Introduction au domaine de recherche : Chaos multiplicatif gaussien

Yichao HUANG
sous la direction de Rémi RHODES et Vincent VARGAS

Octobre 2013

Résumé

La théorie du chaos multiplicatif gaussien a été introduite rigoureusement par J.P. Kahane en 1985. Après son succès pour la modélisation stochastique de la turbulence en 3d, elle s'est avérée importante aujourd'hui dans beaucoup de domaines variés tels que la gravité quantique de Liouville ou encore la finance. Dans cette courte introduction, nous essayons de donner un point de vue intuitif à la construction du chaos multiplicatif gaussien, en passant par le modèle discret dit des cascades de Mandelbrot qui est à l'origine de cette théorie.

Organisation du manuscript :

1 Introduction : modèle des cascades de Mandelbrot

Dans cette section, une “nouvelle” variable aléatoire désigne une variable aléatoire indépendante de toutes les autres variables aléatoires qui sont déjà présentes. Cette section est rédigée de façon libre et informelle, le but étant de donner quelques intuitions et motivations pour la construction du chaos multiplicatif gaussien.

Rappelons la construction de Lévy du mouvement brownien (en dimension 1) en suivant [1]. L’image que donne cette construction est celle d’un segment élastique, que l’on déforme sous l’action additive d’une famille de variables aléatoires gaussiennes d’espérance 0 indépendantes.
• On part du segment (0,0)–(1,0).

Figure 1 – Un segment

•$*$ On change le segment (0,0)–(1,0) en (0,0)–(1,ξ) avec ξ une variable gaussienne standard[1].
• On regarde les demi-segments (0,0)–(1/2,ξ/2) et (1/2,ξ/2)–(1,ξ).
• Pour chaque segment, on prend une nouvelle variable gaussienne standard ξ_0 (resp. ξ_1) et on le change en (0,0)–($1/2^2$,$\xi_0/2^2 + \xi/2^2$)–(1/2,ξ/2) (resp. (1/2,ξ/2)–($3/2^2$,$\xi_1/2^2 + 3\xi/2^2$)–(1,ξ)).
• Et ainsi de suite. La régle à la n-ième étape de la construction : on voit un segment affine de longueur $1/2^n$, on va tirer son point au milieu à une distance verticale $\xi_*/2^{n+1}$ par rapport à sa position initiale, avec ξ_* une nouvelle variable gaussienne standard.

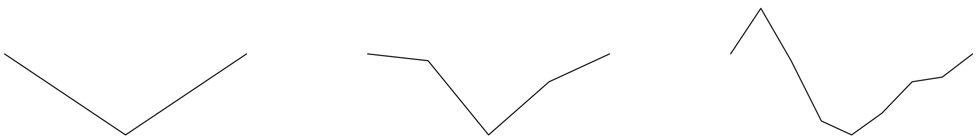

Figure 2 – Les trois premières étapes (pour un pont brownien)

L’objet que l’on obtient à la limite quand n tend vers l’infini est le mouvement brownien standard sur l’intervalle $[0, 1]$.
Rappelons une définition propre du mouvement brownien standard :

Définition 1.1 (Mouvement brownien standard)**.** *Un mouvement brownien standard* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un processus gaussien centré de covariance* $K(s,t) = \min(s,t)$.

En particulier, il s’agit d’un processus gaussien.

Rappelons maintenant la construction de Mandelbrot du modèle des cascades multiplicatives (en dimension 1) en suivant l’article [2].
L’image que donne cette construction est celle d’un pavé (divisible) élastique, que l’on déforme sous l’action multiplicative d’une famille de variables aléatoires d’espérance 1 indépendantes.
Fixons W une variable aléatoire d’espérance 1.
• On part du segment (0,1)–(1,1) et on regarde le pavé en-dessous de lui.
• On regarde les demi-segments (0,1)–(1/2,1) et (1/2,1)–(1,1).
• Pour chaque segment, on prend une nouvelle variable W_0 (resp. W_1) ayant la même loi que W

1. Si en revanche on impose $\xi = 0$, alors on obtiendra un pont brownien de (0,0) à (1,0).

FIGURE 3 – Un pavé

et on le change en $(0,W_0)$–$(1/2,W_0)$ (resp. $(1/2,W_1)$–$(1,W_1)$).
• Et ainsi de suite. La règle à la n-ième étape de la construction : on voit un segment horizontal de longueur $1/2^n$, on va le diviser en deux segment horizontaux de longueur $1/2^{n+1}$, et pour chaque segment, on choisit une nouvelle variable aléatoire ayant la même loi que W et on multiplie la hauteur du segment par cette nouvelle variable aléatoire.

FIGURE 4 – Les trois premières divisions (simulation avec $\mathcal{U}([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}])$)

On note Y_n la masse totale (i.e. le volume) après la n-ième étape et Y_∞ la masse totale à l'infini. Remarquons que Y_n forme une martingale et Y_∞ est la limite faible des Y_n. Cette martingale n'étant pas uniformément intégrable, il se peut que la limite Y_∞ soit dégénérée.
Bien sûr, dans la construction précédente, on peut diviser chaque intervalle en c parties égales au lieu de 2.
Concernant ce modèle des cascades, on a le théorème suivant (voir [2] pour une preuve) :

Théorème 1.1 (Critères de dégénérescence)**.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$ *;*
b) $\mathbb{E}[Y_\infty] > 0$ *;*
c) $\mathbb{E}[W \ln W] < \ln c$.

Ce modèle devient particulièrement intéressant quand la variable multiplicatrice W est gaussienne, i.e. de la forme $\exp(\xi - \mathbb{E}[\xi^2]/2)$, avec ξ une variable gaussienne centrée réduite. On verra dans la suite la construction du chaos multiplicatif gaussien, qui en est un modèle analogue dans le continu.

2 Chaos multiplicatif gaussien : construction

Cette section ainsi que celle qui suit sont basées sur l'article [3].
On introduit maintenant le chaos multiplicatif gaussien, qui est la version continue d'un cas particulier du modèle précédent. On se place dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$.

[Un peu de fausses intuitions...
S'inspirant de la construction des cascades multiplicatives avec W gaussienne, le chaos multiplicatif gaussien en un point x sera alors "défini" comme

$$Q(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\xi_n - \frac{\mathbb{E}[\xi_n^2]}{2}} = e^{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \xi_n - \frac{\mathbb{E}[\xi_n^2]}{2}}$$

avec $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables gaussiennes centrées indépendantes.
Donc si l'on définit $X = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n$, on a envie de définir Q par

$$Q(x) = e^{X - \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2}}$$

Malheureusement cette définition n'est pas rigoureuse. Par exemple si l'on prend pour chaque ξ_n une gaussienne centrées réduites, X sera de variance infinie...
Il va falloir en effet définir une distribution (au sens de Schwartz) plutôt qu'une fonction.]

Cette fois-ci on fait une construction plus directe et plus générale sans passer par la division des pavés. Tout comme le mouvement brownien est défini comme un processus gaussien, on va regarder un processus gaussien indexé par l'espace $\mathbb{R}^d$. Dans la littérature on l'appelle plutôt champ gaussien, car la géométrie de l'espace sous-jacent (ici $\mathbb{R}^d$) joue souvent un rôle dans l'étude de notre processus. Le but maintenant est de construire un objet qui est l'exponentielle (renormalisée) de ce champ gaussien, comme annoncé antérieurement.
Prenons donc un champ gaussien X défini sur $\mathbb{R}^d$. Le but est de donner un sens à l'objet suivant :

$$A \mapsto \int_A e^{X(x) - \frac{\mathbb{E}[X(x)^2]}{2}} dx$$

pour tout borélien A borné de $\mathbb{R}^d$. Si l'on arrive à construire proprement un tel objet, on dispose alors d'une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$. Bien sûr si l'on remplace dx par une mesure de Radon quelconque, alors on définit une action sur l'espace des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^d$.
Dans la suite de cette section, on suppose que le noyau de covariance q de X (rappelons que q est définie par $q(x, y) = \mathbb{E}[X(x)X(y)]$, et qu'il est symétrique positif) s'écrit comme la somme d'une suite de noyaux gaussiens positifs continus $q = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.
On prend alors une suite de champs gaussiens X_i indépendants, chaque X_i ayant p_i comme noyau de covariance. En vue d'étudier $\sum_{n=1}^{+\infty} X_i$, on introduit la somme partielle $Y_k = \sum_{n=1}^{k} X_k$ et on regarde, pour chaque borélien A borné,

$$Q_k(A) = \int_A e^{Y_k(x) - \frac{\mathbb{E}[Y_k(x)^2]}{2}} dx = \int_A \prod_{n=1}^{k} e^{X_n(x) - \frac{\mathbb{E}[X_n(x)^2]}{2}} dx$$

Par indépendance des X_n, ceci est une martingale ! En plus elle est positive, donc elle converge p.s. vers une limite que l'on note $Q(A)$. On appelle Q l'opérateur chaos multiplicatif gaussien (qui agit sur l'espace des mesures de Radon positives sur $\mathbb{R}^d$, les calculs précédents se généralisent facilement à une mesure de Radon positive quelconque).
On laisse aux lecteurs le soin de vérifier que ceci nous définit bien une mesure de Radon aléatoire.
Résumons :

Définition 2.1 (Opérateur du chaos multiplicatif gaussien). *Soit σ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^d$. X un champ gaussien de noyau de covariance q, et X_n une suite de champs gaussiens de noyau de covariance p_n respectif (positif, continu) telle que $q = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n$.*
Alors l'opérateur du chaos multiplicatif gaussien Q agit sur σ par

$$Q\sigma(A) = \lim_{k\to+\infty} \int_A \prod_{n=1}^{k} e^{X_n(x) - \frac{\mathbb{E}[X_n(x)^2]}{2}} d\sigma(x)$$

avec A borélien borné quelconque.

Attention toutefois que pour l'instant, cette définition du chaos multiplicatif gaussien dépend de la suite de décomposition p_n choisie. On verra dans la suite un théorème d'unicité qui enlèvera cette malheureuse liaison.

3 Chaos multiplicatif gaussien : théorèmes principaux

Le premier théorème justifie la construction du chaos multiplicatif gaussien : sa définition ne dépend pas de la décomposition choisie. Le second théorème important est un phénomène de transition de phases pour une certaine classe intéressante du chaos multiplicatif gaussien, tout comme dans le cas discret.

Théorème 3.1 (Unicité). *L'opérateur du chaos multiplicatif gaussien Q ne dépend pas du choix de la suite de noyaux p_n. Plus précisément, si Q est l'opérateur associé à la décomposition p_n et Q' celui associé à la décomposition p'_n avec $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p'_n = q$, alors Q et Q' sont égaux en loi.*

Voici quelques idées clés de la démonstration de ce théorème.
Rappelons d'abord le théorème de De la Vallée Poussin qui permet de détecter l'uniforme intégrabilité d'une martingale par le biais d'une fonction convexe F :

Lemme 3.2 (Théorème de De la Vallée Poussin). *Soit $(M_n)_n$ une martingale. Elle est uniformément intégrable ssi il existe une fonction convexe $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ et un α fixé positif tels que*
1) $\frac{F(x)}{x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$;
2) $F(\lambda x) \leq \lambda^\alpha F(x)$ pour tout $\lambda > 0$;
3) $\sup_n \mathbb{E}[F|M_n|] < +\infty$.

On dispose ensuite de l'inégalité de convexité de Kahane pour les processus gaussiens, qui nous permet de comparer (via une fonction convexe F) deux chaos multiplicatifs gaussiens dont les champs gaussiens sous-jacents ont des noyaux de covariance uniformément proches.

Lemme 3.3 (Inégalité de convexité de Kahane). *Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles finies de variables aléatoires réelles gaussiennes. On suppose que $\forall i, j \in I$, $\mathbb{E}[X_iX_j] \leq \mathbb{E}[Y_iY_j]$. Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe avec croissance au plus polynomiale à l'infini. Alors*

$$\forall p_i \geq 0, \mathbb{E}[F(\sum_{i\in I} p_i \exp(X_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_i^2]))] \leq \mathbb{E}[F(\sum_{i\in I} p_i \exp(Y_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_i^2]))]$$

Les sommes partielles de p_n et de p'_n sont très proche uniformément à l'infini : c'est assuré par le théorème de Dini. Alors on peut comparer les chaos associés à l'aide de l'inégalité de Kahane, via une fonction convexe F. Les chaos sont en effet comparables à un facteur multiplicatif près

(toujours via la fonction convexe F). Mais alors par le théorème de De la Vallée Poussin, si l'un est uniformément intégrable, l'autre le sera aussi par la 3) du théorème. Les détails et le reste de la preuve sont laissés aux lecteurs (ils sont dans les références).
Dans la suite de cette section on se place dans le cas où le champ X est stationnaire défini sur $\mathbb{R}^d$, de fonction de covariance $q(x) = -\gamma^2 \log|x| + O(1)$, où x désigne la distance entre deux points (par stationnarité). On observe alors un phénomène de transition de phases lorsque le paramètre γ se rapproche de $\sqrt{2d}$.

Théorème 3.4 (Transition de phases)**.** *σ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*
Soit Q le chaos multiplicatif gaussien associé à q.
- *Si $\gamma^2 < 2d$, alors σ est fortement non-dégénérée pour Q : $\mathbb{E}[Q\sigma(A)] = A$ pour tout borélien A ;*
- *Si $\gamma^2 \geq 2d$, alors σ est dégénérée pour Q : $\mathbb{E}[Q\sigma(A)] = 0$ pour tout borélien A.*

Ce théorème se démontre à partir du théorème dans le cas discret (théorème 1.1) en utilisant des techniques d'approximation (l'idée étant d'approximer un intervalle par un ensemble auto-similaire construit à la Cantor, puis d'utiliser le théorème dans le cas discret sur l'arbre naturellement associé à cette construction). Les détails se trouvent dans l'article [3].

4 Chaos multiplicatif gaussien : cas critique

On dit un mot sur le comportement au voisinage du point critique du chaos multiplicatif gaussien. Cette section est basée sur l'article [4].
On se place toujours dans le cas où l'espace ambient est $\mathbb{R}^d$ (ou un sous-domaine de $\mathbb{R}^d$), avec X un champ de noyau de covariance $K(s,t) = -\log|s-t| + O(1)$. Le noyau de covariance pour γX sera alors $K^\gamma(s,t) = -\gamma^2 \log|s-t| + O(1)$.
On compte parmi les exemples du champ gaussien log-corrélé le très étudié champ libre gaussien (*gaussian free field* en anglais) ou encore le champ libre gaussien massif (*massive gaussian free field* en anglais).
Remarquons tout de suite que le cas sur-critique est facile à étudier car on sait d'après le théorème de Kahane (théorème 3.4) que la mesure limite est dégénérée dans ce cas.
Pour étudier le chaos multiplicatif gaussien dans le cas sous-critique, on introduit la martingale dérivée, obtenue en dérivant formellement par rapport au paramètre γ :

$$M'_t(A) = -\frac{\partial}{\partial\gamma}[M_t^\gamma(A)]_{\gamma=\sqrt{2d}} = [\int_A (\gamma\mathbb{E}[X_t(x)^2] - X_t(x))e^{\gamma X_t(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_t(x)^2]}dx]_{\gamma=\sqrt{2d}}$$

où X_t est un champ gaussien stationnaire de noyau

$$K_t(x) = \int_1^{e^t} \frac{k(ux)}{u} du$$

(avec k un noyau gaussien, $k(0) = 1$) de sorte que $\lim_{t\to+\infty} K_t(x) = K(x)$.

[Par exemple, pour le champ libre gaussien massif de masse m,

$$K(x) = G_m(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2u} e^{-mu - \frac{|x|^2}{2u}} du = \int_1^{+\infty} \frac{k_m(ux)}{u} du$$

avec $k_m(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{m|z|^2}{v} - \frac{v}{2}} dv$.]

Concernant M'_t, on a le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Théorème DRSV)**.** *Supposons que k est à support compact. Alors quand t tend vers l'infini, M'_t converge p.s. vers une limite non triviale que l'on note M'. En plus, M' est à support plein et sans atome.*

Les hypothèses telles que la stationnarité sur X et la compacité du support sur k peut-être relaxées, à conditions d'avoir une décroissance rapide du noyau de covariance K.
Différentes preuves sont proposées, basées sur la méthode dite du cut-off : on exploite le caractère log-corrélé du champ et on distingue le phénomène de courte corrélation avec celui à longue portée. La preuve étant technique, les lecteurs intéressés par les détails techniques sont invités à consulter les références.

5 Chaos multiplicatif gaussien : la suite

On en trouve déjà dans la littérature beaucoup de généralisations et d'applications de la théorie du chaos multiplicatif gaussien. Les lecteurs intéressés peuvent consulter [5].
Le chaos multiplicatif gaussien est aussi parmi les candidats pour la limite continue de surfaces aléatoires discrètes [2].
À vous d'écrire la suite des aventures dans le monde du chaos multiplicatif gaussien !

Références

[1] P. Lévy, « Le mouvement brownien », 1954.

[2] J.-P. Kahane et J. Peyrière, « Sur certaines martingales de benoit mandelbrot », *Advances in Mathematics*, vol. 22, no. 2, p. 131–145, 1976.

[3] J.-P. Kahane, « Sur le chaos multiplicatif », *Ann. Sci. Math. Québec*, 1985.

[4] B. Duplantier, R. Rhodes, S. Sheffield et V. Vargas, « Critical gaussian multiplicative chaos : convergence of the derivative martingale », *arXiv preprint arXiv :1206.1671*, 2012.

[5] R. Rhodes et V. Vargas, « Gaussian multiplicative chaos and applications : a review », *arXiv preprint arXiv :1305.6221*, 2013.

2. On rappelle que le mouvement brownien est limite continue d'une marche aléatoire simple symétrique.