

# Déterminants dynamiques et propriétés statistiques des systèmes hyperboliques

Malo Jézéquel

## Introduction

On introduit dans ce texte un objet qui contient de nombreuses informations sur les propriétés statistiques de certains systèmes dynamiques différentiables : les déterminants dynamiques. Donnons nous une variété riemannienne lisse  $X$ , un difféomorphisme  $T : X \rightarrow X$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Supposons en outre que pour tout entier naturel non-nul  $n$ , le nombre de points  $n$ -périodiques de  $T$  est fini<sup>1</sup> et que si  $x$  est un de ces points alors la différentielle  $D_x T^n : T_x X \rightarrow T_x X$  de  $T^n$  en  $x$  n'admet pas 1 comme valeur propre. On peut alors définir le déterminant dynamique de  $T$  associé au poids  $g$  comme la série entière<sup>2</sup> :

$$d_g(z) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{T^n x = x} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} g(T^k x)}{|\det(I - (D_x T^n)^{-1})|} \right) z^n \right) \in \mathbb{C}[[z]]. \quad (1)$$

On s'intéresse bien sûr au rayon de convergence de cette série, ainsi qu'aux zéros de sa somme, dont nous présenterons les liens avec les propriétés statistiques de la dynamique de  $T$ .

Afin de justifier l'introduction de cet objet nous commençons par nous intéresser à un autre : les fonctions zêta dynamiques que l'on étudie dans §1 dans le cas d'un exemple fondamental de système dynamique, un sous-décalage de type fini (ou chaîne de Markov topologique).

On présente dans §2 comment l'étude des fonctions zêta des applications dilatantes analytiques a amené Ruelle dans [25] à introduire la notion de déterminant dynamique.

On s'intéresse ensuite à l'étude des propriétés statistiques des dynamiques hyperboliques et dilatantes. Après une description rapide de l'approche classique de ce sujet (par la dynamique symbolique) dans §3.1, on en introduit dans §3.2 l'approche fonctionnelle à travers notamment la notion d'opérateur de transfert. Celui-ci est intrinsèquement lié au déterminant dynamique (voir par exemple le théorème 4). À titre d'exemple, on présente dans §3.3 un sujet dans lequel on peut naturellement faire intervenir les déterminants dynamiques : celui de la décroissance des corrélations. Afin de rendre la présentation aussi simple que possible, nous traitons d'abord de ces sujets dans le cas des dynamiques dilatantes (qui peuvent être vues comme des dynamiques hyperboliques dégénérées) puis nous présentons dans §3.4 les idées qui permettent d'étudier ces questions dans le cas hyperbolique.

On présente ensuite dans §4 comment les déterminants dynamiques peuvent être utilisés pour calculer de manière très efficace la valeur de certaines quantités liés aux propriétés statistiques de certaines dynamiques.

Enfin, on expose dans §5 comment la notion de fonction zêta peut être définie pour des dynamiques à temps continu.

---

1. Un point  $x \in X$  est dit  $n$ -périodique si  $T^n x = x$ .

2. On rappelle que l'exponentiation d'une série formelle est une opération bien définie.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fonction zêta des sous-décalages de type fini</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fonctions zêtas et déterminants dynamiques des applications dilatantes analytiques</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Propriétés statistiques des dynamiques hyperboliques</b>	<b>4</b>
3.1	L'approche classique par la dynamique symbolique . . . . .	4
3.2	Opérateurs de transfert . . . . .	5
3.3	Résonances et décroissance des corrélations . . . . .	6
3.4	Dynamiques hyperboliques et espaces de Banach anisotropiques . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Autres applications des déterminants dynamiques</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Fonctions zêta des dynamiques à temps continu</b>	<b>9</b>

## 1 Fonction zêta des sous-décalages de type fini

Si  $X$  est un ensemble et  $T : X \rightarrow X$  une application telle que pour tout entier naturel non-nul  $n$  le nombre de points  $n$ -périodiques de  $T$  est fini, on peut définir une fonction zêta associée au système dynamique  $(X, T)$  par la formule

$$\zeta(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\#\{x \in X : T^n x = x\}}{n} z^n\right) \in \mathbb{C}[[z]]. \quad (2)$$

Celle-ci est *a priori* définie comme un série entière en la variable  $z$  (on l'identifiera à sa somme lorsqu'il y a convergence). Afin de justifier cette définition, nous allons calculer la fonction zêta d'un système dynamique très particulier : un sous-décalage de type fini. Ce calcul a été fait pour la première fois par Bowen et Lanford dans [7].

On se donne donc un ensemble fini  $\Sigma$  appelé alphabet et une matrice de transition  $A : \Sigma^2 \rightarrow \{0, 1\}$ . On définit alors l'espace de configuration de notre système dynamique par

$$\Sigma_A = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N}, A(a_i, a_{i+1}) = 1\},$$

que l'on munira de la topologie induite par la topologie produit sur  $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ . L'ensemble  $\Sigma_A$  peut être vu comme l'espace des chemins infinis dans le graphe orienté  $\mathcal{G}$  dont les sommets sont les éléments de  $\Sigma$  et où une arête va de  $a$  vers  $b$  si  $A(a, b) = 1$ . On pourrait ici remplacer  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{Z}$  sans modification d'importance. Nous supposons dans la suite  $\Sigma_A$  non-vide et nous agirons sur celui-ci par décalage, c'est-à-dire que nous nous intéressons à la dynamique de l'application  $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  définie par

$$\sigma((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (a_{i+1})_{i \in \mathbb{N}}.$$

De nombreuses propriétés du système dynamique  $(\Sigma_A, \sigma)$  peuvent s'exprimer aisément en termes de la matrice  $A$  ou du graphe  $\mathcal{G}$  (voir par exemple l'exercice 1.7 de [3]). Pour le calcul de la fonction zêta de  $(\Sigma_A, \sigma)$ , nous aurons besoin du résultat suivant dont la preuve est élémentaire (voir par exemple [21, Corollaire 1.9.5]).

**Proposition 1.** *Pour tout entier naturel non-nul  $n$  on a*

$$\text{tr}(A^n) = \#\{x \in \Sigma_A : T^n x = x\}. \quad (3)$$

Ainsi la série entière définie par (2) a un rayon de convergence non-nul et pour  $z$  de module suffisamment petit on a

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{n} z^n\right) = \exp\left(\text{tr}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n} z^n\right)\right) \\ &= \exp(-\text{tr}(\ln(I - zA))) = \det(\exp(-\ln(I - zA))) = \det((I - zA)^{-1}) \\ &= (\det(I - zA))^{-1}. \end{aligned}$$

La fonction  $\zeta$  du système  $(\Sigma_A, \sigma)$  s'étend donc en une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ . Il sera bon par la suite de se souvenir que celle-ci s'écrit aisément en termes du déterminant d'une matrice. Enfin, intéressons nous aux pôles de la fonction  $\zeta$ . Ce sont les inverses des valeurs propres non-nulles de la matrice  $A$ . Notons  $\rho$  le plus grand module d'une valeur propre de  $A$  (c'est-à-dire son rayon spectral). Ainsi, le pôle de plus petit module de  $\zeta$  est de module  $\rho^{-1}$ . Or un calcul classique relie  $\rho$  à une quantité liée aux propriétés statistiques du système  $(\Sigma_A, \sigma)$  : son entropie topologique qui n'est autre que  $\ln \rho$  (voir par exemple [21, Définition 3.1.3] pour une définition de l'entropie topologique). Il est notable que, dans le cas particulier des sous-décalages de type fini, l'entropie topologique, (qui, comme son nom l'indique est un invariant topologique), est totalement déterminée par la fonction zêta du système (qui est un invariant uniquement combinatoire).

## 2 Fonctions zêtas et déterminants dynamiques des applications dilatantes analytiques

Dans [25], Ruelle s'intéresse à une généralisation de la fonction zêta : les fonctions zêta à poids. Si en plus d'un système dynamique  $(X, T)$  vérifiant les conditions énoncées au début du paragraphe précédent on se donne une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ , on peut définir une fonction zêta à poids  $\zeta_g$  par

$$\zeta_g(z) = \exp \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{T^n x=x} \prod_{k=0}^{n-1} g(T^k x) \right) \frac{z^n}{n} \right) \in \mathbb{C}[[z]]. \quad (4)$$

On retrouve la fonction zêta définie au paragraphe précédent en prenant  $g = 1$ .

Dans [25], Ruelle s'intéresse à cet objet dans un cadre particulier :  $X$  est une variété analytique réelle compacte,  $g$  est une fonction analytique et  $T$  est une application analytique dilatante, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda > 1$  et une métrique riemannienne sur  $X$  pour laquelle on a

$$\forall x \in X : \forall v \in T_x M : \|D_x T \cdot v\| \geq \lambda \|v\|.$$

Sous ces hypothèses, il montre le résultat suivant.

**Théorème 2** (Ruelle). *La série entière définie par (4) a un rayon de convergence non-nul et sa somme s'étend en une application méromorphe sur  $\mathbb{C}$ .*

La preuve de ce résultat fait intervenir les déterminants dynamiques définis par

$$d_{g,k}(z) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{T^n x=x} \frac{\text{tr}(\Lambda^k D_x T^n) \prod_{l=0}^{n-1} g(T^l x)}{\det(I - D_x T^n)} \right) \frac{z^n}{n} \right) \text{ pour } k = 0, \dots, n. \quad (5)$$

Un raisonnement d'algèbre linéaire élémentaire permet en effet de prouver que

$$\zeta_g(z) = \prod_{k=0}^n d_{g,k}(z)^{(-1)^{k+1}}.$$

On notera en particulier que le déterminant  $d_{g,0}$  est celui défini par (1).

Il s'agit donc de montrer que les séries entières définissant  $d_{g,0}, \dots, d_{g,n}$  convergent et que leurs sommes s'étendent en des fonctions méromorphes sur  $\mathbb{C}$ . L'idée de Ruelle est alors d'utiliser la théorie de Fredholm pour étudier les  $d_{g,k}$ . Cette théorie, exposée dans [15] et [16], vise notamment à étendre les notions de trace et de déterminant au cas de la dimensions infinie. On aimerait ici pouvoir écrire pour  $k = 0, \dots, n$

$$d_{g,k}(z) = \det(I - z\mathcal{L}_k) \quad (6)$$

où  $\mathcal{L}_k$  est un opérateur « de transfert » agissant sur un espace de Banach de  $k$ -formes analytiques (nous évoquerons les opérateurs de transfert plus en détail dans §3.2). Malheureusement, pour des raisons techniques (essentiellement parce que la régularité analytique nous empêche de recourir à des partitions de l'unité), la formule (6) n'a en général pas lieu (le cas où  $X$  est un cercle étant une exception notable). On peut cependant la corriger en utilisant une formule de décompte des points périodiques de  $T$  similaire à celle démontrée par Manning dans [23]. Lorsqu'on quitte la régularité analytique la formule (6) n'est pas vérifiée pour une autre raison : les opérateurs de transfert ne vérifient plus les hypothèses nécessaires pour appliquer la théorie de Fredholm. Il est cependant bon de garder cette formule en tête car c'est elle qui motive en partie l'étude des déterminants dynamiques.

### 3 Propriétés statistiques des dynamiques hyperboliques

Il est en général très difficile de décrire une trajectoire donnée d'une dynamique, on préférera donc en étudier les propriétés statistiques. C'est l'objet de la théorie ergodique. Étudier les propriétés « en moyenne » d'une application mesurable  $T : X \rightarrow X$  nécessite de se donner une mesure sur l'espace mesurable  $X$ . On privilégiera l'usage des mesures de probabilité invariantes<sup>3</sup> par  $T$ . Cependant, il existe en général beaucoup de mesures invariantes. Dans le cas des dynamiques dilatantes et hyperboliques, on privilégiera celles d'entre elles qui ont un sens physique (voir le théorème 3).

Nous présentons maintenant les outils qui permettent d'étudier les propriétés statistiques des dynamiques dilatantes et hyperboliques. On présente les idées de la dynamique symbolique dans §3.1. Celle-ci n'étant pas l'outil le plus approprié à l'étude des déterminants dynamiques, on introduit ensuite l'approche fonctionnelle dans §3.2. On s'intéresse dans §3.3 aux problèmes de la décroissance des corrélations dans lequel le déterminant dynamique apparaît naturellement. Pour plus de simplicité, nous traiterons de ce sujets dans le cadre des dynamiques dilatantes et nous évoquons dans §3.4 comment en mener l'étude dans le cas hyperbolique.

#### 3.1 L'approche classique par la dynamique symbolique

Une approche classique de l'étude des propriétés statistiques des dynamiques dilatantes et hyperbolique consiste à recourir à la dynamique symbolique (le nom de Bowen est souvent associé à cette approche, voir par exemple [6]). L'idée est la suivante : pour étudier un système dynamique topologique<sup>4</sup>  $(X, T)$ , on construit un sous-décalage de type fini  $(\Sigma_A, \sigma)$  (comme dans le premier paragraphe où en remplaçant  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{Z}$ ) et une surjection continue  $\pi : \Sigma_A \rightarrow X$  qui semi-conjugué  $T$  et  $\sigma$ , c'est-à-dire que l'on a  $\pi \circ \sigma = T \circ \pi$ .

Prenons un exemple. Si  $X = S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est un cercle et  $T$  est l'application doublante  $T : x \pmod{1} \mapsto 2x \pmod{1}$ , on prendra avec les notations du premier paragraphe  $\Sigma = (0, 1)$  et  $A$  la matrice dont toutes les entrées sont des 1 (on parle de sous-décalage complet). La surjection  $\pi$  est alors définie par

$$\pi((a_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i 2^{-(i+1)} \pmod{1}.$$

Autrement dit, on remarque que la multiplication par 2 est un calcul aisé lorsqu'on travaille avec les écritures dyadiques des nombres : il s'agit de décaler l'écriture. Cependant, il est bien connu qu'un réel peut avoir plusieurs écritures dyadiques. Par conséquent,  $\pi$  n'est pas injective : les suites constantes égales respectivement à 0 et 1 ont la même image.

Ce comportement ne pose en général pas de problème lorsqu'on étudie les propriétés statistiques du système  $(X, T)$  : en général, l'ensemble des points ayant plusieurs antécédents est petit à la fois du point de vue topologique et du point de vue de la théorie de la mesure. Cette approche est donc très fructueuse. Cependant, dans le cas particulier de l'étude des déterminants dynamiques deux problèmes sérieux se posent.

Le premier est le fait que certains points périodiques ont plusieurs antécédents par  $\pi$  (c'est le cas dans l'exemple ci-dessus), ce qui pose problème au vu de la définition (5) du déterminant dynamique. La formule de Manning ([23]) déjà évoqué permet parfois de régler ce problème.

Le deuxième problème, soulevé par Giulietti, Liverani et Pollicott dans l'introduction de [14], est plus profond. Il apparaît dans la définition (5) du déterminant dynamique que celui-ci dépend *a priori* de la structure différentielle de la dynamique (contrairement à la fonction zêta qui ne dépend que de la combinatoire), et on peut en effet aisément produire des applications dilatantes du cercle topologiquement conjugués mais dont les déterminants dynamiques sont distincts. Or le codage dans un sous-décalage de type fini nous fait perdre en partie l'information sur les propriétés différentielles de notre système de départ (l'espace topologique  $\Sigma_A$  est métrisable mais n'admet pas de structure de variété différentiable).

3. C'est-à-dire des mesures de probabilité  $\mu$  sur  $X$  telles que  $T_*\mu = \mu$ .

4. Un système dynamique topologique est un couple  $(X, T)$  où  $X$  est un espace topologique et  $T : X \rightarrow X$  une application continue.

### 3.2 Opérateurs de transfert

Une approche plus féconde dans le cas de l'étude des déterminants dynamiques consiste à faire agir un opérateur de transfert sur un espace de Banach bien choisi. Si  $(X, T)$  désigne toujours un système dynamique et  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction, on définit formellement l'opérateur de transfert  $\mathcal{L}_g$  associé au poids  $g$  par la formule

$$\mathcal{L}_g \varphi(x) = \sum_{Ty=x} g(y) \varphi(y). \quad (7)$$

Une partie non-négligeable de l'étude des opérateurs de transfert consiste à trouver un espace de Banach convenable sur lequel on peut donner un sens à cette formule et tel que l'opérateur obtenu ait de bonnes propriétés.

Replaçons-nous dans le contexte des applications dilatantes pour étudier cet opérateur :  $X$  est une variété lisse compacte et  $T : X \rightarrow X$  est une application  $\mathcal{C}^{r+1}$  dilatante au sens de la partie précédente ( $r$  est un entier naturel non-nul). Nous allons nous intéresser au cas particulier des poids  $\mathcal{C}^r$  strictement positifs  $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Sous ces hypothèses, on vérifie aisément que la formule (7) définit un opérateur borné  $\mathcal{L}_g : \mathcal{C}^r(X) \rightarrow \mathcal{C}^r(X)$ , où  $\mathcal{C}^r(X)$  désigne l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^r$  de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . L'opérateur ainsi défini jouit des propriétés remarquables listées dans le théorème suivant (voir le chapitre 2 de [3] pour les démonstrations et les références, notamment à Ruelle). Les notions sont définies après l'énoncé du théorème.

- Théorème 3.**
1. Le rayon spectral de  $\mathcal{L}_g$  est  $\rho = \exp(P_{top}(\log g))$  ;
  2. l'intersection du spectre de  $\mathcal{L}_g$  avec  $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{\rho}{\lambda^r}\}$  est composée de valeurs propres isolées de multiplicités finies ;
  3.  $\rho$  est une valeur propre simple de  $\mathcal{L}_g$  qui admet comme vecteur propre associé une fonction strictement positive  $h$  et les autres valeurs propres de  $\mathcal{L}_g$  sont de module strictement plus petit ;
  4.  $\mathcal{L}_g$  admet un unique vecteur propre à gauche  $\nu \in (\mathcal{C}^r(X))^*$  associé à la valeur propre  $\rho$  tel que  $\nu(h) = 1$  ;
  5.  $\nu$  définit une mesure (borélienne) sur  $X$  ;
  6. la mesure de probabilité définie par  $\mu = h d\nu$  est invariante par  $T$  et exponentiellement mélangeante, c'est la mesure d'équilibre de  $\log g$  ;
  7. si  $g = \frac{1}{|\det DT|}$  alors  $\nu$  est la mesure de Lebesgue,  $P_{top}(-\log |\det DT|) = 0$  et  $\mu$  est l'unique mesure invariante par  $T$  absolument continue par rapport à Lebesgue (elle est appelée mesure physique de  $T$ ).

Arrêtons-nous quelques temps sur ces propriétés. La pression topologique  $P_{top}$  de  $\log g$  est une généralisation de l'entropie topologique évoquée dans la première partie (voir [28], l'entropie topologique est la pression topologique de 0). Le premier point est donc à rapprocher de la formule exprimant l'entropie topologique d'un sous-décalage de type fini comme le logarithme d'un rayon spectral.

Le *rayon spectral essentiel*  $\rho_{ess}$  de  $\mathcal{L}_g$  est par définition le plus petit réel positif tel que l'intersection du spectre de  $\mathcal{L}_g$  avec  $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \rho_{ess}\}$  est composé de valeurs propres isolées et de multiplicités finies. Le deuxième point revient donc à dire que  $\rho_{ess} \leq \frac{\rho}{\lambda^r}$ . En particulier, on a  $\rho_{ess} < \rho$  : on dit que  $\mathcal{L}_g$  est quasi-compact. La quasi-compactité est une des propriétés que l'on attend d'un opérateur de transfert agissant sur un « bon » espace de Banach. Celle-ci se démontre en général par l'application du théorème de Hennion ([17, Corollaire 1]).

Le troisième point peut être vu comme la conséquence d'une généralisation du théorème de Perron-Frobenius en dimension infinie. Comme dans le cas du théorème de Perron-Frobenius, il suffit de montrer que l'opérateur  $\mathcal{L}_g$  contracte des cônes, ce qui peut se formaliser à l'aide de la métrique de Hilbert.

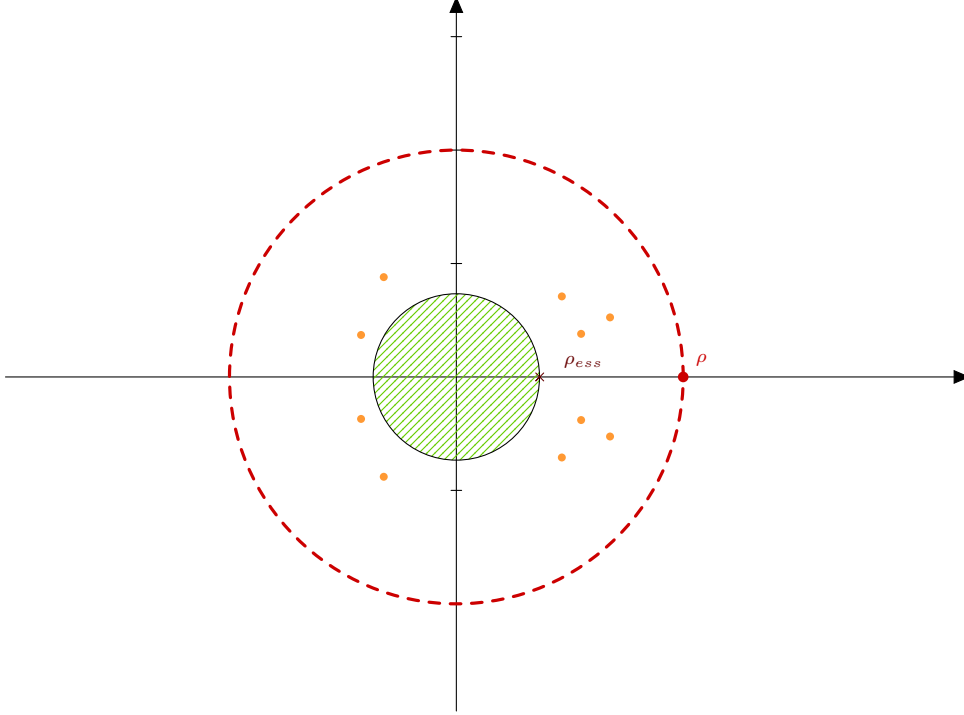
Par vecteur propre à gauche associé à la valeur propre  $\rho$ , on entend un élément  $\nu$  du dual de  $\mathcal{C}^r(X)$  vérifiant  $\nu \circ \mathcal{L}_g = \rho \nu$ . Le quatrième point est donc une conséquence de l'existence d'un projecteur spectral (voir par exemple [20, Théorème III.6.17]).

Le cinquième point est essentiellement une conséquence de la positivité de  $\mathcal{L}_g$ .

Dire que  $\mu$  est invariante signifie que  $T_*\mu = \mu$ . Nous reviendrons sur la définition du mélange exponentiel dans §3.3. La pression topologique de  $\log g$  évoquée plus haut est donnée par un principe variationnel : c'est le supremum sur l'espace des mesures invariantes par  $T$  d'une certaine fonctionnelle.

Dire que  $\mu$  est une mesure d'équilibre (ou une mesure de Gibbs) pour  $\log g$  c'est par définition dire que  $\mu$  atteint ce supremum.

Il faut retenir de ces propriétés que les opérateurs de transfert permettent de décrire un certain nombre de propriétés statistiques des applications dilatantes et de construire des mesures invariantes particulièrement intéressantes que sont les mesures de Gibbs (voir [25] pour une interprétation physique des états d'équilibre). Enfin, il faut avoir en tête la figure suivante qui donne l'allure du spectre d'un opérateur de transfert positif agissant sur un « bon » espace de Banach.



Enfin, l'opérateur  $\mathcal{L}_g$  est le candidat naturel pour jouer le rôle de  $\mathcal{L}_{g,0}$  dans la formule (6). Malheureusement, l'opérateur  $\mathcal{L}_g$  n'est pas nucléaire (il n'est même pas compact) et la théorie de Fredholm ne permet donc pas de définir son déterminant. Ruelle et Fried ont réussi à dépasser cette difficulté en approximant les itérés de  $\mathcal{L}_g$  par des opérateurs de rangs finis (voir respectivement [26] et [12]). On sait maintenant construire des généralisations de la trace et le déterminant qui permettent par exemple de montrer le résultat suivant (voir par exemple le chapitre 3 de [2]).

**Théorème 4.** *Sous les hypothèses précédentes, la série entière*

$$d_g(z) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} g(T^k x)}{|\det(I - (D_x T^n)^{-1})|} \frac{z^n}{n} \right) \quad (8)$$

*a un rayon de convergence supérieur ou égal à  $\lambda^r \exp(-P_{top}(\log g))$ . De plus, les zéros de  $d_g$  coïncident avec les inverses des valeurs propres de  $\mathcal{L}_g$  (comptées avec multiplicité).*

Comme dans [25], en faisant agir l'opérateur de transfert sur des espaces de formes différentielles  $\mathcal{C}^r$ , on peut déduire des résultats similaires pour les déterminants  $d_{g,k}$  pour  $k = 1, \dots, n$  et donc montrer que la fonction zêta associé au poids  $g$  est méromorphe sure le disque de centre 0 et de rayon  $\lambda^r \exp(-P_{top}(\log g))$ .

### 3.3 Résonances et décroissance des corrélations

Supposons maintenant que  $T$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ . Il découle alors du théorème 4 que le déterminant dynamique  $d_g$  s'étend en une fonction entière. On définit alors les résonances du système  $(T, g)$  comme l'ensemble des inverses des zéros de  $d_g$  (il s'agit d'une définition *ad hoc*, voir [2, Définition 1.1] pour une définition plus satisfaisante). Les résonances doivent être pensées comme les valeurs propres de l'opérateur de transfert  $\mathcal{L}_g$ . Notons  $\rho = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots$  la suite (finie ou infinie) des résonances rangées par

ordre décroissant de module. Pour tout  $i$ , on note  $m_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$ , c'est-à-dire la multiplicité de  $\lambda_i^{-1}$  en tant que zéro de  $d_g$ .

Donnons nous  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier  $n$ , on définit la corrélation entre  $\varphi$  et  $\psi \circ T^n$  par

$$C_n(\varphi, \psi) = \mu(\varphi \cdot \psi \circ T^n) - \mu(\varphi)\mu(\psi)$$

où  $\mu$  est la mesure définie par le théorème 3. Dire que  $\mu$  est mélangeante est équivalent à dire que, pour tout choix de  $\varphi$  et  $\psi$ , la quantité  $C_n(\varphi, \psi)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On dit que le mélange est exponentiel lorsque cette convergence l'est (avec une raison uniforme en  $\varphi$  et  $\psi$ ). On peut alors définir pour  $z$  au voisinage de 0 :

$$L_{\varphi, \psi}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n(\varphi, \psi) z^n$$

et en utilisant la relation  $\mathcal{L}_g(\varphi \cdot \psi \circ T) = \mathcal{L}_g(\varphi) \cdot \psi$  (qui se déduit de (7)), on obtient

$$L_{\varphi, \psi}(z) = \nu \left( \psi \left( 1 - \frac{z}{\rho} \mathcal{L}_g \right)^{-1} ((\varphi - \mu(\varphi)) h) \right)$$

où  $h$ ,  $\nu$  et  $\rho$  ont été définis par le théorème 3. On en déduit que  $L_{\varphi, \psi}$  s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe dont l'ensemble des pôles est inclus dans l'ensemble  $\frac{\rho}{\lambda_i}$ . Or le résidu de  $z \mapsto$

$\left( 1 - \frac{z}{\rho} \mathcal{L}_g \right)^{-1} ((\varphi - \mu(\varphi)) h)$  en 1 n'est autre que<sup>5</sup>

$$-\frac{h}{\rho} \nu((\varphi - \mu(\varphi)) h) = -\frac{h}{\rho} \mu((\varphi - \mu(\varphi))) = 0.$$

Ainsi,  $L_{\varphi, \psi}$  est holomorphe sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon  $\frac{\rho}{\lambda_1}$ . On en déduit le théorème suivant.

**Théorème 5.** *Pour tout  $\theta > \frac{|\lambda_1|}{\rho}$  on a  $C_n(\varphi, \psi) = o(\theta^n)$ .*

Dans le cas particulier où  $\rho$  est la seule résonance, on a donc une convergence plus rapide que toute exponentielle. C'est le cas par exemple si  $T$  est l'application doublante et  $g = \frac{1}{2}$  (on a  $d_g(z) = 1 - z$ ). En considérant les projecteurs spectraux associés aux résonances suivantes<sup>5</sup>, on peut améliorer le théorème 5 (voir [8]).

**Théorème 6.** *Pour tout  $i$ , il existe  $m_i$  formes bilinéaires continues  $b_{i,0}, \dots, b_{i,m_i-1} : \mathcal{C}^\infty(X) \times \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathbb{R}$  (qui ne dépendent pas de  $\varphi$  et  $\psi$ ) telles que pour tout  $\theta > 0$ , si on note  $N$  le plus grand entier tel que  $\theta < \frac{|\lambda_N|}{\rho}$ , alors*

$$\mu(\varphi \cdot \psi \circ T^n) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^{m_i-1} n^k \left( \frac{\lambda_i}{\rho} \right)^n b_{i,k}(\varphi, \psi) + o(\theta^n).$$

Le théorème 5 s'en déduit en remarquant que  $b_0(\varphi, \psi) = \mu(\varphi)\mu(\psi)$ .

### 3.4 Dynamiques hyperboliques et espaces de Banach anisotropiques

Les dynamiques hyperboliques sont un sujet d'intérêt majeur, notamment à cause de leur propriété de généricité. Donnons un exemple fondamental de dynamique hyperbolique, celui des difféomorphismes d'Anosov. Si  $X$  est une variété riemannienne lisse compacte connexe, un difféomorphisme  $T : X \rightarrow X$  est dit d'Anosov s'il remplit les conditions suivantes :

- pour tout  $x \in X$  l'espace tangent en  $x$  à  $X$  s'écrit comme une somme directe  $T_x M = E_x^u + E_x^s$  ;
- cette décomposition est stable par  $T$ , c'est-à-dire que pour tout  $x \in X$  on a  $D_x T(E_x^u) = E_{T_x}^u$  et  $D_x T(E_x^s) = E_{T_x}^s$  ;
- il existe des constantes  $C > 0$  et  $0 < \beta < 1$  telles que pour tout  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_u \in E_x^u$  et  $v_s \in E_x^s$  on a

$$\|D_x T^n v_s\| \leq C \beta^n \|v_s\| \quad \text{et} \quad \|D_x T^{-n} v_u\| \leq C \beta^n \|v_u\|. \quad (9)$$

5. On renvoie encore une fois à [20, III.6] pour ce point.

Autrement dit,  $T$  est contractante dans une direction ( $E_x^s$ , la direction stable) et dilatante dans une direction supplémentaire ( $E_x^u$ , la direction instable). C'est ce point qui définit les dynamiques hyperboliques. Les applications dilatantes peuvent donc être vues comme des cas dégénérés de dynamiques hyperboliques pour lesquelles la direction stable est triviale (c'est impossible dans le cas des difféomorphismes d'Anosov par un argument de volume).

Un exemple classique de difféomorphisme d'Anosov est donné par l'action sur le tore  $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$  d'une matrice hyperbolique<sup>6</sup> de  $Sl_2(\mathbb{Z})$ .

L'approche décrite dans §3.1 a été très étudiée dans le cas des difféomorphismes d'Anosov (voir [6]). Il a fallu attendre plus longtemps pour pouvoir mettre en place l'approche de §3.2 (voir par exemple [22] et [5]). En effet, la construction d'espaces de Banach adaptés aux dynamiques hyperboliques est assez récente. Plusieurs familles de tels espaces ont été décrites, on renvoie à [4] pour une description de ces différents espaces. Cependant, une idée commune motive ces différentes constructions : il s'agit de construire des espaces de distributions régulières dans la direction instable et "à régularité négative" dans la direction stable. Cette idée est inspirée par les comportements observés dans le cas des applications dilatantes que nous avons décrits dans §3.2 et justifie la dénomination d'espaces de Banach anisotropiques.

Donnons un exemple de construction d'un tel espace. On se donne deux cônes fermés  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_s$  dans  $\mathbb{R}^d$  dont l'intersection est  $\{0\}$  (des cônes stables et instables dont le choix seraient motivés par la dynamique dans les applications). On choisit alors deux applications  $\varphi_u, \varphi_s : S^{d-1} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et telles que  $\varphi_u + \varphi_s = 1$ ,  $\varphi_u$  vaut 1 sur  $\mathcal{C}_u \cap S^{d-1}$  et  $\varphi_s$  vaut 1 sur  $\mathcal{C}_s \cap S^{d-1}$ . On se donne deux réels  $r < 0 < t$  et on pose

$$\Psi(\xi) = \varphi_u \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) \left( 1 + |\xi|^2 \right)^{\frac{t}{2}} + \varphi_s \left( \frac{\xi}{|\xi|} \right) \left( 1 + |\xi|^2 \right)^{\frac{r}{2}}$$

pour  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  et  $\Psi(0) = 1$ . On définit alors  $\mathcal{B}$  comme l'espace des distributions tempérées  $u$  dont la transformée de Fourier est localement  $L^2$  et telles que  $\|\hat{u}\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty$ . On munit  $\mathcal{B}$  de la norme  $u \mapsto \|\hat{u}\Psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ . On construit ainsi un espace de Hilbert intermédiaire entre les espaces de Sobolev usuels  $H^r(\mathbb{R}^d)$  et  $H^t(\mathbb{R}^d)$ . L'étude de ces espaces est d'ailleurs assez similaires à celle des espaces de Sobolev usuels, on peut par exemple adapter la décomposition de Paley-Littlewood (dans laquelle on décompose non seulement par échelle de fréquence mais aussi selon les directions stables et instables) ou avoir une approche plus semi-classique (voir [11]).

Ces espaces de Banach anisotropiques permettent de démontrer des résultats assez similaires à ceux énoncés dans §3.2 et §3.3. On trouvera en particulier dans le chapitre 6 de [2] une construction du déterminant dynamique pour des dynamiques hyperboliques. On peut également obtenir des résultats sur la décroissance des corrélations (voir par exemple [10] et [1] pour des résultats dans un cadre analytique utilisant une autre construction d'espace de Banach anisotropique).

## 4 Autres applications des déterminants dynamiques

Les déterminants dynamiques permettent également de calculer de manière (très) efficace un certain nombre de quantités. Prenons l'exemple de la réponse linéaire. Il s'agit d'une notion inspirée par la physique statistique et qui désigne l'étude des variations au premier ordre des quantités statistiques d'un système sous une petite perturbation.

Plus rigoureusement, donnons-nous une application analytique  $t \mapsto T_t$  d'applications dilatantes du cercle analytiques, définie sur un intervalle ouvert  $]-\epsilon, \epsilon[$ . Pour tout  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  on note  $\mu_t$  la mesure physique de  $T_t$  (c'est-à-dire l'unique mesure de probabilité absolument continue par rapport à Lebesgue et invariante par  $T_t$ , dont l'existence est assurée par le dernier point du théorème 3). On cherche alors à étudier la régularité de l'application  $t \mapsto \mu_t$  et surtout à obtenir une formule pour sa dérivée en 0. Pour cela on se donne une observable analytique  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$  et on cherche une formule pour

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{S^1} g d\mu_t \right) \Big|_{t=0}. \quad (10)$$

Dans [24], Pollicott et Vytnova traitent ce problème en faisant intervenir le déterminant dynamique

---

6. C'est-à-dire qui n'a pas de valeur propre de module 1.



défini pour  $z$  au voisinage de 0 par

$$d(z, u, t) = \exp \left( - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{T_t^n x=x} \frac{\exp \left( -u \sum_{k=0}^{n-1} g(T_t^k x) \right)}{|1 - (T_t^n)'(x)|} \right) z^n \right)$$

et étendu, à  $u$  et  $t$  fixé, en une application entière  $z \mapsto d(z, u, t)$ . L'application  $d$  ainsi obtenue est analytique (en tant que fonction de 3 variables) et Pollicott et Vytnova montrent que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{S^1} g d\mu_t \right) \Big|_{t=0} = - \frac{\frac{\partial^2 d}{\partial u \partial t}(1, 0, 0)}{\frac{\partial d}{\partial z}(1, 0, 0)} + \frac{\frac{\partial^2 d}{\partial z \partial t}(1, 0, 0) \frac{\partial d}{\partial u} t(1, 0, 0)}{\left( \frac{\partial d}{\partial z}(1, 0, 0) \right)^2}. \quad (11)$$

Cette formule permet de donner de très bonnes approximations de la dérivée (10). Il est notable que la formule 11 reste vraie sous certaines hypothèses en différentiabilité finie, comme on le montre dans [19] (mais alors les approximations qui en découlent sont *a priori* moins bonnes).

Cette méthode peut être généralisée afin d'étudier d'autres quantités liées au comportement statistique de systèmes dynamiques. Par exemple, dans [18], Pollicott et Jenkinson arrivent à calculer les cent premières décimales de la dimension de Hausdorff de l'ensemble des éléments de  $[0, 1]$  dont l'écriture en fraction continue ne contient que des 1 et des 2. Ce résultat est d'autant plus impressionnant qu'on ne connaissait auparavant que 8 des décimales de ce nombre, alors que le sujet est étudié depuis plus de 80 ans. Notons par ailleurs que le lien entre la dimension de Hausdorff de certains ensembles et certaines quantités décrivant les propriétés statistiques de systèmes dynamiques (notamment la pression topologique) est connu depuis longtemps (voir par exemple [3, 2.5.2.C] pour le cas des ensembles de Julia).

## 5 Fonctions zêta des dynamiques à temps continu

On peut également définir des fonctions zêta et des déterminants dynamiques pour des dynamiques hyperboliques à temps continu. Rappelons qu'un flot  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur une variété lisse compacte  $X$  est un morphisme  $t \mapsto \varphi_t$  du groupe  $(\mathbb{R}, +)$  dans le groupe des difféomorphismes de  $X$ . Nous nous intéresserons ici aux flots d'Anosov, dont nous ne donnerons pas la définition. Nous nous contenterons de dire qu'il s'agit de flots hyperboliques qui généralisent en temps continu la notion de difféomorphisme d'Anosov défini dans §3.4. Un exemple fondamental de flot d'Anosov est la restriction du flot géodésique d'une variété riemannienne  $M$  à courbure négative à son fibré unitaire tangent. Dans le cas particulier où  $M$  est une surface de courbure négative constante, la dynamique de ce flot peut être étudié via la géométrie hyperbolique. On se ramène alors à l'étude des propriétés de certains sous-groupes de  $SL_2(\mathbb{R})$ . C'est dans ce contexte algébrique que Selberg introduit dans [27] la fonction zêta

$$\zeta_S(z) = \prod_{\gamma \in G} \prod_{n=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-(z+n)l(\gamma)} \right) \quad (12)$$

où  $G$  est l'ensemble des géodésiques fermées sur une surface de courbure constante égale à  $-1$  et  $l(\gamma)$  désigne la longueur d'une géodésique  $\gamma$ . Le produit infini qui apparaît dans (12) sur le demi-plan d'équation  $\Re(z) > 1$  et Selberg a prouvé que la fonction  $\zeta_S$  se prolonge en une fonction entière. Il est alors naturel de se demander ce qu'il advient de ce résultat lorsqu'on remplace  $G$  par l'ensemble des orbites fermées d'un flot d'Anosov. C'est la question que se pose Ruelle dans [25], il préfère cependant étudier la fonction définie par

$$\zeta_R(z) = \prod_{\gamma \in G_p} \left( 1 - e^{-zl(\gamma)} \right)^{-1} \quad (13)$$

où  $G_p$  est l'ensemble des orbites périodiques primitives d'un flot d'Anosov (c'est-à-dire qui ne sont pas obtenues en parcourant plusieurs fois une autre orbite périodique). On peut montrer que le produit infini qui apparaît dans (13) converge lorsque  $\Re(z)$  est assez grand et Ruelle montre, sous des hypothèses très fortes d'analyticité du flot que  $\zeta_R$  s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe. En 1995, Fried a réussi à relaxer ces hypothèses, donnant ainsi une preuve pour tous les flots d'Anosov analytiques

dans [13]. En utilisant des espaces de Banach anisotropiques dont la construction est plus géométrique que celle évoquée dans §3.4, Giulietti, Liverani et Pollicott ont récemment montré qu'en différentiabilité finie  $\zeta_R$  peut toujours s'étendre en une application méromorphe sur un certain demi-plan [14, Théorème 2.1]. Ce résultat implique en particulier que  $\zeta_R$  s'étend en une application méromorphe sur  $\mathbb{C}$  lorsque le flot est  $C^\infty$ . Dans [9], Dyatlov et Zworski arrivent au même résultat par des méthodes d'analyse semi-classique. La démonstration de ces résultats passent par la méthode due à Ruelle que l'on a décrite dans §2 et qui consiste à décrire la fonction zêta comme un produit alterné de déterminants dynamiques.

De nombreuses questions en lien avec les fonctions zêta des dynamiques hyperboliques à temps continu restent ouvertes. On dispose par exemple aussi d'une notion de résonances et la répartition de celles-ci est un sujet d'étude très actif. On cherche également à généraliser au cas des flots d'Anosov un certain nombre de résultats connus dans un contexte géométriques relativement simple (par exemple pour le flot géodésique sur une surface à courbure négative constante).

## Références

- [1] Alexander Adam. Generic non-trivial resonances for Anosov diffeomorphisms. *Nonlinearity*, 30(3), 2017.
- [2] Viviane Baladi. *Dynamical Zeta Functions and Dynamical Determinants for Hyperbolic Maps*. Springer, to appear, <http://webusers.imj-prg.fr/~viviane.baladi/baladi-zeta2016.pdf>.
- [3] Viviane Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlation*, volume 16 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [4] Viviane Baladi. The quest for the ultimate anisotropic Banach space. *J. Stat. Phys.*, 166(3-4) :525–557, 2017.
- [5] Viviane Baladi and Masato Tsujii. Spectra of differentiable hyperbolic maps. In *Traces in number theory, geometry and quantum fields*, Aspects Math., E38, pages 1–21. Friedr. Vieweg, Wiesbaden, 2008.
- [6] Rufus Bowen. *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Lecture Notes in Mathematics, 470. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [7] Rufus Bowen and Oscar Eramus Lanford III. Zeta functions of restrictions of the shift transformation. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 43–49. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [8] Pierre Collet and Jean-Pierre Eckmann. Liapunov multipliers and decay of correlations in dynamical systems. *J. Statist. Phys.*, 115(1-2) :217–254, 2004.
- [9] Semyon Dyatlov and Maciej Zworski. Dynamical zeta functions for Anosov flows via microlocal analysis. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(3) :543–577, 2016.
- [10] Frédéric Faure and Nicolas Roy. Ruelle-Pollicott resonances for real analytic hyperbolic maps. *Nonlinearity*, 19(6) :1233–1252, 2006.
- [11] Frédéric Faure, Nicolas Roy, and Johannes Sjöstrand. Semi-classical approach for Anosov diffeomorphisms and Ruelle resonances. *Open Math. J.*, 1 :35–81, 2008.
- [12] David Fried. The flat-trace asymptotics of a uniform system of contractions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(6) :1061–1073, 1995.
- [13] David Fried. Meromorphic zeta functions for analytic flows. *Comm. Math. Phys.*, 174(1) :161–190, 1995.
- [14] Paolo Giulietti, Carlangelo Liverani, and Mark Pollicott. Anosov Flows and Dynamical Zeta Functions. *Annals of Mathematics*, 178 :687–773, 2013.
- [15] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Nahum Krupnik. *Traces and Determinants of Linear Operators*. Operator theory : Advances and applications, 116. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2000.
- [16] Alexandre Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. American Mathematical Society, 1955.

- [17] Hubert Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipchitziens. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 118(2) :627–634, 1993.
- [18] Oliver Jenkinson and Mark Pollicott. Rigorous effective bounds on the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets : a hundred decimal digits for the dimension of  $E_-2$ . *arXiv : 1611.09276*, 2016.
- [19] Malo Jézéquel. Parameter regularity of dynamical determinants of expanding maps of the circle and an application to linear response. *arXiv : 1708.01055*, 2017. Soumis pour publication.
- [20] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-Neuyork, 1966.
- [21] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [22] Carlangelo Liverani and Masato Tsujii. Zeta functions and dynamical systems. *Nonlinearity*, 19(10) :2467–2473, 2006.
- [23] Anthony Manning. Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. *Bull. London Math. Soc.*, 3 :215–220, 1971.
- [24] Mark Pollicott and Polina Vytovna. Linear response and periodic points. *Nonlinearity*, 29(10) :3047–3066, 2016.
- [25] David Ruelle. Zeta-Functions for Expanding Maps and Anosov Flows. *Inventiones Math.*, 34 :231–242, 1976.
- [26] David Ruelle. An extension of the theory of Fredholm determinants. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (72) :175–193, 1990.
- [27] Atle Selberg. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 20 :47–87, 1956.
- [28] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.