Introduction au domaine de recherche

Espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques

Hugo LAVENANT
sous la direction de Filippo SANTAMBROGIO

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

12 octobre 2015

« *Et l'on s'aperçoit, à méditer le travail mathématicien, qu'il provient toujours d'une extension d'une connaissance prise sur le réel et que, dans les mathématiques mêmes, la réalité se manifeste en sa fonction essentielle : faire penser.* »

Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*.

Motivation

S'il est indéniable que les théories physiques modernes sont écrites en langage mathématique, la rigueur mathématique de celles-ci n'est pas toujours assurée. Ce n'est pas un problème pour le physicien : même si certaines dérivations mathématiques sont formelles, même si certains objets sont mal définis mathématiquement, « *l'accord avec l'expérience est, pour une théorie physique, l'unique critérium de vérité* » pour reprendre la formule de Duhem. Mais, à un moment ou à un autre, pour la clarifier et s'assurer qu'elle ne contient pas de contradictions logiques internes ou n'énonce pas de non-sens, il devient nécessaire d'assurer à une théorie physique des fondements mathématiques irréprochables.

Le travail effectué dans mon mémoire de M2, réalisé sous la direction de Filippo Santambrogio, s'inscrit dans cette démarche puisqu'il présente une théorie des espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques, avant de l'utiliser pour formuler rigoureusement des théories issues de la physique.

On rappellera tout d'abord la définition des espaces de Sobolev « classiques » afin de montrer en quoi notre définition des espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques l'englobe et la dépasse, puis l'on présentera deux théories que l'on peut formuler rigoureusement avec cette définition : celle de l'élasticité et celle du transport optimal avec pénalisation en gradient.

Table des matières

1 Les espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques **2**

1.1 Les espaces de Sobolev classiques . . . 2

1.2 L'extension au cas d'une mesure quelconque : le défaut d'unicité des dérivées . . . 2

1.3 L'espace tangent . . . 4

2 Problèmes d'élasticité et questions liées **5**

2.1 La théorie de l'élasticité . . . 5

2.2 Les structures singulières . . . 6

3 Problèmes de transport optimal et questions liées **8**

3.1 Le transport optimal avec pénalisation en gradient . . . 8

3.2 Un résultat d'existence en dimension un . . . 10

3.3 Des questions restant ouvertes . . . 11

Références **13**

1 Les espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques

1.1 Les espaces de Sobolev classiques

Rappelons tout d'abord quelques notations. On se place dans un domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ (où $d \geqslant 1$ est un entier) et l'on note $\mathcal{L}$ la mesure de Lebesgue sur Ω. On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact sur Ω et à valeurs réelles, et $D^a\varphi : \Omega \to S^a\mathbf{R}^d$ la différentielle a-ième de φ ($S^a\mathbf{R}^d$ désigne donc l'ensemble des applications a-linéaires symétrique sur $\mathbf{R}^d$).

On se fixe dans toute la suite un entier $p \in \,]1\,,+\infty[$ (on exclut les cas critiques $p = 1$ et $p = +\infty$).

Si $(E, |\ |)$ est un espace de Banach de dimension finie et si μ est une mesure de Radon positive sur Ω, on note $L^p_\mu(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions $u : \Omega \to E$ mesurables dont la puissance p-ième de la norme est intégrable, et $\|\ \|_{p,\mu}$ désigne la norme sur $L^p_\mu(\Omega, E)$. Dans le cas $E = \mathbf{R}$, on le note $L^p_\mu(\Omega)$, et si $\mu = \mathcal{L}$, on omet l'indice $\mathcal{L}$ et on le note $L^p(\Omega, E)$. On rappelle que l'espace de Sobolev $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ d'ordre k est défini de la façon suivante :

Définition 1.1. *L'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que pour tout $a \leqslant k$, $D^a u \in L^p(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$.*

Dans cette définition, le point important est que $D^a u$ est défini au sens des distributions. En effet, une fonction u s'identifie à une distribution d'ordre 0 *via* la formule

$$\langle u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)'\times\mathcal{D}(\Omega)} := \int_\Omega u\varphi \,\mathrm{d}\mathcal{L}, \tag{1.1}$$

cette expression a un sens puisque $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Ce qu'impose la définition, c'est que $D^a u$, en tant que distribution, se représente à l'aide d'un élément de $L^p(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$.

En pratique, cette définition dit qu'une fonction dans $W^{k,p}(\Omega)$ est différentiable k fois, ou du moins parler de sa différentielle a-ième à un sens dans $L^p(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$ pour $a \leqslant k$.

1.2 L'extension au cas d'une mesure quelconque : le défaut d'unicité des dérivées

À partir de maintenant, la mesure de Lebesgue n'est plus la seule qui joue un rôle : on se donne une mesure μ de Radon finie sur Ω. On a envie de définir $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in L^p_\mu(\Omega)$ telles que pour tout $a \leqslant k$, $D^a u \in L^p_\mu(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$. Mais le gros obstacle à cette généralisation est qu'un élément u de $L^p_\mu(\Omega)$ ne peut s'identifier à une distribution d'ordre 0 *via* la formule (1.1). En effet, un tel u n'est pas forcément localement intégrable par rapport à $\mathcal{L}$: pour s'en convaincre, il suffit de méditer le cas où μ est étrangère à $\mathcal{L}$, et de se souvenir qu'un élément de $L^p_\mu(\Omega)$ est défini μ-presque partout. Même dans le cas où μ est à densité par rapport à $\mathcal{L}$, il faut que la densité de μ par rapport à $\mathcal{L}$ ne soit « pas trop proche » de 0, plus précisément on a le résultat suivant :

Proposition 1.2. *Soit $f \in L^1(\Omega)$ une fonction positive, on note $\mu := f \cdot \mathcal{L}$. L'injection de $L^p_\mu(\Omega)$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est continue si et seulement si $f^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

La preuve de cette proposition repose sur une application judicieuse de l'inégalité de Hölder.

En fait, dans le cas d'une mesure μ quelconque, les dérivées ne peuvent pas être définies au sens des distributions : elles ne sont plus définies de manière unique et le but de la théorie qui va suivre est de décrire le défaut d'unicité de celles-ci. Il existe dans la littérature plusieurs définitions des espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques, par exemple dans le contexte des espaces métriques (cf. [6] ou [11, section 5]) ou des mesures à densité (cf. [7]). La définition que l'on présente ici provient de [15] et a notamment été reprise par Louet [9].

L'approche est de dire qu'une fonction $u \in L^p_\mu(\Omega)$ est dans $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ s'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $L^p_\mu(\Omega)$ et telle que les suites $(D\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(D^2\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}, \ldots, (D^k\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soient convergentes dans L^p_μ.

Pour l'écrire formellement, on introduit une notation supplémentaire. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $S^{\leqslant k}\mathbf{R}^d$ l'ensemble

$$S^{\leqslant k}\mathbf{R}^d := \bigoplus_{a=0}^{k} S^a\mathbf{R}^d \simeq \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times S^2\mathbf{R}^d \times \ldots \times S^k\mathbf{R}^d. \tag{1.2}$$

Un élément de l'espace $L^p_\mu(\Omega, S^{\leqslant k}\mathbf{R}^d)$ est alors vu comme une collection de $k+1$ fonctions $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ telle que $u_a \in L^p_\mu(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$ pour tout $a \in \{0, 1, \ldots, k\}$. On note $\pi_a : L^p_\mu(\Omega, S^{\leqslant k}\mathbf{R}^d) \to L^p_\mu(\Omega, S^a\mathbf{R}^d)$ la projection sur la a-ième composante, c'est-à-dire que $\pi_a(u_0, u_1, \ldots, u_k) = u_a$. L'objet qui encode toute la structure de l'espace qui nous intéresse est le « graphe » $\bar{G}$:

Définition 1.3. *On note G le sous-ensemble de $L^p_\mu(\Omega, S^{\leqslant k}\mathbf{R}^d)$ défini par*

$$G := \{(\varphi, D\varphi, D^2\varphi, \ldots, D^k\varphi);\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}, \tag{1.3}$$

et $\bar{G}$ son adhérence.

En effet, à partir de $\bar{G}$, on peut définir l'espace $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ qui nous intéresse.

Définition 1.4. *On note $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ le sous-ensemble de $L^p_\mu(\Omega)$ défini par*

$$W^{k,p}_\mu(\Omega) := \pi_0(\bar{G}), \tag{1.4}$$

et la norme d'un élément u de $W^{k,p}_\mu(\Omega)$ est définie par

$$\|u\|_{k,p,\mu} := \inf\left\{\|v\|_{p,\mu};\ v \in \bar{G} \text{ et } \pi_0(v) = u\right\}. \tag{1.5}$$

Pour expliquer à quoi correspond la norme $\| \ \|_{k,p,\mu}$, on peut montrer $u \mapsto \|u\|^p_{k,p,\mu}$ est la relaxée de la fonctionnelle $\varphi \mapsto \int_\Omega \left(|\varphi|^p + |D\varphi|^p + \ldots + |D^k\varphi|^p\right) \mathrm{d}\mu$ définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire que l'on a la représentation suivante :

$$\|u\|^p_{k,p,\mu} = \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \left(|\varphi_n|^p + |D\varphi_n|^p + \ldots + |D^k\varphi_n|^p\right) \mathrm{d}\mu;\ (\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbf{N}} \text{ et } \varphi_n \to u \text{ dans } L^p_\mu(\Omega)\right\}. \tag{1.6}$$

Remarque. Notons $\pi_0^{\bar{G}}$ la restriction de π_0 à l'espace de Banach $\bar{G}$. Il est clair que l'espace $W^{k,p}_\mu(\Omega) = \pi_0(\bar{G})$ est isomorphe à $\bar{G}/\ker\left(\pi_0^{\bar{G}}\right)$. Un lecteur attentif remarquera que cet isomorphisme vaut aussi pour la norme, c'est-à-dire que la norme $\| \ \|_{k,p,\mu}$ correspond à la norme quotient sur $\bar{G}/\ker\left(\pi_0^{\bar{G}}\right)$. Avec cette observation, il n'est pas très dur de montrer que $(W^{k,p}_\mu(\Omega), \| \ \|_{k,p,\mu})$ est un espace de Banach réflexif et un espace de Hilbert dans le cas $p = 2$.

Même si on a maintenant une définition rigoureuse des espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques, le plus dur (certains diront le plus intéressant) est de décrire la structure du graphe $\bar{G}$. On présente ci-dessous une description satisfaisante lorsque $k = 1$; lorsque $k = 2$ et modulo des hypothèses supplémentaires sur μ on peut aussi arriver à une description correcte (cf. [4]) ; mais pour un ordre quelconque, il n'y a pas, à ma connaissance, de résultat général.

1.3 L'espace tangent

Lorsque $k = 1$, c'est-à-dire lorsque l'on s'intéresse à $W^{1,p}_\mu(\Omega)$, la description de $\bar{G}$ fait apparaître une notion d'espace tangent par rapport à la mesure μ. Le lecteur spécialiste de la théorie géométrique de la mesure aura peut-être reconnu ce terme, puisqu'il existe dans la littérature plusieurs définitions possibles pour cette notion d'espace tangent à une mesure, l'article [5] étudie d'ailleurs les liens qu'il peut exister entre les différentes définitions. En ce qui nous concerne, on se contente de préciser que la définition proposée ici ne fait aucune hypothèse sur la mesure μ (seulement que c'est une mesure de Radon), une contrepartie étant que l'espace tangent peut dépendre de l'exposant p.

L'espace tangent est une application définie sur Ω à valeur dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^d$ (noté $\mathrm{sev}(\mathbf{R}^d)$), en tout point on associe un sous-espace vectoriel qui donne la « direction » de μ en ce point.

On se donne quelques notations. Si $T : \Omega \to \mathrm{sev}(\mathbf{R}^d)$, on peut définir $L^p_\mu(\Omega, T)$ comme le sous-ensemble de $L^p_\mu(\Omega, \mathbf{R}^d)$ constitué des u tels que $u(x)$ appartienne à $T(x)$ pour μ-presque tout x ; et l'on peut aussi noter P_T l'opérateur qui projette point par point une fonction u sur T, c'est-à-dire que $(P_T u)(x)$ est la projection orthogonale de $u(x)$ sur $T(x)$, de sorte que $P_T u \in L^p_\mu(\Omega, T)$ dès lors que $u \in L^p_\mu(\Omega, \mathbf{R}^d)$.

Théorème 1.5 (Bouchitté 1996, Zhikov 2002). *Il existe une application mesurable $T^p_\mu : \Omega \to \mathrm{sev}(\mathbf{R}^d)$ et une application linéaire $D_\mu : W^{1,p}_\mu(\Omega) \to L^p_\mu(\Omega, T^p_\mu)$ telles que*

$$\bar{G} = \left\{(u, D_\mu u + v);\ u \in W^{1,p}_\mu(\Omega) \text{ et } v \in L^p_\mu(\Omega, (T^p_\mu)^\perp)\right\}. \tag{1.7}$$

Si de plus $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $D_\mu \varphi = P_{T^p_\mu}(D\varphi)$. Quant à la norme sur $W^{1,p}_\mu(\Omega)$, elle est donnée par

$$\|u\|_{1,p,\mu} = \left(\|u\|^p_{p,\mu} + \|D_\mu u\|^p_{p,\mu}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Pour ce qui est de la démonstration de ce théorème, on pourra se reporter à [15] ou [3].

L'application T^p_μ est l'espace tangent à la mesure μ (il est unique à un ensemble de μ-mesure nulle près), quant à D_μ, c'est l'opérateur de dérivation intrinsèque par rapport à μ. Ce que dit ce théorème, c'est que si l'on se donne $u \in W^{1,p}_\mu(\Omega)$ et si l'on note $\Gamma(u)$ l'ensemble des gradients de u, c'est-à-dire l'ensemble des $v \in L^p_\mu(\Omega, \mathbf{R}^d)$ tels que $(u, v) \in \bar{G}$, alors pour $v \in \Gamma(u)$ et $x \in \Omega$ la composante de $v(x)$ sur $T^p_\mu(x)$ ne dépend pas du choix de v, c'est le gradient intrinsèque $D_\mu u(x)$, tandis que la composante de $v(x)$ sur $(T^p_\mu(x))^\perp$ peut prendre toutes les valeurs possibles selon le choix de $v \in \Gamma(u)$. En particulier, le gradient intrinsèque $D_\mu u$ est l'élément de $\Gamma(u)$ de norme minimale.

L'identité $D_\mu \varphi = P_{T^p_\mu}(D\varphi)$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, montre que l'opérateur de dérivation intrinsèque reste local, ce qui n'est plus le cas pour les dérivées d'ordre k si $k \geqslant 2$. En effet, pour une mesure μ générique (même dans le cas où il s'agit d'une mesure de Hausdorff restreinte à une sous-variété lisse), la Hessienne d'une fonction $u \in W^{2,p}_\mu(\Omega)$ de norme minimale dépend de façon globale de u, au contraire de son gradient de norme minimale.

Exemple. Si S est sous-variété différentielle de dimension m et μ la restriction de la mesure de Hausdorff m-dimensionnelle à S, alors l'espace tangent T_μ^p coïncide μ-presque partout avec l'espace tangent de la géométrie différentielle à S : dans le cas « lisse », notre définition de l'espace tangent est cohérente avec celle qui existe déjà. On peut d'ailleurs remarquer que même dans ce cas (si $m < d$) une fonction $u \in W_\mu^{1,p}(\Omega)$ admet plusieurs gradients.

En dimension un, c'est-à-dire lorsque μ est une mesure définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, on peut obtenir une description explicite de l'espace tangent.

On note $\mu =: \mu_a + \mu_s$ la décomposition de μ en une mesure μ_a absolument continue par rapport à $\mathcal{L}$ et une mesure μ_s étrangère à $\mathcal{L}$. On désigne par A_μ un borélien tel que $\mathcal{L}(A_\mu) = 0$ et $\mu_s(I \backslash A_\mu) = 0$, tandis que $f \in L^1(I)$ est la fonction positive telle que $\mu_a = f \cdot \mathcal{L}$. Le « mauvais » ensemble M_μ^p est défini comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f^{-\frac{1}{p-1}}$ est localement intégrable. Au voisinage des points de M_μ^p la fonction f est trop proche de 0 (au sens de la proposition 1.2), et il ne sera pas possible d'identifier un élément de $L_\mu^p(I)$ à une distribution.

Théorème 1.6 (Louet 2014)**.** *Pour μ-presque tout x de I,*

$$T_\mu^p(x) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } x \notin (M_\mu^p \cup A_\mu) \\ \{0\} & \text{si } x \in (M_\mu^p \cup A_\mu) \end{cases}. \tag{1.9}$$

La démonstration de ce théorème (surtout pour ce qui est de montrer que $T_\mu^p = \{0\}$ sur M_μ^p) est assez technique, on renvoie à [9, Théorème 1.3.1].

Remarque. L'ensemble M_μ^p dépend de l'exposant p, en conséquence l'espace tangent T_μ^p peut dépendre de p.

Remarque. On peut montrer que pour tout fermé F de I, il existe une fonction f strictement positive $\mathcal{L}$-presque partout, et pourtant telle que $M_{f\cdot\mathcal{L}}^p = F$. En particulier même dans le cas où μ est absolument continue par rapport à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est absolument continue par rapport à μ, l'espace tangent n'est pas toujours égal à $\mathbf{R}$.

2 Problèmes d'élasticité et questions liées

2.1 La théorie de l'élasticité

La théorie de l'élasticité vise à décrire la forme prise par un solide lorsque l'on exerce sur lui des contraintes qui le poussent à se déformer, elle est par exemple utilisée dans l'industrie ou dans l'architecture. L'idée de base est de coder une configuration quelconque du solide étudié par un objet mathématique, puis d'associer à chaque configuration une énergie potentielle, et enfin de postuler que la configuration observée est celle qui minimise l'énergie parmi toutes les configurations acceptables (c'est-à-dire qui respectent les contraintes auxquelles est soumis le solide). On pourra consulter [8] pour une présentation générale et [10] pour le versant plus spécifiquement mathématique.

Un exemple typique est le suivant : on cherche à étudier la forme que prend un pont (cf. figure 2.1). On se donne un ouvert du plan Ω et une configuration du pont est codée par une fonction $u : \Omega \to \mathbf{R}$: $u(x)$ donne l'altitude prise par le pont au point $x \in \Omega$. Aux endroits où le pont est encastré, on impose

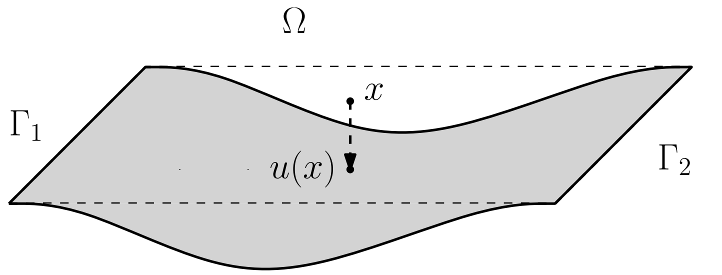

FIGURE 2.1 – La forme d'un pont (en gris) est codée par un domaine Ω du plan (en pointillés) et une fonction u telle que $u(x)$ donne l'altitude du pont au point x. Aux bords Γ_1 et Γ_2 de Ω le pont est encastré, c'est-à-dire $u = 0$ et $Du = 0$.

$u = 0$ et $Du = 0$. Si l'on suppose que le pont est soumis uniquement à son propre poids et aux contraintes élastiques internes, l'énergie $E(u)$ d'une configuration, après adimensionnement, prend la forme

$$E(u) := \underbrace{\int_\Omega H(D^2u)\,\mathrm{d}\mathcal{L}}_{\text{énergie élastique}} + \underbrace{\int_\Omega \lambda u\,\mathrm{d}\mathcal{L}}_{\text{énergie de pensanteur}}, \tag{2.1}$$

où H est une fonction convexe croissant de manière quadratique définie sur l'ensemble des matrices symétriques, typiquement $H(S) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(S)^2 + (\sigma - 1)\mathrm{det}(S)$. Les coefficients $\lambda > 0$ et $\sigma > -1$ dépendent des matériaux dont est constitué le pont.

À partir de là, un certain nombre de questions se posent, et l'on peut les aborder avec les outils des espaces de Sobolev « classiques » :

– Parmi quelle classe de fonctions cherche-t-on à minimiser l'énergie ? Ici, au vu de la croissance de la fonction H, on cherche parmi les fonction $u \in W^{2,2}(\Omega)$ satisfaisant les bonnes conditions aux limites, c'est-à-dire $u = 0$ et $Du = 0$. En particulier, on peut vérifier que ces conditions aux limites ont bien un sens pour une fonction $u \in W^{2,2}(\Omega)$.
– Parmi cette classe de fonctions, la fonctionnelle E admet-elle un minimum ? Ici, la méthode directe du calcul des variations fonctionne. En particulier les injections de Sobolev garantissent qu'une borne sur l'énergie élastique d'une suite minimisante assure, à extraction près, une convergence faible dans $W^{2,2}(\Omega)$ et forte dans $W^{1,2}(\Omega)$.
– Quelle est la régularité de la fonction u minimisant E ? À l'intérieur de Ω, des théorèmes de régularité elliptique vont assurer que la fonction u est de classe C^∞, au bord c'est plus délicat et cela dépend de la régularité de ce dernier.

2.2 Les structures singulières

Le problème du pont est à la base tridimensionnel mais on arrive à se ramener à une structure bidimensionnelle en négligeant son épaisseur et en étudiant uniquement les déviations par rapport à la position au repos selon la verticale comme on l'a fait ci-dessus. Mais pour une structure générique qui a la forme d'une surface S et pour laquelle une telle simplification n'existe pas, la question est plus délicate. Une approche, notamment étudiée dans [2], est d'« épaissir » S en considérant l'ensemble S_δ des points situés à distance au plus δ de S, puis de définir l'énergie tridimensionnelle renormalisée d'une

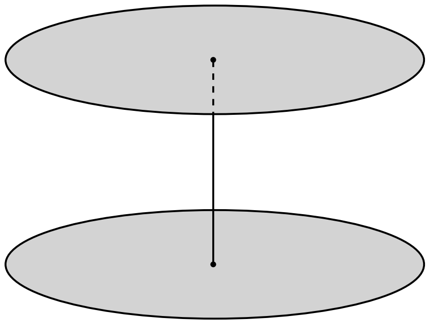

FIGURE 2.2 – Exemple de structure singulière composée de deux disques (c'est-à-dire des parties surfaciques) reliés par une tige (c'est-à-dire une partie linéique). Il est alors judicieux de coder une telle structure par une seule mesure μ donnant la répartition de masse sur celle-ci.

configuration par

$$E_\delta(u) := \frac{1}{\delta}\int_{S_\delta} (\hat{H}(D^2u) + \lambda u)\,\mathrm{d}\mathcal{L}, \tag{2.2}$$

où $\hat{H}$ est la densité d'énergie élastique interne tridimensionnelle, et d'étudier sa limite au sens de la Γ-convergence lorsque $\delta \to 0$. Le problème de cette approche est qu'elle dépend de la géométrie particulière de S et éventuellement de la procédure d'« épaississement » choisie. Une autre approche est de coder S par la mesure de Hausdorff surfacique restreinte à S (ou plus généralement par la distribution de masse sur S), que l'on note μ, et de définir

$$E(u) := \int_S (\hat{H}(D^2u) + \lambda u)\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.3}$$

L'avantage est que cette approche est intrinsèque et qu'elle englobe aussi des cas où la structure S comporte des parties surfaciques mais aussi linéiques (cf. figure 2.2)

La première question est de savoir si ce problème est bien défini. On va naturellement chercher les solutions parmi les fonctions de $W^{2,2}_\mu(\mathbf{R}^3)$ qui vérifient éventuellement certaines conditions aux bords. Quant à l'énergie élastique interne, par analogie avec (1.6), on peut la définir de deux façon différentes (l'équivalence entre ces deux définitions demandant néanmoins un peu de travail) :

$$\int_S \hat{H}(D^2u)\,\mathrm{d}\mu := \inf\left\{\int_S \hat{H}(\pi_2(v))\,\mathrm{d}\mu;\ v \in \bar{G} \text{ et } \pi_0(v) = u\right\} \tag{2.4}$$

$$= \inf\left\{\liminf_{n\to+\infty}\int_S \hat{H}(D^2\varphi_n)\,\mathrm{d}\mu;\ (\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{D}(\Omega)^{\mathbf{N}} \text{ et } \varphi_n \to u \text{ dans } L^p_\mu(\mathbf{R}^3)\right\}. \tag{2.5}$$

Le calcul d'une telle énergie n'est pas facile. En effet, contrairement au cas des dérivées premières où le gradient de u de norme minimale, c'est-à-dire le gradient intrinsèque $D_\mu u$, est défini de façon locale, ici des effets non-locaux peuvent intervenir : le calcul de l'énergie élastique interne nécessite réellement la connaissance de la fonction u dans sa globalité.

Une fois que l'on s'entend sur la définition du problème, reste à savoir s'il existe une fonction $u \in W^{2,2}_\mu(\mathbf{R}^3)$ qui minimise l'énergie E. Dans l'article [4], ils ont besoin besoin de faire l'hypothèse que μ satisfait une inégalité de type Poincaré (c'est-à-dire que l'on peut contrôler la norme dans $L^p_\mu(\Omega)$ d'une fonction nulle aux bords si l'on contrôle la norme dans $L^p_\mu(\Omega, \mathbf{R}^d)$ de son gradient) et une « *doubling* *condition* » (c'est-à-dire que la masse de la boule de centre x et de rayon $2r$ est majoré, à une constante multiplicative près qui ne dépend ni de x ni de r, par la masse de celle de centre x et de rayon r) pour répondre par l'affirmative à cette question. Pour des cas plus généraux ou des énergies d'ordre plus élevés, la question reste ouverte.

3 Problèmes de transport optimal et questions liées

3.1 Le transport optimal avec pénalisation en gradient

Le transport optimal, dont on fait remonter la création au mémoire de Monge [12], se formalise maintenant de la façon suivante. On dispose de deux mesures positives μ et ν de même masse, définies sur des domaines bornés Ω et Ω' respectivement, et l'on cherche à transporter l'une sur l'autre de manière optimale, c'est-à-dire en minimisant le coût du transport (cf. figure 3.1). Dans le mémoire de Monge, μ codait la répartition de masse d'un tas de sable (le remblai) et ν celle d'un trou que l'on veut combler (le déblai), et le but était de combler le déblai à l'aide du remblai en minimisant l'effort fourni ; mais on peut imaginer d'autres applications, par exemple μ peut représenter une distribution de produits à vendre et ν la distribution des sites de vente, on veut amener les produits sur les lieux de vente en dépensant le moins possible.

Un transport est codé par une application $\mathrm{T} : \Omega \to \Omega'$, $T(x)$ donnant l'endroit où est transporté ce qui se trouve au départ en x. On se convainc facilement que T transporte la masse de μ sur celle de ν si et seulement si

$$\forall B \text{ borélien, } \mu(\mathrm{T}^{-1}(B)) = \nu(B), \tag{3.1}$$

ce qui se note de façon abrégée $\mathrm{T}\#\mu = \nu$. Mais il faut aussi se donner un moyen d'évaluer le coût d'un transport. La théorie classique le fait en introduisant une fonction de coût $c : \Omega \times \Omega' \to \mathbf{R}_+$ continue, positive et bornée : $c(x, y)$ représente le coût pour transporter une unité de masse de x en y. Le coût total pour un transport est alors

$$\mathcal{J}_\mu(\mathrm{T}) := \int_\Omega c(x, \mathrm{T}(x))\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{3.2}$$

Le *problème de Monge* consiste à se demander si la fonctionnelle ci-dessus admet un minimum parmi tous les transports T mesurables satisfaisant $\mathrm{T}\#\mu = \nu$. La principale difficulté est la contrainte $\mathrm{T}\#\mu = \nu$ sur la mesure image qui est non-linéaire, non-locale, et qui passe mal à la limite. En fonction de la structure de la fonction de coût c, on arrive cependant à avoir de nombreux résultats très intéressants, on pourra consulter [14] ou [13] pour une présentation générale du transport optimal et de ses applications.

Une généralisation, proposée par Louet et Santambrogio (c'est l'objet de [9]), consiste à pénaliser les transports dont le gradient est trop élevé, c'est-à-dire à considérer que le coût associé à un transport T est

$$\mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}) := \int_\Omega \left(c(x, \mathrm{T}(x)) + |D\mathrm{T}(x)|^p\right)\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{3.3}$$

Pour justifier l'intérêt de cette question, on peut remarquer que dans certains modèles on peut avoir envie d'imposer que des point proches soient transportés en des lieux proches, c'est-à-dire que l'on force le transport à être régulier. On peut aussi rapprocher cette problématique de questions en mécanique des milieux continus, où $D\mathrm{T}$ représente les déformations d'un milieu et la contrainte sur la mesure image s'interprète comme une contrainte d'incompressibilité (cf. [1]).

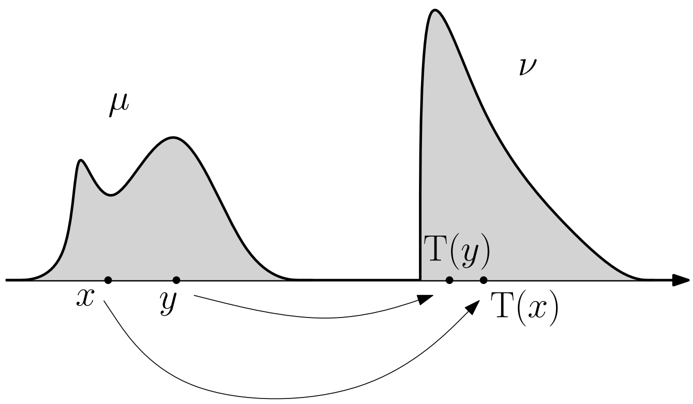

FIGURE 3.1 – Deux mesures (ici à densité) μ et ν de même masse, et l'on cherche une application T qui transporte μ sur ν en minimisant le coût du transport.

Mais dans tous les cas il faut donner un sens au terme $\int_\Omega |D\mathrm{T}|^p \,\mathrm{d}\mu$ et délimiter l'espace fonctionnel dans lequel on va chercher à minimiser la fonction de coût $\mathcal{J}_{\mu,G}$. Au vu du théorème 1.5, il est logique de s'intéresser à

$$\inf\left\{\int_\Omega c(x,\mathrm{T}(x))\,\mathrm{d}\mu(x) + \|D_\mu \mathrm{T}\|_{p,\mu}^p;\ \mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(\Omega,\Omega') \text{ et } \mathrm{T}\#\mu = \nu\right\}. \tag{3.4}$$

On dira que le *problème de Monge avec pénalisation en gradient a une solution* si l'infimum dans l'équation ci-dessus est un minimum. En fait, ce problème est en un certain sens plus simple que le problème de Monge « classique », pour s'en convaincre on peut s'intéresser au résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soient Ω et Ω' deux domaines convexes de classe C^1, f et g deux fonctions définies sur respectivement Ω et Ω' de classe $C^{0,\alpha}$ pour un $\alpha \in \,]0,1[$ et uniformément minorées par une constante strictement positive. On définit $\mu := f\cdot\mathcal{L}$ et $\nu := g\cdot\mathcal{L}$ et l'on suppose $\mu(\Omega) = \nu(\Omega')$. Alors le problème de Monge avec pénalisation en gradient consistant à envoyer μ sur ν pour le coût c possède une solution.*

Démonstration abrégée. Grâce à la régularité des domaines, on sait qu'il existe au moins un transport régulier qui transporte μ sur ν. On peut alors utiliser la méthode directe du calcul des variations : on se donne une suite minimisante $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On voit facilement que la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $W_\mu^{1,p}(\Omega,\Omega')$ donc dans $W^{1,p}(\Omega,\Omega')$ (car f est uniformément minorée par une constante strictement positive). On peut donc supposer qu'à extraction près elle converge faiblement dans $W_\mu^{1,p}(\Omega,\Omega')$, fortement dans $L_\mu^p(\Omega,\Omega')$ et μ-presque partout vers $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(\Omega,\Omega')$. La convergence, faible dans $W_\mu^{1,p}(\Omega,\Omega')$ et μ-presque partout, permet de passer à la limite dans le coût du transport, de sorte que $\mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}_n)$. Quant à la convergence μ-presque partout elle permet de passer à la limite la contrainte sur la mesure image $\mathrm{T}\#\mu_n = \nu_n$ de sorte que $\mathrm{T}\#\mu = \nu$. □

Le point crucial est que l'on arrive à obtenir de la convergence μ-presque partout pour une suite minimisante grâce à la borne sur la dérivée et à passer à la limite la contrainte sur la mesure image, chose que l'on ne peut pas faire en transport optimal « classique ».

3.2 Un résultat d'existence en dimension un

Lorsque la dimension de l'espace ambiant est égale à un, on peut arriver à un résultat beaucoup plus fin car on a des informations précises sur la structure de l'espace tangent. On se donne μ et ν deux mesures de même masse définies sur respectivement I et I' des intervalles bornés de $\mathbf{R}$.

De manière similaire au résultat sur l'espace tangent en dimension un, on aura besoin de la décomposition suivante de la mesure de μ : μ_a désigne la partie absolument continue par rapport à $\mathcal{L}$ de μ, et f est la densité de μ_a par rapport à $\mathcal{L}$. On note M_μ^p le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel $f^{-\frac{1}{p-1}}$ est intégrable. On dit qu'un point x appartient au « bon » ensemble B_μ^p s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-\frac{1}{p-1}}$ soit intégrable sur $[x\,, x+\varepsilon]$ ou $[x-\varepsilon\,, x]$. On peut d'ailleurs se convaincre que $M_\mu^p \subset I \backslash B_\mu^p$, mais que l'inclusion peut être stricte. On aura besoin l'ensemble (au plus dénombrable) des atomes de μ sur la partie $I\backslash B_\mu^p$, on le note $\mathcal{A}$.

On définit alors la partie « régulière » de μ par $\mu_r := \mu \llcorner B_\mu^p$, la partie « atomique » par

$$\mu_{\mathrm{atm}} := \sum_{x\in\mathcal{A}} \mu(\{x\})\delta_x, \tag{3.5}$$

et la partie « irrégulière » par

$$\mu_i := \mu \llcorner (I\backslash B_\mu^p) - \mu_{\mathrm{atm}}. \tag{3.6}$$

Cette dernière est par construction une mesure sans atomes, et l'on a la décomposition $\mu = \mu_r + \mu_{\mathrm{atm}} + \mu_i$. Enfin, au vu de l'expression de D_μ (théorème 1.5) et de la structure de l'espace tangent (théorème 1.6), la fonction de coût prend la forme

$$\mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}) = \int_I c(x, \mathrm{T}(x))\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{I\backslash M_\mu^p} |\mathrm{T}'(x)|^p\,\mathrm{d}\mu_a(x) \tag{3.7}$$

pour $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(I)$. On a maintenant tous les éléments nécessaires pour énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.2. *On suppose qu'il existe au moins un transport* $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(I)$ *tel que* $\mathrm{T}\#\mu = \nu$*. On suppose aussi que pour toute mesure de Radon* ν_i *positive vérifiant* $\nu_i \leqslant \nu$ *et* $\nu_i(I') = \mu_i(I)$*, le problème de Monge consistant à envoyer* μ_i *sur* ν_i *de façon optimale pour le coût* c *possède une solution. Alors le problème de Monge avec pénalisation en gradient consistant à envoyer* μ *sur* ν *pour le coût* c *possède une solution.*

Remarque. Ce qu'on a gagné, c'est que l'on s'est ramené à une question de transport optimal sans pénalisation en gradient, à savoir l'hypothèse que le problème de Monge entre μ_i et ν_i possède une solution. Par construction la mesure μ_i ne possède pas d'atomes, c'est une propriété souvent utile pour prouver l'existence d'une solution au problème de Monge.

Démonstration abrégée. On applique la méthode directe du calcul des variations : on peut trouver une suite minimisante $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}}$. À extraction près, les suites $(\mathrm{T}_n\#\mu_r)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\mathrm{T}_n\#\mu_i)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\mathrm{T}_n\#\mu_{\mathrm{atm}})_{n\in\mathbf{N}}$ vont converger faiblement au sens des mesures. On appelle ν_r, ν_i et ν_{atm} les limites respectives de ces suites. L'idée est alors de construire $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(I)$ de la façon suivante :

- Sur la partie B_μ^p, la densité f n'est pas trop proche de 0 donc une borne sur la norme de $(D_\mu \mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ permet d'en déduire une convergence faible dans $W_\mu^{1,p}(B_\mu^p)$ et une convergence μ-presque partout de $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers une fonction T. La convergence μ-presque partout permet de passer à la limite la contrainte sur la mesure image de sorte que $\mathrm{T}\#\mu_r = \nu_r$ (c'est le même schéma que dans la preuve du théorème 3.1).

– Sur $I \backslash B_\mu^p$, le gradient intrinsèque est toujours nul, donc on s'est ramené au transport optimal sans pénalisation en gradient : il suffit de choisir pour T une solution du problème de Monge consistant à envoyer μ_i sur ν_i.
– Si on se donne un atome $x \in \mathcal{A}$, la suite $(\mathrm{T}_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée donc converge à extraction près. Par un procédé diagonal, on peut supposer que c'est le cas pour tous les éléments de $\mathcal{A}$, et l'on définit $\mathrm{T}(x)$ comme la limite de la suite $(\mathrm{T}_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ pour $x \in \mathcal{A}$. En particulier, la convergence de $(\mathrm{T}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vers T est simple, ce qui permet de passer à la limite la contrainte sur la mesure image, c'est-à-dire $\mathrm{T}\#\mu_{\mathrm{atm}} = \nu_{\mathrm{atm}}$. Réserver un traitement particulier aux atomes de μ sur $I \backslash B_\mu^p$ est essentiellement technique, cela sert à montrer que l'on peut se passer de la présence d'atomes dans μ_i, ce qui est pratique pour montrer l'existence d'une solution au problème de Monge consistant à envoyer μ_i sur ν_i.

Par construction $\mathrm{T}\#\mu = \nu_r + \nu_i + \nu_{\mathrm{atm}} = \nu$ et l'on peut vérifier que $\mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \mathcal{J}_{\mu,G}(\mathrm{T}_n)$. □

Pour montrer comment l'on peut se servir de ce théorème, on se concentre dans le cas où le coût est strictement convexe puisque l'on a alors des résultats d'existence pour le problème de Monge sans pénalisation en gradient.

Théorème 3.3. *On se place dans le cas où il existe une fonction h strictement convexe et positive telle que, pour $x \in I$ et $y \in I'$, on ait $c(x,y) = h(x-y)$. On suppose qu'il existe au moins une application $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(I)$ telle que $\mathrm{T}\#\mu = \nu$. Alors le problème de Monge avec pénalisation en gradient consistant à envoyer μ sur ν pour le coût c possède une solution.*

Démonstration. Pour appliquer le théorème 3.2, il suffit de vérifier que pour toute mesure positive ν_i vérifiant $\nu_i \leqslant \nu$ et $\mu_i(I) = \nu_i(I')$, le problème de Monge consistant à envoyer μ_i sur ν_i pour le coût c possède une solution. Mais par construction μ_i ne possède pas d'atomes (ils se trouvent tous dans μ_{atm}), il suffit donc d'utiliser un résultat classique de transport optimal (voir par exemple [13, Théorème 2.2.1]). □

3.3 Des questions restant ouvertes

On peut considérer que le problème de l'existence d'une solution au problème de Monge avec pénalisation en gradient possède une réponse claire en dimension un, mais dans les dimensions supérieures le théorème 3.1 est clairement insuffisant : il correspond au cas où la théorie des espaces de Sobolev par rapport à des mesures quelconques n'est en quelque sorte pas nécessaire. Mais par exemple, on pourrait espérer, si S est un ensemble m-rectifiable et μ la mesure de Hausdorff m-dimensionnelle restreinte à S, qu'un schéma de preuve du même type que celui du théorème 3.1 fonctionne, cela n'a pas encore été fait. En dehors de l'existence, d'autres questions, abordées dans [9], sont associées au problème de Monge avec pénalisation en gradient :

– On peut chercher à caractériser les applications de transport optimales. Par exemple lorsque $d \geqslant 2$, on peut perturber légèrement une application $\mathrm{T} \in W_\mu^{1,p}(\Omega, \mathbf{R}^d)$ tout en conservant la contrainte $\mathrm{T}\#\mu = \nu$, ce qui permet d'obtenir une équation de type Euler-Lagrange.
– On peut considérer une pénalisation en gradient de plus en plus petite c'est-à-dire que l'on définit

$$\mathcal{J}_{\mu,G,\varepsilon}(\mathrm{T}) := \int_\Omega c(x, \mathrm{T}(x))\, \mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon \|D_\mu \mathrm{T}\|_{p,\mu}^p, \tag{3.8}$$

et l'on étudie le comportement de cette fonctionnelle (au sens de la Γ-convergence) lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans certains cas on peut prouver qu'il y a convergence vers la fonctionnelle sans pénalisation en gradient $\mathcal{J}_\mu$, la question est alors de savoir à quelle vitesse elle a lieu.

Références

[1] N. Aguilera, Hans Wilhelm Alt, and L.A. Caffarelli. An optimization problem with volume constraint. *SIAM journal on control and optimization*, 24(2) :191–198, 1986.

[2] Kaushik Bhattacharya and Richard D. James. A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47(3) :531–576, 1999.

[3] Guy Bouchitté, Giuseppe Buttazzo, and Pierre Seppecher. Energies with respect to a measure and applications to low dimensional structures. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 5(1) :37–54, 1996.

[4] Guy Bouchitté and Ilaria Fragalà. Second-order energies on thin structures : variational theory and non-local effects. *Journal of Functional Analysis*, 204(1) :228 – 267, 2003.

[5] Ilaria Fragalà and Carlo Mantegazza. On some notions of tangent space to a measure. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 129 :331–342, 1 1999.

[6] Piotr Hajlasz. Sobolev spaces on metric-measure spaces. *Contemporary mathematics*, 338 :173–218, 2003.

[7] Kufner, Alois, Opic, and Bohumír. How to define reasonably weighted Sobolev spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 025(3) :537–554, 1984.

[8] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, A.M. Kosevich, and Pitaevskiĭ. *Theory of Elasticity*.

[9] Jean Louet. *Problèmes de transport optimal avec pénalisation en gradient*. PhD thesis, 2014. Thèse de doctorat dirigée par Santambrogio, Filippo.

[10] A.E.H. Love. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 1927.

[11] Paolo Tilli Luigi Ambrosio. *Topics on Analysis in Metric Spaces*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. 2003.

[12] Gaspard Monge. *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*. De l'Imprimerie Royale, 1781.

[13] Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians*. 2015.

[14] C. Villani. *Topics in Optimal Transportation*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2003.

[15] V V Zhikov. Homogenization of elasticity problems on singular structures. *Izvestiya : Mathematics*, 66(2) :299, 2002.