et comme

$$\mathbb{E}^a[e^{cB_1}] = e^{ca/\sigma+\frac{1}{2}c^2}, \tag{16}$$

le problème s'écrit donc

$$\min_a e^{-\gamma_A[k_0+k_1a/\sigma-ka^2/2-\frac{1}{2}k_1^2\gamma_A]}. \tag{17}$$

On voit que l'action optimale dans ce cas est $a = \frac{k_1}{k\sigma}$. On suppose que le principal décide de donner R_0 utilité à l'agent, ce qui veut dire

$$R_0 = -\frac{1}{\gamma_A}e^{-\gamma_A[k_0+ka^2/2-\frac{1}{2}a^2k^2\sigma^2\gamma_A]}, \tag{18}$$

donc en utilisant $C_1 = k_0 + \sigma kaB_1$

$$-\frac{1}{\gamma_A}e^{-\gamma_A C_1} = R_0 e^{-\gamma_A[-ka^2/2+\frac{1}{2}a^2k^2\sigma^2\gamma_A+\sigma kaB_1]}, \tag{19}$$

on obtient ainsi une représentation du contrat de payoff en fonction de l'utilité de l'agent espérée R_0 et la source d'incertitude B_1. On peut écrire l'utilité du principal espérée

$$\mathbb{E}[U_P(X_1 - C_1)] = \frac{(-\gamma_A R_0)^{\gamma_P/\gamma_A}}{-\gamma_P}e^{-\gamma_P(-\frac{1}{2}\gamma_P\sigma^2(ka-1)^2-a(ak-1)+\frac{ka^2}{2}-\frac{1}{2}a^2k^2\sigma^2\gamma_A)}. \tag{20}$$

En dérivant par rapport à a, on obtient l'action optimal que le principal souhaite que l'agent exerce

$$a = \frac{1/(k\sigma^2)+\gamma_P}{1/\sigma^2+k(\gamma_A+\gamma_P)}; \tag{21}$$

l'optimisation de l'agent selon le contrat est donné par $k_1/\sigma = ka$, donc le contrat optimale est

$$C_1 = k_0 + \frac{1/(k\sigma^2)+\gamma_P}{1/\sigma^2+k(\gamma_A+\gamma_P)}X_1 \tag{22}$$

où on a utilisé le fait que $X_1 = \sigma B_1$.

1.2.3 Type caché

On va ajouter dans ce dernier cas le paramètre θ qui correspond au type de l'agent. Plus précisément, si l'agent est du type θ et s'il décide de faire l'action

a, la moyenne de la variable aléatoire B_1 est $\frac{\theta+a}{\sigma}$. θ est dans ce cas le rendement que l'agent peut produire sans effort.

On se restreint au cas des contrats linéaires en X_1 et on suppose que le principal propose à l'agent un menu de contrat de la forme

$$C_1(\theta) = k_0(\theta) + k_1(\theta)B_1, \tag{23}$$

le problème de l'agent s'écrit alors

$$\begin{aligned}-\gamma_A V_A(\theta, \theta') &= \min_a \mathbb{E}^{a,\theta}[e^{-\gamma_A(k_0(\theta')+k_1(\theta')B_1-ka^2/2)}] \\ &= \min_a e^{-\gamma_A(k_0(\theta')+k_1(\theta')\frac{\theta+a}{\sigma}-\frac{1}{2}k_1^2(\theta')\gamma_A-ka^2/2)}\end{aligned}$$

L'action optimale est $a(\theta') = \frac{k_1(\theta')}{k\sigma}$ et

$$-\gamma_A V_A(\theta, \theta') = e^{-\gamma_A(k_0(\theta')+k_1(\theta')\frac{\theta}{\sigma}+\frac{k_1^2(\theta')}{2}(\frac{1}{k\sigma^2}-\gamma_A))}. \tag{24}$$

On note la dérivée par rapport au premier argument ∂/∂_θ et $\partial/\partial_{\theta'}$ la dérivée par rapport au second argument. L'hypothèse sur le fait que les contrats soient révélateurs de la vérité s'écrit

$$0 = \frac{\partial}{\partial_{\theta'}} V_A(\theta, \theta), \tag{25}$$

i.e. $\max_{\theta'} V_A(\theta', \theta)$ doit être atteint à $\theta' = \theta$. On note à nouveau par $R(\theta)$ la quantité d'utilité espérée que le principal décide de donner à l'agent. Alors,

$$R(\theta) = V_A(\theta, \theta). \tag{26}$$

Remarquons que sous l'hypothèse de révélation de la vérité, on a

$$R'(\theta) = \frac{d}{d\theta} V_A(\theta, \theta) = \frac{\partial}{\partial_\theta} V_A(\theta, \theta) + \frac{\partial}{\partial_{\theta'}} V_A(\theta, \theta) = \frac{\partial}{\partial_\theta} V_A(\theta, \theta). \tag{27}$$

Comme

$$\begin{aligned}-\gamma_A R'(\theta) &= \frac{\partial}{\partial_\theta}(-\gamma_A V_A(\theta, \theta)) \\ &= -\gamma_A^2 R(\theta)\frac{k_1(\theta)}{\sigma}\end{aligned}$$

on a donc $k_1 = -\frac{1}{\gamma_A}\sigma\frac{R'(\theta)}{R(\theta)}$. Ensuite, comme dans le cas d'action cachée, on peut obtenir une représentation du contrat en fonction de $R(\theta)$ et k_1 et on écrit la fonction d'utilité du principal

$$\mathbb{E}^{a,\theta}[U_P(X_1 - C_1(\theta))] = \frac{(-\gamma_A R_0)^{\gamma_P/\gamma_A}}{-\gamma_P}\mathbb{E}^{a,\theta}[e^{-\gamma_P(\sigma B_1+\frac{1}{2}k_1^2(\theta)(\frac{1}{k\sigma^2}-\gamma_A)+k_1(\theta)(\frac{\theta}{\sigma}-B_1)}], \tag{28}$$

c'est une fonction de $R(\theta)$, $R'(\theta)$ et θ, on la note dans le suite par $v_P(R(\theta), R'(\theta), \theta)$. Supposons que la distribution à priori sur le type de l'agent est portée sur l'intervalle $[\theta_L, \theta_H]$. Le problème du principal devient finalement

$$\max_{R(\theta)>R_0(\theta)} \int_{\theta_L}^{\theta_H} v_P(R(\theta), R'(\theta), \theta) dF(\theta). \tag{29}$$

Pour simplifier on suppose que le principal est risque neutre au sens où $U_P(x) = x$ et on suppose que $F(\theta)$ est uniformément distribuée sur $[\theta_L, \theta_H]$. En introduisant $\tilde{R}(\theta) = -\frac{1}{\gamma_A}\log(-\gamma_A R(\theta))$, on a $k_1 = \sigma\tilde{R}'(\theta)$. Le problème du principal est ainsi équivalent à

$$\min_{R(\theta)>R_0(\theta)} \int_{\theta_L}^{\theta_H} [\tilde{R}(\theta) + \frac{1}{2}(\tilde{R}')^2(\theta)(\sigma^2\gamma_A + 1/k) - \tilde{R}'(\theta)/k] d\theta, \tag{30}$$

ce qui peut être résolu par des techniques de calcul de variations, on va citer le théorème suivant sans démonstration (cf Cvitanic and Zhang (2007)) :

Théorème 1.1. *Supposons que $R_0(\theta) = R_0$. Alors le problème du principal a une unique solution. Notons $\theta^* = \max\{\theta_H - 1/k, \theta_L\}$, le choix optimal de $\tilde{R}$ est donnée par*

$$\tilde{R}(\theta) = \begin{cases} \tilde{R}_0, & \theta_L \leq \theta < \theta^* \\ \tilde{R}_0 + \frac{\beta\theta^2}{2} + \beta(\frac{1}{k} - \theta_H)(\theta - \theta^*) - \frac{\beta(\theta^*)^2}{2}, & \theta_* \leq \theta \leq \theta^H \end{cases} \tag{31}$$

où $\beta = \frac{1/\sigma^2}{1/(k\sigma^2)+\gamma_A}$. L'action optimale de l'agent est donnée par

$$a(\theta) = \tilde{R}'(\theta)/k = \begin{cases} 0 & \theta_L \leq \theta < \theta^* \\ \frac{\beta}{k}(1/k + \theta - \theta_H) & \theta_L \leq \theta < \theta^* \end{cases} \tag{32}$$

et le contrat optimal dans ce cas est donné par

$$C_1(\theta) \begin{cases} k_0(\theta) & \theta_L \leq \theta < \theta^* \\ k_0(\theta) + \beta(1/k + \theta - \theta_H)(X_1 - X_0) & \theta_L \leq \theta < \theta^* \end{cases} \tag{33}$$

On voit dans le théorème que si l'intervalle possible des types est assez large, i.e. $\theta_H - \theta_L > 1/k$, alors les meilleurs agents reçoivent $\tilde{R}(\theta)$(une fonction équivalente à l'utilité) qui est croissante quadratiquement en θ tandis que les moins bons agents ne reçoivent rien au-dessus de R_0.

2 Programmation dynamique et Application

2.1 Préliminaire

Définition 2.1. Un processus adapté à trajectoires continues M tq $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale continue s'il existe une suite de temps d'arrêt τ_n croissants telle que $\forall n$, $(M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable.

Théorème 2.1. *Soit M une martingale locale continue. Il existe un processus croissant noté $(\langle M, M\rangle_t)$ unique à indistinguabilité près tel que $(M^2 - \langle M, M\rangle_t)$ soit une martingale locale continue. De plus, pour toute suite de subdivision de pas tendant vers 0, on a*

$$\langle M, M\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2,$$

au sens de probabilité. On appelle $(\langle M, M\rangle_t)$ la variation quadratique de M.

Définition 2.2. On note $\mathbb{H}^2$ l'espace des martingales continues bornées dans L^2 et telles que $M_0 = 0$. On peut définir un produit scalaire sur cet espace en introduisant

$$(M, N)_{\mathbb{H}^2} = \mathbb{E}[\langle M, N\rangle_\infty].$$

Proposition 2.2. *L'espace $(\mathbb{H}^2, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{H}^2})$ est un espace de Hilbert.*

Définition 2.3. La tribu engendrée par le processus $\mathbf{1}_A(\omega, t)$ où $A \in \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ est une tribu sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$, que l'on appelle **tribu progressive**.

Définition 2.4. Pour $M \in \mathbb{H}^2$, on note $L^2(M)$ l'ensemble des processus progressifs H tels que $\mathbb{E}[\int_0^\infty H_s^2 d\langle M, M\rangle_s] < \infty$. $L^2(H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{\mathbb{L}^2(M)} = \mathbb{E}[\int_0^\infty H_s K_s d\langle M, M\rangle_s].$$

Définition 2.5. On note $\mathcal{E}$ le sous espace vectoriel de $L^2(M)$ engendré par les processus aléatoires élémentaires de la forme $H_s(\omega) = \sum H_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$ où H_i est F_{t_i}-mesurable borné.

Proposition 2.3. *$\mathcal{E}$ est dense dans $L^2(M)$.*

Théorème 2.4. *Soit $M \in \mathbb{H}^2$, pour tout H de la forme $H_s(\omega) = \sum H_i(\omega)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$, on définit $H \cdot M \in \mathbb{H}^2$ par la formule*

$$(H \cdot M)_t = \sum H_i(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}).$$

L'application $H \to (H \cdot M)$ s'étend à une isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathbb{H}^2$. De plus $H \cdot M$ est caractérisé par la relation

$$\forall N \in \mathbb{H}^2, \langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle.$$

On notera par suite que $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$.

2.2 Contrôle stochastique et Programmation dynamique

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec la filtration canonique du mouvement Brownien $W : \mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.

Définition 2.6. On dit qu'un processus v est progressivement mesurable si la fonction

$$(s, \omega) \to v_s(\omega)$$

est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ mesurable pour tout t.

On se donne un sous ensemble U de $\mathbb{R}^k$, on note désormais $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus progressivement mesurables à valeurs dans U. On appelle les éléments dans $\mathcal{U}$ les **processus de contrôle**.

On note

$$\mathbf{S} := [0, T) \times \mathbb{R}^n$$

où $T \in \mathbb{R}^{+*}$. Soient

$$b : (t, x, u) \in \mathbf{S} \times U \to b(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\sigma : (t, x, u) \in \mathbf{S} \times U \to \sigma(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$$

telles que

$$|b(t,x,u) - b(t,y,u)| + |\sigma(t,x,u) - \sigma(t,y,u)| \leq K|x-y| \tag{34}$$

$$|b(t,x,u)| + |\sigma(t,x,u)| \leq K(1 + |x| + |u|) \tag{35}$$

pour certaine constante K indépendante de (t, x, y, u). Pour chaque processus de contrôle, on considère l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante :

$$dX_t = b(t, X_t, v_t)dt + \sigma(t, X_t, v_t)dW_t. \tag{36}$$

Théorème 2.5. *Soit $\nu \in \mathcal{U} \cap \mathbb{H}^2$ où $\mathbb{H}^2$ st l'ensemble des processus progressivement mesurables carré-intégrables. Soit $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable. Alors il existe un unique processus $\mathbb{F}$-adapté X^ν satisfaisant l'équation* (36) *avec la condition initiale $X_0^\nu = \xi$. De plus pour tout $T > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\nu|^2] < C(1 + \mathbb{E}[|\xi|^2])e^{Ct}. \tag{37}$$

Soient

$$f, k : [0, T) \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$$

et

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

des fonctions déterministes données. On suppose que f et g sont continues et que k^-(la partie négative de k) est uniformément bornée. De plus, on suppose que f et g satisfont la condition de croissance quadratique :

$$|f(t,x,u)| + |g(x)| \leq K(1 + |u| + |x|^2) \tag{38}$$

pour certaine constante K indépendante de (t, x, u). On définit la fonction de coût sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}]$ par

$$J(t, x, \nu) := \mathbb{E}[\int_t^T \beta^\nu(t, s) f(s, X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) ds + \beta^\nu(t, T) g(X_T^{t,x,\nu}) \mathbf{1}_{T<\infty}] \tag{39}$$

où

$$\beta^\nu(t, s) := e^{-\int_t^s k(r, X_r^{t,x,\nu}, \nu_r) dr} \tag{40}$$

et $\{X_s^{t,x,\nu}, s \geq t\}$ est la solution de l'équation différentielle stochastique contrôlée par ν avec condition initiale $X_0^{t,x,\nu} = x$. Remarquons que pour $T < \infty$, les hypothèses sur les fonctions f, k et g assurent que la fonction de coût J soit bien définie pour les processus de contrôle définis dans $\mathcal{U} \cap \mathbb{H}^2$.

Le problème de contrôle stochastique est le suivant : pour $(t, x) \in \mathbf{S}$,

$$V(t, x) := \sup_{\nu \in \mathcal{U} \cap \mathbb{H}^2} J(t, x, \nu). \tag{41}$$

Notons $\mathcal{U}_t := \{\nu \in \mathcal{U} \cap \mathbb{H}^2 : \nu \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t\}$ et pour tout $(t, x) \in \mathbf{S}$,

$$V_*(t, x) = \liminf_{(t',x') \to (t,x)} V(t', x')$$

$$V^*(t, x) = \limsup_{(t',x') \to (t,x)} V(t', x')$$

Définition 2.7. On dit que f est **semi-continue supérieurement** en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U, \ f(x) \leq f(x_0) + \epsilon.$$

On dit que f est **semi-continue inférieurement** en x_0 si $\forall \epsilon > 0$, il existe un voisinage U de x_0 tel que

$$\forall x \in U, \ f(x) \geq f(x_0) - \epsilon.$$

On peut montrer que V_* et V^* sont semi-continues inférieurement et supérieurement respectivement.

Théorème 2.6. *Supposons que V est localement bornée. Soit $\{\theta^\nu, \nu \in \mathcal{U}_t\}$ une famille de temps d'arrêt finis indépendants de $\mathcal{F}_t$ à valeurs dans $[t, T]$, alors*

$$V(t, x) \geq \sup_{\nu \in \mathcal{U}_t} \mathbb{E}[\int_t^{\theta^\nu} \beta^\nu(t, s) f(s, X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) ds + \beta^\nu(t, \theta^\nu) V_*(\theta^\nu, X_{\theta^\nu}^{t,x,\nu})]. \tag{42}$$

Et si on suppose de plus que g est semi-continue inférieurement et $X^{t,x,\nu}$ est bornée pour tout $\nu \in \mathcal{U}_t$, alors

$$V(t, x) \leq \sup_{\nu \in \mathcal{U}_t} \mathbb{E}[\int_t^{\theta^\nu} \beta^\nu(t, s) f(s, X_s^{t,x,\nu}, \nu_s) ds + \beta^\nu(t, \theta^\nu) V^*(\theta^\nu, X_{\theta^\nu}^{t,x,\nu})]. \tag{43}$$

Introduisons maintenant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Notons $\mathcal{S}^d$ l'ensemble des matrices symétriques de tailles d à coefficients réels et on définit la fonction sur $\mathbf{S} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^d$ par

$$H_{t,x}(r,p,\gamma) := \sup_{u \in U}\{-k(t,x,u)r + b(t,x,u)p + \frac{1}{2}Tr[\sigma\sigma^T(t,x,u)\gamma] + f(t,x,u)\}. \tag{44}$$

Théorème 2.7 (Formule d'Itô)**.** *Soient $X^1, \cdots, X^p$ p semi-martingales continues et soit F une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$F(X_t^1, \cdots, X_t^p) = F(X_0^1, \cdots, X_0^p) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i} dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} d\langle X_s^i, X_s^j\rangle \tag{45}$$

Théorème 2.8. *Supposons que $V \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^n)$ et que k et f soient continues en (t,x) pour tout $u \in U$. Alors pour tout $(t,x) \in \boldsymbol{S}$,*

$$-\partial_t V(t,x) - H(t,x,V(t,x), DV(t,x), D^2V(t,x)) \geq 0 \tag{46}$$

Théorème 2.9. *Supposons que $V \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^n)$ et que la fonction H soit continue. Si k est uniformément bornée, alors pour tout $(t,x) \in \boldsymbol{S}$,*

$$-\partial_t V(t,x) - H(t,x,V(t,x), DV(t,x), D^2V(t,x)) \leq 0 \tag{47}$$

Théorème 2.10. *Si les hypothèses des théorèmes* 2.8 *et* 2.9 *sont vérifiées, alors la fonction V est solution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman*

$$-\partial_t V - H(\cdot, V, DV, D^2V) = 0 \tag{48}$$

sur $\boldsymbol{S}$.

2.3 Application au cas d'action cachée

Soit $T > 0$ la maturité et $\Omega := C^0([0,T], \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,T]$ à $\mathbb{R}^d$. On note X le processus canonique sur Ω représentant le résultat réalisé par l'agent, i.e. $X_t(\omega) = \omega(t) = \omega_t$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $t \in [0,T]$. On note également la filtration canonique $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ où

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s, s \leq t).$$

On note $\mathbb{P}_0$ la mesure de Wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.

Le processus de contrôle représentant l'action de l'agent ν est un processus $\mathbb{F}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Plus précisément, le processus du résultat est décrit par l'équation différentielle stochastique contrôlée suivante

$$X_s^{t,x,\nu} = x + \int_t^s \mu_r(X^{t,x,\nu}, \nu_r)dr + \sigma_r(X^{t,x,\nu}, \nu_r)dW_r. \tag{49}$$

Définition 2.8. On dit que l'équation différentielle stochastique a une solution faible s'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ et un processus de contrôle ν tels que $\mathbb{P}[X_{\cdot\wedge t} = \omega_{\cdot\wedge t}] = 1$ et

$$X - \int_t \mu_r(X, \nu_r^{\mathbb{P}})dr$$

et

$$X \cdot X^T - \int_t (\sigma_r \sigma_r^T)(X, \nu_r^{\mathbb{P}})dr$$

soient des martingales sous $\mathbb{P}$.

D'une part, fixons $(t, x, \mathbb{P})$ avec un processus de contrôle $\nu^{\mathbb{P}}$. On suppose que l'agent est employé à l'instant t et il est payé à la maturité T pour une compensation ξ qui est supposée $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Le problème de l'agent s'écrit alors

$$V_A(\xi) = \sup_{\nu} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\xi - \int_t^T c_s(X, \nu_s)ds]. \tag{50}$$

D'autre part, notons $\mathcal{P}^*(\xi)$ l'ensemble des solutions de $V_A(\xi)$ que l'on suppose non-vide, alors le problème du principal s'écrit

$$V_P = \sup_{\xi, \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}^*(\xi)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[U_P(-\xi(X) + l(X))] \tag{51}$$

où $l : \Omega \to \mathbb{R}$ qui prend valeur dans l'espace des trajectoires continues. S'il n'y a pas de contrainte sur les contrats, le principal peut très bien proposer à l'agent de lui payer 10 milliards et peu import ce que l'agent décide de faire, peu import à quel point l'agent est mécontent, le principal touche au moins 10 milliards. C'est pour cela que l'on va ajouter la **contrainte de participation** (sinon ce serait considéré comme de l'esclavagisme) : $V_A(\xi) > R$ où R est la valeur minimale d'utilité que l'agent doit recevoir.

On pose

$$H_t(x, z, \gamma) = \sup_{u \in U}\{\mu_t(x, u)z + \frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T\gamma)(t, x, u) - c_t(x, u)\} \tag{52}$$

et pour tout Z, Γ $\mathbb{F}$-mesurables, pour toute $\mathbb{P} \in \mathcal{P}^\nu$ où $\mathcal{P}^\nu$ est l'ensemble des solutions faibles pour l'équation différentielle stochastique contrôlée (48), on pose

$$Y_t^{Z,\Gamma} = Y_0 + \int_0^t Z_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t Tr(\Gamma_s d\langle X\rangle_s) - \int_0^t H_s(Z_s, \Gamma_s)ds. \tag{53}$$

Proposition 2.11. *$\forall Y_0 \in \mathbb{R}$, $\forall Z, \Gamma$ $\mathbb{F}$-mesurables, sous des hypothèses techniques, on a*

$$V_A(Y_T^{Z,\Gamma}) = Y_0 \tag{54}$$

avec le contrôle optimal donné par $v_t^*(\omega) = \operatorname{argmin} H_t(\omega, Z_t, \Gamma_t)$

Par conséquent, on a immédiatement

$$V_P \geq \sup_{Y_0 \geq R} \sup_{Z,\Gamma} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{Z,\Gamma}}[U(-\xi + l)]; \tag{55}$$

de plus, sous $\mathbb{P}_{Z,\Gamma}$, X et Y vérifient les EDS contrôlées suivantes

$$dX_s^{t,x,\nu} = \mu_s(X^{t,x,\nu}, \nu_s)ds + \sigma_s(X^{t,x,\nu}, \nu_s)dW_s \tag{56}$$

$$dY_s^{Z,\Gamma} = Z_s dX_s + \frac{1}{2} Tr(\Gamma_s d\langle X \rangle_s) - H_s(Z_s, \Gamma_s)ds \tag{57}$$

Théorème 2.12.

$$V_P = \sup_{Y_0 \geq R} \sup_{Z,\Gamma} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{Z,\Gamma}}[U(-\xi + l)].$$

Références

[1] Jaksa Cvitanic, Jianfeng Zhang, *Contract Theory in Continuous-Time Models*, Springer.

[2] Jaksa Cvitanic, Dylan Possamaï, Nizar Touzi, *Dynamic Programming Approach to Principal-Agent Problems*, Novembre 2015.

[3] Bolton, P., Dewatripont, M. *Contract Theory.* MIT Press, 2005.

[4] Laffont, J.J. Martimort, D. *The Theory of Incentives : The Principal-Agent Model.* Princeton University Press, 2001.

[5] Salanie, B. *The Economics of Contracts : A Primer.* MIT Press, 2005.

[6] Borch, K. *Equilibrium in a reinsurance market.* Econometrica 30, 424-444, 1962.

[7] Jaksa Cvitanic, Jianfeng Zhang, *Optimal compensation with adverse selection and dynamic actions.* Math. Financ. Econ. 1, 21-55, 2007.

[8] Wilson, R. *The Theory of Syndicates.* Econometrica 36, 119-132, 1968.