

Introduction à un domaine de recherche :

Percolation dynamique : les cas *i.i.d.* et conservatif

Hugo Vanneuille, sous la direction de Christophe Garban

4 janvier 2016

Résumé

Dans cette “introduction à un domaine de recherche”, nous nous intéressons à des modèles de percolation dynamique. On se place essentiellement dans le contexte de la percolation par sites sur le réseau triangulaire où chaque site est colorié aléatoirement en bleu ou jaune indépendamment des autres sites.

En 1997, Häggström, Peres et Steif [HPS97] étudient un processus de percolation dynamique dans lequel les couleurs des différents sites évoluent au cours du temps indépendamment les uns des autres. La question principale est : existe-t-il des temps exceptionnels auxquels la configuration est très atypique ? Un de nos buts sera d’expliquer pourquoi, dans l’étude de ce problème, la théorie des fonctions booléennes fournit des outils très efficaces. Nous définissons aussi un modèle de percolation dynamique conservative étudié en 2013 par Broman, Garban et Steif [BGS13] dans lequel au cours du temps des paires de sites échangent leur couleur. Pour ce dernier modèle, nous énonçons un théorème d’existence de temps exceptionnels que nous avons prouvé avec Christophe Garban.

Table des matières

1 Percolation	1
2 Percolation dynamique	3
3 Fonctions booléennes	6
4 Percolation dynamique conservative	8

1 Percolation

Commençons par définir le modèle de **percolation** (de Bernoulli) introduit dans [BH57] par Broadbent et Hammersley pour modéliser des matériaux poreux (pour les références, nous renvoyons à Grimmett [Gri99] et Werner [Wer07]). L’exemple le plus classique est la percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^d (voir la Remarque 1). Cependant, nous allons dans ce mémoire considérer la **percolation par sites sur le réseau triangulaire** car ce n’est que pour ce modèle qu’avec Christophe Garban nous avons pour le moment réussi à prouver notre théorème principal : le Théorème 15. L’étude de ce dernier modèle est en effet plus facile car des résultats exacts ont été obtenus grâce au théorème d’invariance conforme de Smirnov, les processus SLE de Schramm et les travaux de Lawler, Schramm, Werner et Smirnov, Werner (nous ne parlerons pas ici de ces résultats et renvoyons à [Wer07]).

Rappelons tout d’abord la définition d’un **graphe** : c’est la donnée d’un ensemble de sites V et d’un ensemble d’arêtes $E \subseteq \{\{x, y\} : x, y \in V\}$. Un chemin de longueur n est une suite de sites x_0, x_1, \dots, x_n telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête. Une composante connexe est un sous-ensemble maximal de V tel que

l'on peut relier toute paire de points de ce sous-ensemble par un chemin.

Soit $p \in [0, 1]$. Considérons le réseau triangulaire plan \mathbb{T} qu'il faut voir comme un graphe (voir la Figure 1.a pour son illustration - on suppose que le point $0 = (0, 0)$ est un site de \mathbb{T}). On déclare chaque site de \mathbb{T} **ouvert** (ou bleu) avec probabilité p et **fermé** (ou jaune) avec probabilité $1 - p$ indépendamment des autres sites. Plus formellement :

Notons V l'ensemble des sites de \mathbb{T} et considérons l'espace mesurable $\Omega = \{-1, 1\}^V$ (équipé de la tribu produit - *i.e.* la tribu engendrée par les ensembles du type de celui de l'équation (1) ci-dessous). On définit la mesure de probabilité de **percolation de paramètre p** : \mathbb{P}_p par le produit de mesures de probabilité $p\delta_1 + (1 - p)\delta_{-1}$. Autrement dit, \mathbb{P}_p est l'unique probabilité telle que, si v_1, \dots, v_n sont des sites distincts et $r \in \{0, \dots, n\}$, alors (en notant ω les éléments de Ω) :

$$\mathbb{P}_p[\omega(v_1) = 1, \dots, \omega(v_r) = 1, \omega(v_{r+1}) = -1, \dots, \omega(v_n) = -1] = p^r (1 - p)^{n-r}. \quad (1)$$

On dira que v est ouvert si $\omega(v) = 1$ et que v est fermé si $\omega(v) = -1$. Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé **configuration de percolation**. Par ailleurs, on appelle **cluster** de ω une composante connexe du graphe ayant comme sites les sites de \mathbb{T} qui sont ouverts et comme arêtes les arêtes de \mathbb{T} adjacentes à deux tels sites (autrement dit, c'est une "composante connexe bleue"). De plus, on appelle **chemin ouvert** un chemin de ce graphe (autrement dit, c'est un "chemin bleu"). Voir la Figure 1.b.

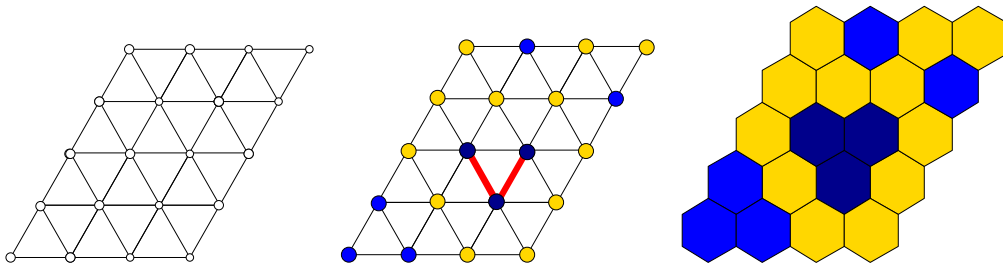


FIGURE 1 – a - Le réseau triangulaire (il faut bien sûr l'imaginer sur le plan entier) - b - une configuration de percolation par sites sur \mathbb{T} avec au milieu un cluster de cardinal 3 et un chemin ouvert (en rouge - plus épais) de longueur 2 - c - une façon agréable de voir cette configuration en traçant le graphe dual de \mathbb{T} (*i.e.* le graphe dont les sites sont les faces de \mathbb{T} et les arêtes sont présentes entre deux faces adjacentes) : le réseau hexagonal.

Le modèle de percolation est un modèle de **physique statistique**, la branche scientifique dont le but est de décrire les propriétés macroscopiques d'un système en se reposant sur un modèle mathématique microscopique. On peut penser à une pierre poreuse plongée dans un liquide, les sites ouverts correspondant à des pores dans lesquels l'eau peut s'infiltrer. L'élément microscopique est le pore et la propriété macroscopique : l'eau infiltre (ou pas) la pierre poreuse. Le réseau \mathbb{T} étant infini, cela nous suggère d'étudier l'événement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ que 0 est dans un cluster infini (en particulier il faut que 0 soit ouvert !). On note :

$$\theta(p) = \mathbb{P}_p[0 \leftrightarrow \infty].$$

La propriété-clef dans l'étude de la percolation est l'existence d'une **transition de phase** : il existe $p_c \in]0, 1[$ appelé **point critique** tel que :

1. $\forall p \in [0, p_c[, \theta(p) = 0,$
2. $\forall p \in]p_c, 1], \theta(p) > 0.$

Pour tout n , l'événement $\{\exists$ un cluster infini $\}$ ne dépend que de l'état des sites à distance au moins n de l'origine. La loi du 0-1 de Kolmogorov implique donc que, pour tout p , $\mathbb{P}_p[\exists$ un cluster infini $\} \in \{0, 1\}$. Par invariance par translation du modèle, on en déduit que :

1. $\forall p \in [0, p_c[, \mathbb{P}_p [\exists \text{ un cluster infini}] = 0,$
2. $\forall p \in]p_c, 1], \mathbb{P}_p [\exists \text{ un cluster infini}] = 1.$

Le théorème de Kesten [Kes80] nous dit que $p_c = 1/2$. Par ailleurs, $\theta(1/2) = 0$ (résultat de Harris [Har60]) donc $\mathbb{P}_{1/2} [\exists \text{ un cluster infini}] = 0$. Et même : θ est continu ; on dit que **la transition de phase est continue**.

Idées des démonstrations. Pour prouver qu'il existe un tel p_c , il y a trois étapes : prouver qu'il existe $p_1 > 0$ tel que $\theta(p_1) = 0$, qu'il existe $p_2 < 1$ tel que $\theta(p_2) > 0$ et enfin que θ est croissant.

Soit $p \in [0, 1]$, on note C_n l'ensemble des chemins auto-évitant (*i.e.* empruntant au plus une fois chaque site) de longueur n issus de 0. Pour tout n , $\theta(p)$ est plus petit que la somme sur tous les chemins de C_n de la probabilité que ce chemin soit ouvert. Cette probabilité vaut p^{n+1} et on montre facilement que le cardinal de C_n est plus petit que 6^n . Et donc, pour tout $p < 1/6$, $\theta(p) \leq p^{n+1}6^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Tout $p_1 \in]0, 1/6[$ convient donc.

Pour montrer qu'il existe un $p_2 < 1$ tel que $\theta(p_2) > 0$, on raisonne de la même façon en remarquant que l'événement $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ est égal à celui qu'il n'existe pas de circuit fermé entourant 0.

Pour prouver que θ est croissant, on utilise un argument de couplage qu'on ne détaillera pas ici.

Le théorème de Kesten est lui bien plus profond (le résultat de 20 ans de recherche !). Mentionnons tout de même qu'une propriété importante est **l'auto-dualité** du modèle, à savoir que si l'on regarde un rectangle dans le plan, alors (à des détails négligeables près), il existe un chemin ouvert de bas en haut si et seulement s'il n'existe pas de chemin fermé de gauche à droite. D'où le rôle particulier de $p = 1/2$ où on ne privilégie ni les sites ouverts ni les sites fermés. \square

Remarque 1. Le modèle de percolation qui a été le plus étudié est celui de la percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^d (les arêtes sont tracées entre deux points s'ils sont à distance Euclidienne 1 l'un de l'autre) pour $d \geq 2$. Cette fois ce sont les arêtes qui sont ouvertes avec probabilité p , mais les questions restent identiques. La transition de phase existe pour tout $d \geq 2$ et le théorème de Kesten nous dit que $p_c = 1/2$ pour $d = 2$. On ne connaît pas p_c pour $d \geq 3$. Enfin, il est conjecturé que $\theta(p_c) = 0$ mais cela n'a été prouvé que pour $d = 2$ et $d \geq 11$ (le cas $d = 3$ est un des problèmes ouverts les plus importants en théorie de la percolation!).

2 Percolation dynamique

Inspirés par une question posée par Malliavin lors d'une conférence en 1995, Häggström, Peres et Steif ont défini et étudié le modèle de **percolation dynamique** dans [HPS97]. Ce modèle a été inventé de façon indépendante par Benjamini. Le but est de répondre au problème suivant :

Tirons une configuration selon la loi \mathbb{P}_p (pour un certain p fixé), faisons évoluer cette configuration selon un processus naturel tel qu'à tout temps t fixé le processus au temps t ait pour loi \mathbb{P}_p (on dira que cette loi est invariante). Existe-t-il des temps exceptionnels pour lesquels notre configuration est très atypique ?

Donnons tout d'abord la définition d'une **horloge exponentielle** (ou processus de Poisson dans \mathbb{R}_+) de paramètre 1 : c'est un sous-ensemble de points de \mathbb{R}_+ de la forme $\{E_1, E_1 + E_2, E_1 + E_2 + E_3, \dots\}$ où E_1, E_2, E_3, \dots sont des variables exponentielles de paramètre 1 indépendantes. On appelle temps de sonnerie de l'horloge les points $E_1 + E_2 + \dots + E_n$ pour $n \in \mathbb{N}_+$. Notons que la propriété de "perte de mémoire" de la loi exponentielle implique que pour tous $0 \leq s \leq t$, la probabilité qu'il n'y ait pas de sonnerie d'horloge entre les temps s et t ne dépend que de $t - s$ et vaut $\exp(-(t - s))$.

Définition 2 (du processus de percolation dynamique *i.i.d.* de paramètre p). Soit $\omega_{i.i.d.}(0)$ de loi \mathbb{P}_p . À chaque site de \mathbb{T} on associe une horloge exponentielle de telle façon que les horloges sont indépendantes entre elles et de $\omega_{i.i.d.}(0)$. Quand une horloge sonne, on retire l'état du site correspondant selon une variable de loi $p\delta_1 + (1 - p)\delta_{-1}$

(indépendante de tout le reste). On note $(\omega_{i.i.d.}(t))_{t \geq 0}$ le processus obtenu. Précisons qu'on fait le choix "continuité à droite" *i.e.* l'état du site à un temps de sonnerie est le même que celui juste après.

Le terme *i.i.d.* vient du fait que les états des sites évoluent de façon indépendante. On définit maintenant les **temps exceptionnels** mentionnés plus haut :

Définition 3. Si $p \leq p_c (= 1/2)$, un temps exceptionnel est un temps auquel il existe un cluster infini. Si $p > p_c (= 1/2)$, un temps exceptionnel est un temps auquel il n'existe pas de cluster infini.

Il n'est pas très difficile de montrer que pour tout t , $\omega_{i.i.d.}(t) \sim \mathbb{P}_p$. On en déduit que, pour tout t , $\mathbb{P}[t \text{ est un temps exceptionnel}] = 0$. Mais cela ne permet pas de répondre à la question qui est au cœur de l'étude de la percolation dynamique :

Quelle est la probabilité qu'il existe des temps exceptionnels ?

La loi du 0-1 de Kolmogorov nous dit que **la probabilité qu'il existe des temps exceptionnels vaut 0 ou 1**. Nous ne donnons pas les détails ici. L'idée est que pour tout n l'existence d'un temps exceptionnel ne dépend que de l'état des sites à distance au moins n de l'origine (mais il faut quand même un - petit - argument pour établir que $\{\exists \text{ des temps exceptionnels}\}$ est mesurable).

Le problème en dehors du point critique a été résolu par Häggström, Peres et Steif :

Proposition 4 ([HPS97]). *Si $p \neq p_c (= 1/2)$ alors presque sûrement il n'existe pas de temps exceptionnel.*

Démonstration. Soit $p < p_c$ (la preuve est la même pour $p > p_c$). Si $0 \leq s < t$, on note $\omega_{i.i.d.}^{[s,t]}$ la configuration obtenue en déclarant ouvert tout site soit ouvert au temps s soit dont l'horloge a sonné entre les temps s et t . On a :

$$\omega_{i.i.d.}^{[s,t]} \sim \mathbb{P}_{p+(1-p)(1-\exp(-(t-s)))}$$

(car p est la probabilité qu'un site soit ouvert au temps s et $1 - \exp(-(t-s))$ la probabilité que l'horloge d'un site ait sonné entre les temps s et t).

On choisit $\epsilon > 0$ tel que $p' := p + (1-p)(1 - e^{-\epsilon}) < p_c$. La présence d'un cluster infini étant favorisée par la présence de sites ouverts, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[\exists \text{ des temps exceptionnels}] \\ & \leq \mathbb{P} \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \exists \text{ un cluster infini dans } \omega_{i.i.d.}^{[n\epsilon, (n+1)\epsilon]} \right\} \right] \\ & \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_{p'}[\exists \text{ un cluster infini}] = 0, \end{aligned}$$

car $p' < p_c$. □

Le cas du point critique est beaucoup plus compliqué mais on a le :

Théorème 5 ([SS10], [GPS10]). *Si $p = p_c = 1/2$ alors presque sûrement il existe des temps exceptionnels.*

Avant d'expliquer l'idée derrière la preuve, mentionnons une dernière fois le cas de la percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$. Pour tout $d \geq 2$, avec exactement la même preuve on obtient qu'il n'y a pas de temps exceptionnel si $p \neq p_c$. La question au point critique n'est pour le moment intéressante que pour $d = 2$ et $d \geq 11$ car sinon on ne sait pas qu'il n'y a pas de cluster infini au point critique. Grâce à un résultat de [HS94] pour $d \geq 19$ (étendu à $d \geq 11$ par [FvdH15]), les auteurs de [HPS97] ont prouvé que, même au point critique, presque sûrement il n'existait pas de temps exceptionnels pour $d \geq 11$. Pour $d = 2$, dans [GPS10] les auteurs ont étendu le résultat du Théorème 5 et prouvé qu'il existait des temps exceptionnels.

Retournons (et restons jusqu'à la fin du mémoire) à la percolation par sites sur \mathbb{T} . Voici une idée derrière la preuve du Théorème 5 :

1. Regardons une configuration au point critique dans une grande fenêtre de taille n . La théorie générale de la percolation planaire (notamment le théorème de Russo, Seymour, Welsh, voir [Wer07]) nous dit qu'il existe une constante $c > 0$ ne dépendant pas de n telle qu'avec probabilité plus grande que c il existe dans la fenêtre plusieurs clusters dont la taille est de l'ordre de n et que ces clusters ont tendance à se toucher en une multitude de points (voir Figure 2).
2. Laissons maintenant évoluer notre processus dynamique jusqu'à un certain $t > 0$. Si un site situé à l'interface entre deux grands clusters change d'état, cela peut avoir de grandes conséquences sur les clusters. Il semblerait ainsi que même si on sait s'il existe ou non un chemin ouvert entre le bord haut et le bord bas de la fenêtre au temps 0, il est difficile de prévoir ce qu'il en est au temps t .
3. Cela suggère qu'à toute échelle et continuellement, des connexions se font et se défont, laissant apparaître des temps auxquels elles sont suffisamment nombreuses pour laisser naître un cluster infini (qui disparaîtra aussitôt!).

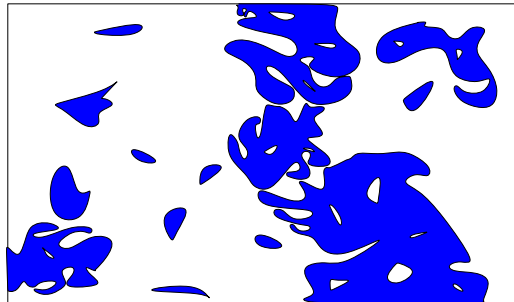


FIGURE 2 – Des clusters au point critique dans une grande fenêtre.

Mathématiquement, l'idée du deuxième point ci-dessus se traduit par le théorème démontré par Benjamini, Kalai et Schramm :

Théorème 6 ([BKS99]). *Soit $t > 0$. On se place au point critique $p = 1/2$ et on note : $A_n = \{\exists \text{ un chemin ouvert de bas en haut dans le carré } [-n, n]^2\}$. On a :*

$$\text{Cov}(\mathbb{1}_{\{\omega_{i.i.d.}(0) \in A_n\}}, \mathbb{1}_{\{\omega_{i.i.d.}(t) \in A_n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2)$$

Autrement dit, les événements $\{\omega_{i.i.d.}(0) \in A_n\}$ et $\{\omega_{i.i.d.}(t) \in A_n\}$ sont **asymptotiquement indépendants**. On parle de **sensibilité au bruit**.

Nous renvoyons à la Partie 3 pour des explications sur les outils utiles pour prouver ce théorème. Les auteurs de [SS10] et [GPS10] ont quantifié cette indépendance asymptotique, nous renvoyons à [GS14] pour des explications.

Malheureusement, il ne semble pas qu'il existe un chemin du deuxième point de l'idée de la preuve à son troisième point comme on a pu le suggérer. On va tout de même garder à l'esprit l'idée d'indépendance asymptotique, qui nous suggère qu'une **méthode du second moment** (voir la Proposition 7) est efficace. Cette méthode utilise en effet le fait que des covariances du même type que celle du Théorème 6 sont "assez petites" (voir (3)). Les différences vont être qu'on va cette fois considérer l'événement $\left\{0 \overset{\omega_{i.i.d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right\}$ qu'il existe au temps t un chemin ouvert de l'origine jusqu'au bord du carré $[-n, n]^2$ et qu'on va considérer un ensemble continu de temps d'un seul coup. Cela nous amène à étudier les variables aléatoires :

$$X_n = \int_0^1 \mathbb{1}_{\left\{0 \overset{\omega_{i.i.d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right\}} dt.$$

Proposition 7. *Pour prouver qu'il existe des temps exceptionnels presque sûrement, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C < +\infty$ telle que, pour tout n :*

$$E[X_n^2] \leq C \mathbb{E}[X_n]^2.$$

Idée de la démonstration. Supposons qu'une telle inégalité soit vraie. D'après Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{P}[X_n \neq 0] \geq \frac{\mathbb{E}[X_n]^2}{\mathbb{E}[X_n^2]} \geq 1/C > 0.$$

La décroissance de la suite $(X_n)_n$ donne :

$$\mathbb{P}[\forall n, X_n \neq 0] > 0,$$

et donc :

$$\mathbb{P}\left[\forall n, \exists t \in [0, 1], 0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right] > 0.$$

On pourrait conclure si on pouvait intervertir $\exists t$ et $\forall n$. Le fait qu'on se soit restreint à l'intervalle $[0, 1]$ rend possible cette interversion par des arguments de compacité. On laisse les détails de côté. On obtient que la probabilité qu'il existe des temps exceptionnels est strictement positive (donc égale à 1 comme mentionné plus haut). \square

Or (par Fubini) : $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{P}_{1/2}[0 \leftrightarrow n]$ où $\{0 \leftrightarrow n\}$ est l'événement qu'il existe un chemin ouvert de 0 jusqu'au bord de $[-n, n]^2$. Et (toujours par Fubini) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n^2] &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{P}\left[0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(s)}{\longleftrightarrow} n, 0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right] ds dt \\ &\leq 2 \int_0^1 \mathbb{P}\left[0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(0)}{\longleftrightarrow} n, 0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right] dt. \end{aligned}$$

Pour montrer qu'il existe des temps exceptionnels à $p = 1/2$, il suffit donc de prouver qu'il existe une constante $C < +\infty$ telle que pour tout n :

$$\int_0^1 \mathbb{P}\left[0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(0)}{\longleftrightarrow} n, 0 \stackrel{\omega_{i,i,d.}(t)}{\longleftrightarrow} n\right] dt \leq C \mathbb{P}_{1/2}[0 \leftrightarrow n]^2. \quad (3)$$

Toutes les preuves connues de ce résultat et du Théorème 6 utilisent la **théorie de Fourier des fonctions booléennes**.

3 Fonctions booléennes

La théorie des fonctions booléennes provient principalement de l'informatique théorique. On peut citer Kahn, Kalai et Linial [KKL88] qui ont étudié les liens entre les fonctions booléennes et leurs pivots (voir plus bas pour la définition d'un pivot). Dans [BKS99], cette théorie est notamment développée dans le contexte de la percolation. L'idée est qu'une configuration de percolation peut être simplement codée par une suites de 1 et de -1 et que l'indicatrice d'un événement dans ce contexte n'est en fait qu'une fonction booléenne. On note :

$$\begin{aligned} V_n &= \{\text{sites de } \mathbb{T} \text{ inclus dans } [-n, n]^2\}, \\ \Omega_n &:= \{-1, 1\}^{V_n} = \{\text{configurations de percolation restreintes à } [-n, n]^2\}, \\ \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow n\}} &=: f_n : \Omega_n \longrightarrow \{0, 1\}, \\ \mathbb{1}_{A_n} &=: g_n : \Omega_n \longrightarrow \{0, 1\}, \end{aligned}$$

où $A_n = \{\exists \text{ un chemin ouvert de bas en haut dans le carré } [-n, n]^2\}$ et $\{0 \leftrightarrow n\}$ est l'événement qu'il existe un chemin ouvert de 0 jusqu'au bord de $[-n, n]^2$. (Les fonctions f_n et g_n ne dépendant que de l'état des sites de V_n , elles peuvent être définies soit sur Ω soit sur Ω_n .)

Nos f_n et g_n peuvent être vues comme des éléments de l'ensemble $L^2(\Omega_n, \mathbb{P}_{1/2})$ (ici, $\mathbb{P}_{1/2}$ peut être définie de façon équivalente comme la restriction à Ω_n du $\mathbb{P}_{1/2}$ défini sur Ω ou comme la mesure uniforme sur Ω_n). On rappelle que $L^2(\Omega_n, \mathbb{P}_{1/2})$ est l'espace des fonctions de Ω_n dans \mathbb{R} muni de du produit scalaire $\langle h, h' \rangle = \mathbb{E}_{1/2}[h(\omega)h'(\omega)]$ où $\mathbb{E}_{1/2}$ est l'espérance associée à $\mathbb{P}_{1/2}$. Il existe une base orthonormale très agréable

pour cet espace : celle formée par la famille χ_S indexée par les sous-ensembles S de V_n et définie par :

$$\chi_S(\omega) = \prod_{v \in S} \omega(v).$$

On peut en particulier décomposer une fonction $h \in L^2(\Omega_n, \mathbb{P}_{1/2})$ selon cette base. Les coefficients correspondants sont notés $\hat{h}(S)$ et sont appelés **coefficients de Fourier** de h :

$$h = \sum_S \mathbb{E}_{1/2} [h(\omega) \chi_S(\omega)] \chi_S = \sum_S \hat{h}(S) \chi_S.$$

D'après (2) et (3), il faut étudier $\mathbb{E} [h(\omega_{i.i.d.}(0))h(\omega_{i.i.d.}(t))]$. Ici, $(\omega_{i.i.d.}(t))_{t \geq 0}$ est la restriction à Ω_n du processus de percolation dynamique *i.i.d.* de paramètre $1/2$ de la Partie 2. Il n'est pas très difficile de montrer que :

$$\mathbb{E} [\chi_S(\omega_{i.i.d.}(0))\chi_{S'}(\omega_{i.i.d.}(t))] = e^{-t|S|} \delta_{S,S'}.$$

La terminologie “coefficients de Fourier” prend ici son sens : $(\chi_S(\omega_{i.i.d.}(t)))_{t \geq 0}$ “fluctue” avec une fréquence de l'ordre de $|S|$. Finalement on obtient :

$$\mathbb{E} [h(\omega_{i.i.d.}(0))h(\omega_{i.i.d.}(t))] = \sum_S \hat{h}(S)^2 e^{-t|S|}.$$

En se souvenant de l'équation (3), on en déduit que pour prouver qu'il existe des temps exceptionnels il suffit de montrer que :

$$\int_0^1 \sum_S \hat{f}_n(S)^2 e^{-t|S|} dt \leq C \mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n]^2. \quad (4)$$

Par ailleurs, $\chi_\emptyset = 1$ donc $\hat{g}_n(\emptyset)^2 = \mathbb{E}_{1/2} [g_n(\omega)]^2 = \mathbb{P}_{1/2} [A_n]^2$. On en déduit que le Théorème 6 équivaut à :

$$\sum_{S \neq \emptyset} \hat{g}_n(S)^2 e^{-t|S|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc à :

$$\forall k, \sum_{S \neq \emptyset, |S| \leq k} \hat{g}_n(S)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (5)$$

L'inégalité (4) et la limite (5) sont au cœur de l'étude de la percolation par le biais des fonctions booléennes. Toutes deux peuvent se résumer par : “**les coefficients de Fourier se concentrent sur les hautes fréquences**”. Notons que lorsqu'on étudie les coefficients de Fourier $\hat{f}_n(S)$ et $\hat{g}_n(S)$, il n'est plus question de percolation dynamique, mais seulement du modèle classique de percolation. On peut donc maintenant oublier l'aspect dynamique qui peut parfois être difficile à appréhender.

Comme exemple d'outil se cachant derrière l'étude des coefficients de Fourier des fonctions booléennes (et donc derrière les preuves de (4) et (5)), nous expliquons un des liens qu'ils ont avec les **points pivots** :

Étant donnée une fonction booléenne $h : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ et une configuration $\omega \in \Omega_n$ on appelle point pivot pour h et ω un site $v \in V_n$ qui vérifie : $h(\omega) \neq h(\omega^v)$ où ω^v est obtenu à partir de ω en changeant l'état du site v . Par exemple, un site v est pivot pour f_n et ω si dans ω il existe un chemin ouvert de 0 vers v , un chemin ouvert de v vers le bord de $[-n, n]^2$ et un circuit fermé entourant 0 et passant par v (l'étude des points pivots est donc très géométrique!).

Voici un exemple de lien entre les pivots et les coefficients de Fourier (dont la preuve peut être trouvée en Partie 4.4 de [GS14]) :

Proposition 8. *Pour tout $v \in V_n$, $\mathbb{P}_{1/2} [v \text{ est pivot pour } h] = 4 \sum_{S \ni v} \hat{h}(S)^2$.*

Nous ne donnons pas plus de détails sur les méthodes utilisées par [BKS99], [SS10] ou [GPS10]. Écrivons tout de même le théorème principal de [GPS10]. On a d'abord besoin d'une définition :

Définition 9. Soit $h : \Omega_n \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction booléenne non nulle. On définit une mesure de probabilité $\hat{\mathbb{P}}_h$ sur les sous-ensembles de V_n par :

$$\hat{\mathbb{P}}_h [\{S\}] = \frac{\hat{h}(S)^2}{\mathbb{E}_{1/2} [h(\omega)^2]}.$$

Parseval nous dit que c'est bien une mesure de probabilité. On peut ainsi étudier une variable aléatoire à valeurs dans des sous-ensembles discrets du plan, ce qui est utile pour avoir une intuition géométrique.

Comme $\mathbb{E}_{1/2} [f_n(\omega)^2] = \mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n]$, l'inégalité (4) s'écrit :

$$\int_0^1 \sum_k \hat{\mathbb{P}}_{f_n} [|S| = k] e^{-tk} dt \leq C \mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n].$$

Le théorème principal de [GPS10] est :

Théorème 10 ([GPS10]). *Il existe une constante $C < +\infty$ telle que, pour tous $k, n \in \mathbb{N}_+$ on a :*

$$\hat{\mathbb{P}}_{f_n} [|S| < k] \leq \frac{\mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n]}{k^{5/36+o(1)}}$$

où $o(1)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

Il n'est pas difficile d'en déduire que (4) est vraie donc le Théorème 5 aussi.

Précisons que si nous avons ici mis en place les outils principaux utilisés dans [GPS10], le Théorème 10 est le fruit de nombreux autres arguments et idées. Pour des précisions sur ces idées, nous renvoyons à [GS14].

4 Percolation dynamique conservative

Dans [BGS13], les auteurs se posent la question suivante : que se passe-t-il si on fait évoluer notre modèle de percolation selon un processus qui **conserve les quantités** dans le sens que si à un certain temps un site passe de ouvert à fermé alors, à ce même temps, un autre site passe de fermé à ouvert ? Le processus étudié est celui obtenu en laissant évoluer une configuration de percolation selon un **processus d'exclusion simple**, ce qu'on appellera ici **percolation dynamique conservative** (on rappelle qu'une matrice de transition P sur un ensemble dénombrable A est une matrice sur $A \times A$ telle que pour tout $a \in A$, $P(a, \cdot)$ est une probabilité sur A) :

Définition 11 (du **P -processus de percolation dynamique conservative de paramètre p**). On se donne une matrice de transition symétrique P sur l'ensemble V des sites de \mathbb{T} et on tire une configuration de percolation $\omega_P(0)$ selon la loi \mathbb{P}_p . À chaque site de \mathbb{T} on associe une horloge exponentielle de telle façon que les horloges sont indépendantes entre elles et de $\omega_P(0)$. Quand l'horloge d'un site v sonne, on choisit un autre site v' avec probabilité $P(v, v')$ (indépendamment de tout le reste) et on échange l'état des deux sites. On note $(\omega_P(t))_{t \geq 0}$ le processus obtenu.

Considérons un processus dynamique conservatif comme défini ci-dessus. Pour tout ensemble fini $S \subseteq V$, on va définir un processus $(S_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{P}(V)$ et issu de S . Considérons donc un tel S qu'on voit comme un ensemble de particules qui vit sur V . Quand dans le processus de percolation dynamique conservative on échange l'état de deux sites v et w alors qu'une de nos $|S|$ particules se trouve sur v , cette dernière saute sur le site w . On définit alors S_t comme l'ensemble des sites sur lequel se trouvent les particules après un temps t . On dira qu'au bout d'un temps t l'ensemble **S a migré jusqu'à S_t** et on notera $P_t(S, S')$ la probabilité de l'événement $\{S_t = S'\}$ (qui est nulle si $|S'| \neq |S|$). Pour nos configurations de percolation, cet événement signifie que les états des sites de S' au temps t sont déterminés par les états des sites de S au temps 0. Notons aussi que $(S_t)_{t \geq 0}$ est indépendant de $\omega_P(0)$.

Donnons deux exemples de matrices de transition P :

1. La dynamique aux plus proches voisins : $P(v, v') = 0$ si v et v' ne sont pas voisins, (nombre de voisins de v) $^{-1}$ ($= 1/6$) sinon.
2. Étant donné un $\alpha > 0$, on définit la matrice de dynamique α -polynomiale en posant (pour $v \neq v'$) :

$$P(v, v') = P^\alpha(v, v') \propto \text{dist}(v, v')^{-(2+\alpha)} \quad (6)$$

(i.e. $P^\alpha(v, v') = \frac{1}{\sum_{v'' \neq v} \text{dist}(v, v'')^{-(2+\alpha)}} \text{dist}(v, v')^{-(2+\alpha)}$ où dist est la distance Euclidienne).

Notons que quelques arguments sont nécessaires pour montrer que le processus de dynamique conservative est bien défini. Nous laissons les détails de côté, disant seulement que ce qu'il faut prouver est qu'il n'y a pas de "cascade" infinie i.e. que l'état d'un site v à un temps t est (presque sûrement) défini par une suite finie d'échanges d'états entre sites du temps 0 au temps t (ici le fait que P est symétrique est important).

Il est facile de remarquer que, pour tout t , $\omega_P(t) \sim \mathbb{P}_p$. On se pose donc les mêmes questions qu'en Partie 2. Avec un peu plus d'efforts mais les mêmes arguments on prouve :

Proposition 12. *Soit P une matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} . Si $p \neq p_c$, alors presque sûrement il n'existe pas de temps exceptionnel pour $(\omega_P(t))_{t \geq 0}$.*

Regardons maintenant notre processus de percolation dynamique conservative au point critique $p = 1/2$ dans une grande fenêtre de taille n . Supposons que $P(v, v) = 0$ pour tout v . Il semblerait que, comme pour le processus de percolation dynamique i.i.d., après un temps $t > 0$, il soit très probable que des grandes connexions se fassent (ou que des grandes connexions se défassent). La différence avec le premier processus dynamique est que quand un site s'ouvre, un autre se ferme. Mais si cela semble rendre moins fréquent l'apparition (ou la disparition) de connexions entre clusters, cela n'empêche pas que ces connexions peuvent encore apparaître (ou disparaître) après un temps t avec probabilité plus grande qu'une constante ne dépendant pas de n . Finalement, l'intuition est que, si on ne s'intéresse qu'à ces connexions, **le processus de percolation dynamique conservative ressemble au processus i.i.d., mais changé de temps.**

Le but d'un travail en cours est de prouver un théorème qui va dans ce sens (qui dit qu'à un changement de temps près, et avec un bon changement d'échelles temporelle et spatiale les deux processus dynamiques possèdent une limite dans le continu et que ces dernières sont les mêmes). Ce théorème aura probablement comme conséquence la preuve de la conjecture suivante dans le cas où P est invariante par translation :

Conjecture 13. *(Voir le Théorème 6 pour la définition de A_n). Soit P une matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} telle que $P(v, v) = 0$ pour tout v . La sensibilité au bruit au point critique est aussi vraie dans le sens conservatif i.e. : si $p = p_c = 1/2$, alors pour tout $t > 0$:*

$$\text{Cov}(\mathbf{1}_{\{\omega_P(0) \in A_n\}}, \mathbf{1}_{\{\omega_P(t) \in A_n\}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Notons que ce résultat a déjà été prouvé dans [BGS13] dans le cas des matrices de dynamique α -polynomiale (voir (6)) au moins pour α petit. Malheureusement, comme pour le cas i.i.d., un tel résultat ne permet pas de conclure qu'il existe des temps exceptionnels. Mais nous conjecturons :

Conjecture 14. *Soit P une matrice de transition symétrique sur les sites de \mathbb{T} telle que $P(v, v) = 0$ pour tout v . Si $p = p_c = 1/2$, alors presque sûrement il existe des temps exceptionnels pour $(\omega_P(t))_{t \geq 0}$.*

Et nous avons prouvé avec Christophe Garban le théorème suivant :

Théorème 15. *Si $p = p_c = 1/2$ et α est assez petit, alors presque sûrement il existe des temps exceptionnels pour $(\omega_{P^\alpha}(t))_{t \geq 0}$.*

Comme pour la dynamique i.i.d., pour prouver ce théorème, il suffit de montrer que, pour α suffisamment petit, il existe $C = C(\alpha) < +\infty$ telle que, pour tout n :

$$\int_0^1 \mathbb{P} \left[0 \xrightarrow{\omega_{P^\alpha}(0)} n, 0 \xrightarrow{\omega_{P^\alpha}(t)} n \right] dt \leq C \mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n]^2. \quad (7)$$

Si on suit la la preuve de l'inégalité équivalente dans le cas *i.i.d.*, on doit trouver une base $(\Phi_k)_k$ de $L^2(\Omega_n, \mathbb{P}_{1/2})$ - voir le début de la Partie 3 pour les notations - qui (comme $(\chi_S)_S$ pour le processus *i.i.d.*) “diagonalise notre processus $(\omega_P(t))_{t \geq 0}$ ” *i.e.* telle que :

$$\mathbb{E} [\Phi_k(\omega_P(0)) \Phi_l(\omega_P(t))] = e^{-t\lambda_k} \delta_{k,l}$$

pour certains λ_k . Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas d'expression explicite de telles fonctions. Une autre méthode s'impose donc et la base $(\chi_S)_S$ ayant été finement étudiée, il est intéressant de regarder son comportement vis-à-vis de $(\omega_P(t))_{t \geq 0}$: En utilisant que les χ_S , $S \subseteq V_n$, ne prennent que les valeurs 1 et -1 on écrit, pour $S, S' \subseteq V_n$:

$$\mathbb{E} [\chi_S(\omega_P(0)) \chi_{S'}(\omega_P(t))] = 2\mathbb{P} [\chi_S(\omega_P(0)) = \chi_{S'}(\omega_P(t))] - 1.$$

Regardons maintenant si l'ensemble S a migré jusqu'à S' au bout du temps t ou pas :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [\chi_S(\omega_P(0)) = \chi_{S'}(\omega_P(t))] &= P_t(S, S') \mathbb{P} [\chi_S(\omega_P(0)) = \chi_{S'}(\omega_P(t)) | S_t = S'] + \\ & (1 - P_t(S, S')) \mathbb{P} [\chi_S(\omega_P(0)) = \chi_{S'}(\omega_P(t)) | S_t \neq S']. \end{aligned}$$

Or, si $S_t = S'$, alors $\chi_S(\omega_P(0)) = \chi_{S'}(\omega_P(t))$. De plus, il n'est pas très difficile de montrer que, conditionnellement à $\{S_t \neq S'\}$, $\chi_S(\omega_P(0))$ et $\chi_{S'}(\omega_P(t))$ sont indépendants et de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\chi_S(\omega_P(0)) \chi_{S'}(\omega_P(t))] &= 2 \left(P_t(S, S') + \frac{1}{2}(1 - P_t(S, S')) \right) - 1 \\ &= P_t(S, S'). \end{aligned}$$

L'inégalité (7) se réécrit donc (voir la Définition 9 pour la définition de $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$ et le début de la Partie 3 pour celle de f_n) :

$$\sum_{S, S' \subseteq V_n} \int_0^1 \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}[S]} \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}[S']} P_t^\alpha(S, S') dt \leq C \mathbb{P}_{1/2} [0 \leftrightarrow n].$$

Si on était plutôt dans un contexte d'analyse fonctionnelle, peut-être qu'on écrirait :

$$\sum_{S, S' \subseteq V_n} \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}[S]} \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}[S']} P_t^\alpha(S, S') = \left\langle \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}}, \sqrt{\hat{\mathbb{P}}_{f_n}} \star P_t^\alpha \right\rangle$$

ce qui suggère que ce qu'on veut prouver peut se résumer par : “la mesure $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$ et le noyau $(P_t^\alpha(S, S'))_{S, S'}$ sont quasi-singuliers” ou plus précisément :

Considérons une dynamique conservative de matrice P^α et \mathcal{S} une variable aléatoire de loi $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$ indépendante de la dynamique. De plus, notons \mathcal{S}_t l'ensemble de sites jusqu'où \mathcal{S} a migré après un temps t . Notre but devient de montrer que quand n est grand la loi de \mathcal{S}_t est très éloignée de $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$. Le théorème-clef de notre travail (à rapprocher du Théorème 10) est le suivant. Nous n'en donnons qu'un énoncé partiel et résumons dans la Figure 3 l'argument qui permet de passer du Théorème 16 au Théorème 15.

Théorème 16. *Soit \mathcal{S} une variable aléatoire de loi $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$. Si on le conditionne à être de taille plus petite que k , \mathcal{S} vit en général à distance inférieure à $k^{4/3+o(1)}$ de l'origine.*

Pour aller plus loin

Nous n'arrivons pas pour le moment à étendre cette preuve d'existence de temps exceptionnels à la dynamique aux plus proches voisins qui n'autorise pas de grands sauts. Il faudrait trouver une singularité locale pour $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$. Plus précisément, il faudrait trouver un “schéma local” qu'on trouverait avec probabilité très faible dans une variable de loi $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$ mais qui après une dynamique aux plus proches voisins aurait une

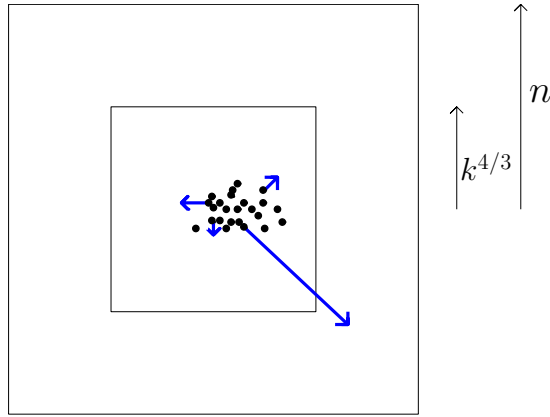


FIGURE 3 – Conditionnons \mathcal{S} à être de taille k et appliquons une dynamique conservative de matrice P^α . Si α est petit, des grands sauts sont possibles. Après un temps t , il est donc “très probable” que certains points de \mathcal{S} aient migré hors du carré $[-k^{4/3}, k^{4/3}]^2$. Le Théorème 16 nous dit alors que la loi de \mathcal{S}_t est très différente de $\hat{\mathbb{P}}_{f_n}$.

forte probabilité d’apparaître quelque part dans \mathcal{S}_t .

Un autre but est d’étendre ce résultat au cas de la percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^2 .

Enfin, comme mentionné plus haut, un projet en cours a comme but l’étude des limites d’échelles des processus conservatifs à partir de celle faite dans le cas *i.i.d.* dans [GPS13a] et [GPS13b].

Références

- [BGS13] Erik I Broman, Christophe Garban, and Jeffrey E Steif. Exclusion sensitivity of boolean functions. *Probability theory and related fields*, 155(3-4) :621–663, 2013.
- [BH57] Simon R Broadbent and John M Hammersley. Percolation processes. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 53, pages 629–641. Cambridge Univ Press, 1957.
- [BKS99] Itai Benjamini, Gil Kalai, and Oded Schramm. Noise sensitivity of Boolean functions and applications to percolation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (90) :5–43 (2001), 1999.
- [FvdH15] Robert Fitzner and Remco van der Hofstad. Nearest-neighbor percolation function is continuous for $d > 10$. *arXiv*, 2015.
- [GPS10] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. The fourier spectrum of critical percolation. *Acta Mathematica*, 205(1) :19–104, 2010.
- [GPS13a] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. Pivotal, cluster, and interface measures for critical planar percolation. *Journal of the American Mathematical Society*, 26(4) :939–1024, 2013.
- [GPS13b] Christophe Garban, Gábor Pete, and Oded Schramm. The scaling limits of near-critical and dynamical percolation. *arXiv preprint arXiv :1305.5526*, 2013.
- [Gri99] Geoffrey R Grimmett. *Percolation (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer : Berlin, Germany, 1999.
- [GS14] Christophe Garban and Jeffrey Steif. *Noise sensitivity of Boolean functions and percolation*. Cambridge University Press, 2014.
- [Har60] Theodore E Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. 56(01) :13–20, 1960.

- [HPS97] Olle Häggström, Yuval Peres Peres, and Jeffrey Steif. Dynamical percolation. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, volume 33, pages 497–528. Elsevier, 1997.
- [HS94] Takashi Hara and Gordon Slade. Mean-field behaviour and the lace expansion. In *Probability and phase transition (Cambridge, 1993)*, volume 420 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 87–122. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [Kes80] Harris Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $1/2$. *Comm. Math. Phys.* 74, no. 1, 1980.
- [KKL88] Jeff Kahn, Gil Kalai, and Nathan Linial. The influence of variables on boolean functions. In *Foundations of Computer Science, 1988., 29th Annual Symposium on*, pages 68–80. IEEE, 1988.
- [Lig85] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*, volume 276 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [LSW02] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. One-arm exponent for critical 2D percolation. *Electron. J. Probab.*, 7 :no. 2, 13 pp. (electronic), 2002.
- [SS10] Oded Schramm and Jeffrey E. Steif. Quantitative noise sensitivity and exceptional times for percolation. *Ann. of Math. (2)*, 171(2) :619–672, 2010.
- [SW01] Stanislav Smirnov and Wendelin Werner. Critical exponents for two-dimensional percolation. *Math. Res. Lett.*, 8(5-6) :729–744, 2001.
- [Wer07] Wendelin Werner. Lectures on two-dimensional critical percolation. *IAS Park City Graduate Summer School*, 2007.