

Introduction au Domaine de Recherche : Débruitage d'Images Médicales

Jean Feydy

11 octobre 2015

Résumé

Les images médicales ont, quelle que soit la modalité utilisée, vocation à être fortement bruitées et détériorées car obtenues avec des doses de radiation ou des temps d'acquisition aussi faibles que possible. En vue de traiter ces données, de nombreuses techniques ont vu le jour : nous décrirons ici quelques méthodes historiques et populaires dans l'industrie, avant de traiter plus spécifiquement des seuillages en bases d'ondelettes.

Table des matières

1	Introduction et motivations	1
2	Méthodes linéaires, filtrage	2
2.1	Un exemple de méthode historique : le filtrage adaptatif	2
2.2	La Transformée de Fourier Discrète	5
3	Débruitage non-linéaire par seuillage d'une représentation parcimonieuse	7
3.1	Cahier des charges d'une bonne transformée	7
3.2	Les ondelettes, résultats de Donoho	8
3.3	Les ondelettes orientables	10
4	Ouvertures et conclusion	11

1 Introduction et motivations

En matière d'imagerie médicale, qualité rime souvent avec danger. En effet, pour acquérir images ou volumes de l'anatomie d'un patient,

on expose souvent celui-ci à une irradiation potentiellement nocive. Les données cliniques seront donc obtenues avec une qualité minimale, permettant tout juste au médecin d’observer les structures d’intérêt, sans excès de zèle. Rendre l’image plus lisible, soulager le praticien ou faciliter un traitement automatisé est donc un enjeu clef pour les constructeurs : nous proposons ici un très bref aperçu des approches possibles, en nous concentrant sur l’une d’elles, le seuillage en bases d’ondelettes.

On modélisera les détériorations par un bruit additif s : étant donné une image propre f , on suppose que le jeu de données bruité est donnée par :

$$f = f_0 + s, \tag{1}$$

où s est une variable aléatoire de loi connue. En pratique, la nature du bruit dépend de la modalité d’imagerie utilisée, comme illustré Figure 1. Gaussien et blanc (i.i.d.) dans les cas les plus proches de la physique (phase en IRM, par exemple), il peut être bien plus complexe à analyser si un processus de reconstruction sophistiqué est appliqué entre les mesures des capteurs et l’affichage de l’image finale : la transformée de Radon utilisée dans les scanners CT est un cas d’école.

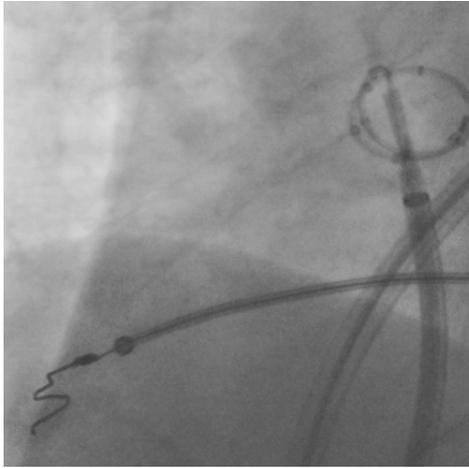
On se limitera ici au cas le plus simple à traiter mathématiquement : celui du bruit blanc gaussien où les pixels sont perturbés par des variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

2 Méthodes linéaires, filtrage

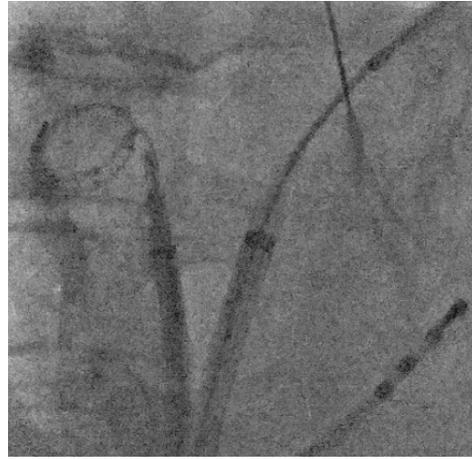
La manière la plus simple de débruiter une image est d’opérer en chaque point à un moyennage local, les pondérations étant données par un *filtre*. Si ce dernier reste constant sur toute l’image, on a alors simplement affaire à un opérateur de convolution, qui peut être implémenté très rapidement en parallèle – de nos jours, sur carte graphique.

2.1 Un exemple de méthode historique : le filtrage adaptatif

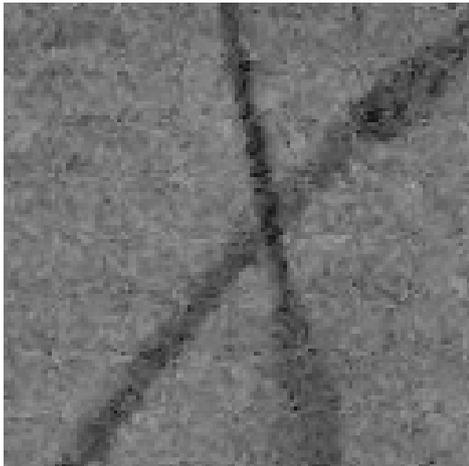
De manière plus sophistiquée, on peut vouloir choisir en chaque point un filtre adaptée à la structure locale de l’image. Si, dans une région lisse et isotrope, un filtre “floutant” est un bon choix, conserver une arête bien nette implique une certaine prudence dans la délimitation du support de filtre : l’idée est illustrée Figure 2.



(a) Fluoroscopie à forte dose.



(b) Fluoroscopie à faible dose.

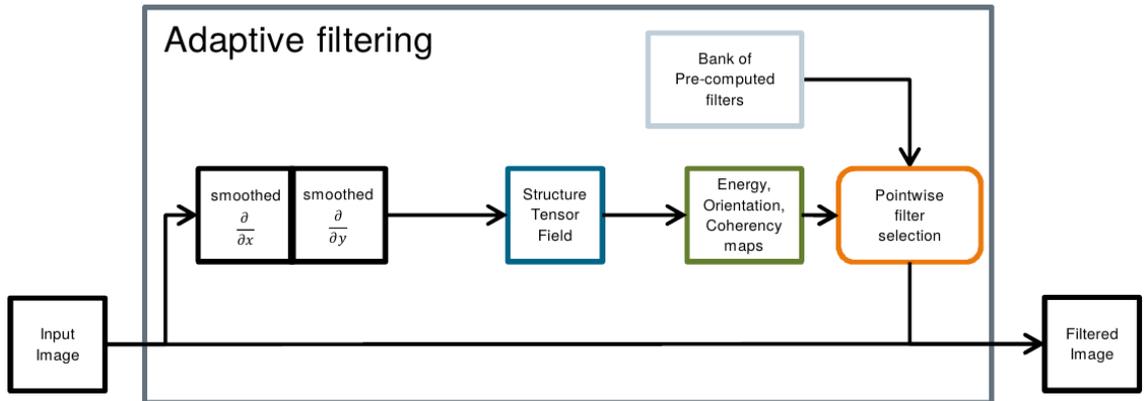


(c) Zoom permettant d'observer le motif en grille du bruit sur les fluoroscopies - dû à la répartition des capteurs.

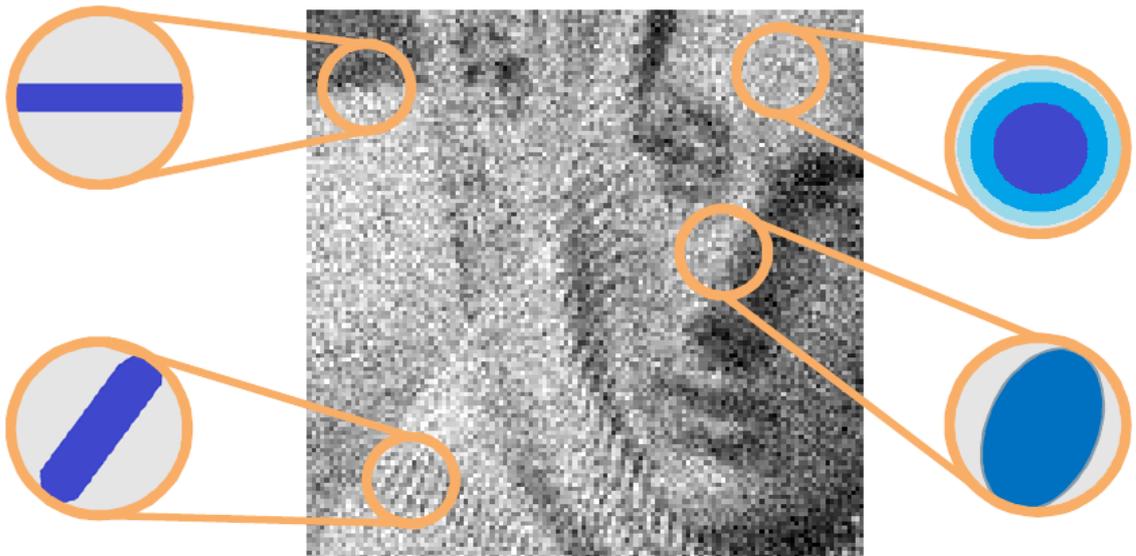


(d) Tranche bruitée d'une acquisition par scanner CT. La reconstruction par inversion d'une transformée de Radon induit un bruit "en lignes" parallèles dues aux projections dans toutes les directions.

FIGURE 1 – Quelques exemples de données médicales. L'objectif de notre travail est de retrouver une qualité d'image proche de (a) à partir de (b), acquise avec une plus faible dose en rayons X, et donc moins de risques pour le patient. Comme on le voit sur (c) et (d), la modélisation de la détérioration par un bruit blanc gaussien additif (non structuré) n'est dans bien des cas pratiques qu'une première approximation.



(a) Flot de contrôle.



(b) À l'aide d'un descripteur de structure (tenseur), un filtre adapté est choisi en chaque position.

FIGURE 2 – Illustrations schématisant l'action d'un pipeline de filtrage adaptatif typique.

2.2 La Transformée de Fourier Discrète

Pour comprendre ces filtres et autres opérateurs de convolution, il est de bon ton d'introduire la transformée de Fourier d'une image : on se souvient en effet que celle-ci diagonalise les convolutions dans \mathbb{R}^d . Attention toutefois : nous travaillons ici dans un cadre discret, et nos images sont définies sur un domaine fini $\llbracket 1, l_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, l_d \rrbracket$ ce qui impose de prendre quelques précautions.

Examinons donc le problème en dimension 1 – la transformée de Fourier étant séparable, cela n'est guère limitatif. On voit Figure 3 qu'échantillonnage et périodisation sont des opérations duales par transformée de Fourier. Formellement, le résultat clé est que la transformée de Fourier du peigne de Dirac III_1 est $\text{III}_{2\pi}$, et la dualité entre produit point-par-point et produit de convolution.

Aussi, travaillant avec des images échantillonnées sur une grille finie, on périodisera cette dernière par commodité : les transformées de Fourier de nos images sont alors des images de même taille.

La Transformée de Fourier Rapide Finalement, la transformée de Fourier discrète peut s'écrire en 1D comme un produit matriciel entre un opérateur carré harmonique et le vecteur des échantillons sur une période $\llbracket 0, l - 1 \rrbracket$ de f :

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}(0k) \\ \hat{f}(1k) \\ \vdots \\ \hat{f}((l-1)k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{0 \cdot 0} & w^{0 \cdot 1} & \dots & w^{0 \cdot (l-1)} \\ w^{1 \cdot 0} & w^{1 \cdot 1} & \dots & w^{1 \cdot (l-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w^{(l-1) \cdot 0} & w^{(l-1) \cdot 1} & \dots & w^{(l-1) \cdot (l-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(l-1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec $k = 2\pi/l$ la fréquence fondamentale et $w = e^{-ik}$ son analogue complexe.

Un algorithme naïf requerrait $O(l^2)$ opérations, mais on sait depuis 1965 que grâce à sa structure harmonique, l'opérateur $(w^{n \cdot m})_{n,m}$ peut être factorisé en produits parcimonieux, ce qui mène à un algorithme diviser pour régner en $O(l \log(l))$ opérations : la clé de l'utilisation pratique de la transformée de Fourier, qui se généralise aux dimensions supérieures par séparabilité [2].

En quelques paragraphes, nous avons présenté la transformée de Fourier discrète (périodique) : il s'agit d'un outil et d'un exemple fondamental, le premier *changement de représentation* auquel seront comparé tous les autres.

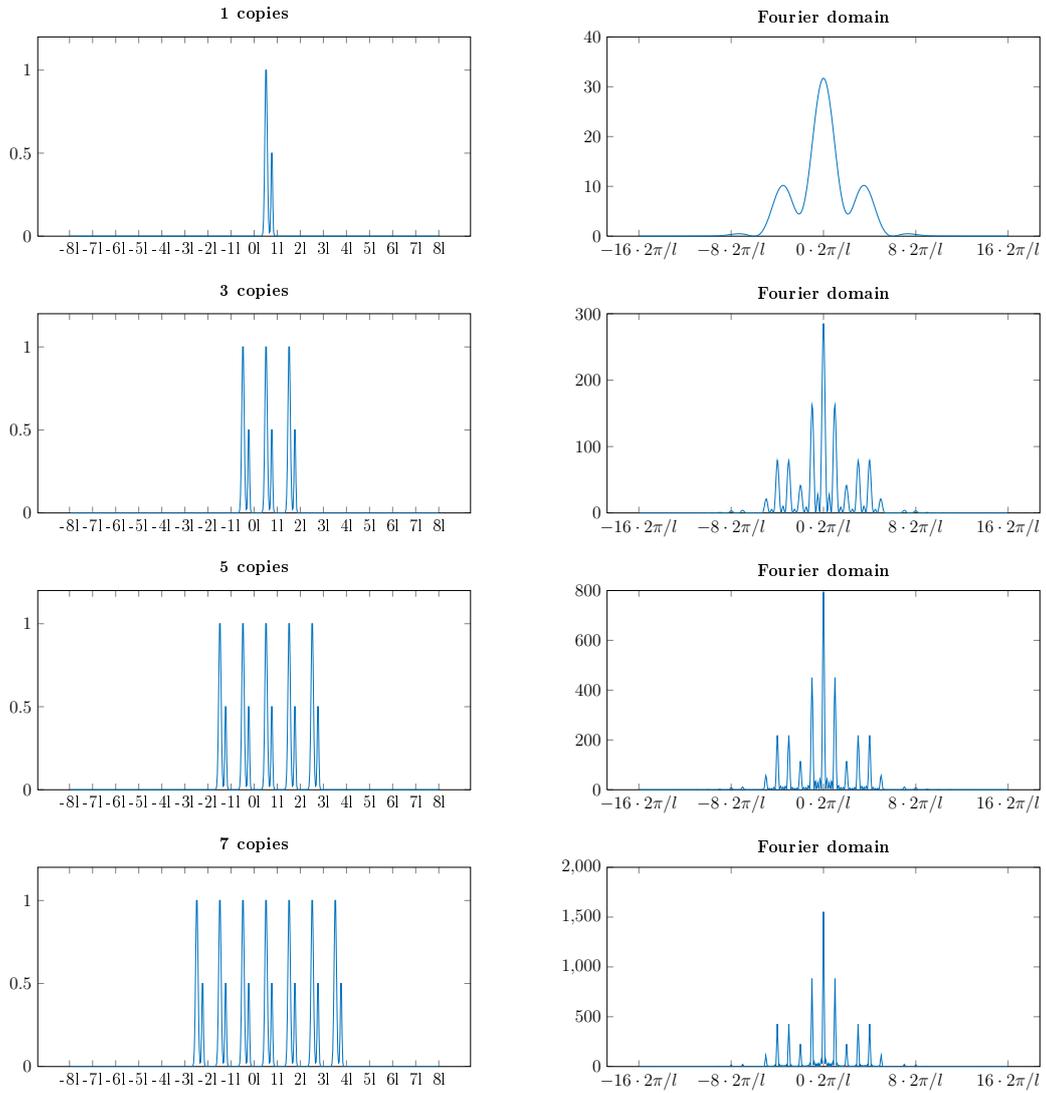


FIGURE 3 – De la transformée aux séries de Fourier par périodisation. En pavant le domaine spatial avec des copies d’une fonction à support compact, on échantillonne sa transformée de Fourier sur le spectre du pavé correspondant.

3 Débruitage non-linéaire par seuillage d'une représentation parcimonieuse

À l'aide de la transformée de Fourier, on peut aisément et complètement décrire toutes les opérations de filtrage linéaires : si $f = f_0 + s$ est une image bruitée, g un filtre, on a

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}. \quad (3)$$

Le travail de sélection du filtre consiste alors à choisir $\widehat{g}(\omega)$ en fonction du rapport signal-sur-bruit entre les puissances $|\widehat{f_0}|^2$ et $|\widehat{s}|^2$, estimées a priori – dans le cas d'un bruit blanc, on a par exemple $|\widehat{s}|^2 = \sigma^2$.

Comme illustré Figure 5, il est possible d'aller bien au delà de ces estimées linéaires qui se limitent en général à de simples filtres passe-bas. Notre objectif est d'utiliser notre connaissance a priori de la *structure* des images propres (présence de contours abrupts délimitant des zones lisses, etc.) pour discriminer le signal original du bruit, déstructuré.

À la recherche d'une représentation pertinente Comme on l'a vu plus haut, la transformée de Fourier permet de passer de la traditionnelle *somme de diracs* à la représentation en *somme d'harmoniques*, complètement délocalisées. Aucune de ces deux visions n'est vraiment adapté à notre problème : les éléments d'intérêt qui font sens sur une image (un coin, une arête, un dégradé, etc.) vivent en effet dans un entre-deux, étant localisés à la fois en espace (position) et en fréquence (netteté). Pensons, par analogie, à une piste musicale : un fichier échantillonné “.wav” présente une suite incompréhensible de pics, tandis que sa transformée de Fourier mélange les instants, dissimulant toute l'information temporelle dans des décalages de phase inintelligibles... La bonne représentation, lisible, traitable, est la *partition*, dans laquelle une musique est décrite comme une succession de *notes*, aux hauteurs et durées finies, non nulles, déterminées.

3.1 Cahier des charges d'une bonne transformée

Ces vingt dernières années, un grand sujet de recherche a donc été la quête d'une “bonne” représentation, d'un *dictionnaire* de “notes” adapté aux images, naturelles ou médicales. Avant de présenter les solutions proposées dans la littérature, listons une suite de propriétés qui doivent être vérifiées pour permettre un usage pratique.

Banque de filtres Tout d’abord, notre représentation – ou *transformée* – doit être facile à calculer, pour permettre un traitement en temps réel des données. On se restreint donc aux *banques de filtres linéaires* : on choisira avec soin une famille de filtres linéaires $(\varphi_i)_{i \in I}$, avant de prendre pour représentation d’une image f la suite des réponses $(\langle f, \varphi_i \rangle)_{i \in I}$ calculées par convolution, ou produit dans le domaine de Fourier.

Dans le cadre fini où nous travaillons, on peut donc voir notre opérateur comme une matrice Φ , et la représentation de f comme un vecteur colonne

$$\tilde{f} = \Phi f. \quad (4)$$

Complétude et tightness Après traitement, on doit pouvoir reconstruire f à partir de \tilde{f} . On demande donc que Φ possède un inverse à gauche, et soit donc de rang maximal – avec possiblement plus de lignes que de colonnes. Comme on souhaite de plus pouvoir calculer cet inverse efficacement, on requiert souvent une propriété supplémentaire, la *tightness* :

$$\exists a \in \mathbb{C}, \Phi^* \Phi = a \text{Id}. \quad (5)$$

Normalisation et décorrelation De manière complémentaire, on demande que les filtres φ_i , les lignes de Φ , aient une norme L^2 unitaire. Cela peut compliquer l’obtention de la *tightness*, mais assure la distribution uniforme d’un bruit blanc Gaussien sur toutes les composantes de notre représentation : si f_0 est une image corrompue par un tel bruit blanc s de variance σ^2 , on aura

$$\widetilde{f_0 + s} = \Phi(f_0 + s) \quad (6)$$

$$= \Phi f + \Phi s \quad (7)$$

$$= \tilde{f} + \tilde{s}, \quad (8)$$

où \tilde{s} est lui-même un bruit Gaussien de variance σ^2 . Si, de plus, ses composantes sont indépendantes, il est légitime de débruiter la représentation uniformément et ligne-par-ligne, le cas le plus simple à comprendre et implémenter efficacement. En pratique, et avec un opérateur rectangulaire, une indépendance totale des lignes de $\tilde{s} = \Phi s$ est impossible à obtenir. On se contente donc d’une décorrelation maximale, obtenue en un certain sens géométrique si Φ est *tight* [5].

3.2 Les ondelettes, résultats de Donoho

Parcimonie Jusqu’ici, aucune des propriétés requises n’est vraiment contraignante : la transformée de Fourier discrète les vérifie

toutes en tant que décomposition sur une base orthonormale. Pour aller plus loin, le véritable critère est celui de la *parcimonie* : pour des images f_0 prises dans une classe d'intérêt (ici, celle des scans médicaux), on souhaite que Φf_0 possède aussi peu de coefficients non-nuls que possible. Étant donnée une telle transformée parcimonieuse, on peut alors utiliser des méthodes simples mais efficaces de débruitage non-linéaire comme le seuillage doux proposé par Donoho [3].

L'idée sous-jacente est la suivante : supposons que notre image propre f_0 définie sur X possède une représentation parcimonieuse Φf_0 avec au plus $M \ll |X|$ coefficients non-nuls : modulo une propriété de conservation d'énergie (vérifiée dans le cas des *tight frames*), ces coefficients auront nécessairement de fortes valeurs. De l'autre côté, et si la transformée est bien construite, ajouter un bruit déstructuré de variance σ^2 corrompra les composantes de Φf_0 uniformément, l'énergie du bruit étant étalée sur le domaine transformé tout entier. Faire la distinction entre information structurée et bruit est alors chose aisée, les grands coefficients provenant selon toute probabilité du signal sous-jacent, tandis que ceux plus modestes proviennent du bruit seul.

Seuillage doux Idéalement, on aimerait projeter la représentation bruitée $\Phi f = \Phi(f_0 + s)$ sur le sous-espace V de dimension M engendré par les vecteurs de base qui explique la plus grande part de l'énergie, c'est-à-dire qui minimise l'erreur

$$E(V) = \|f - p_V(f)\|_2^2. \quad (9)$$

En pratique, ce problème combinatoire est NP-complet, et ne saurait être résolu efficacement. On se contente donc typiquement de trouver

$$p(f) = \arg \min_x \|f - x\|_2^2 + \lambda \|x\|_1, \quad (10)$$

avec λ un paramètre (le seuil). Sans rentrer dans les détails d'un énoncé qui ne sont pas utiles en pratique – et nécessiteraient une longue introduction des risques associés aux estimateurs –, on peut montrer que l'estimée est obtenue en appliquant coordonnée par coordonnée un *seuillage doux* – voir Figure 4 –, et qu'il est quasi-optimal parmi les estimateurs coordonnée-par-coordonnée pour une valeur du seuil bien choisie – les théorèmes originaux sont dus à Donoho [3], mais la théorie s'est bien développé depuis : on consultera avec profit le chapitre "Débruitage" de [6].

En utilisant cette méthode, le bruit n'est pas complètement enlevé, car les forts coefficients étaient eux aussi corrompus. Mais l'énergie du bruit répartie sur ceux-ci n'est plus qu'un simple multiple de $M\sigma^2$ au lieu du $|X|\sigma^2$ initial, tout en restant comparé à l'énergie du signal

initial $\|f_0\|^2$: quelle que soit la méthode de seuillage choisie sur la transformée, la perte d'énergie résultante ne saurait guère être plus grande que celle engendrée dans le domaine spatial.

Les ondelettes Construire une transformée parcimonieuse : cela revient à capturer dans un dictionnaire l'essence de la structure d'une classe de données. La transformée de Fourier, par exemple, ne convient pas du tout : les transitions nettes, les bords, engendrent en effet des coefficients importants sur toute la largeur du spectre. Ces dernières décennies, un effort considérable a donc été fourni pour élaborer une transformée qui décrive des bords réguliers avec aussi peu de coefficients que possible. Le choix de loin le plus populaire est celui des ondelettes, qui combine simplicité, flexibilité et efficacité : son principe fondamental est de choisir les filtres φ_i comme des versions translatées et zoomées d'une poignée de filtres générateurs w_1, \dots, w_p .

En travaillant avec un ensemble d'échelles S et de positions Υ , notre banque de filtres peut alors être écrite

$$(\varphi_i)_{i \in I} = (w_{s,y}^p)_{(p,s,y) \in \llbracket 1, P \rrbracket \times S \times \Upsilon} \quad (11)$$

où

$$w_{s,y}^p : x \mapsto \frac{1}{s^{d/2}} w^p\left(\frac{x-y}{s}\right) \quad (12)$$

est la $p^{\text{ième}}$ ondelette à l'échelle s et position y , de norme L^2 égale à $\|w^p\|_2$.

Le faible nombre p de formes de base et la structure multi-échelle permettent de calculer une telle transformée de manière très efficace, avec de nombreuses propriétés théoriques compilées dans [6].

L'exemple des curvelets Les images présentent des structures orientées, et leur compréhension est cruciale pour tout processus de débruitage efficace. Des familles d'ondelettes ont donc été spécialement conçues avec des filtres orientés, capable d'engendrer des décompositions parcimonieuses à un coup raisonnable. Les curvelets, introduite par Candès et Donoho dans [1] et illustrées Figure 6 vérifient ainsi l'estimée

$$E \left[\|f_0 - p(f)\|^2 \right] = O(|\log(\sigma)|^2 \sigma^{4/3}) \quad (13)$$

quand la variance σ^2 du bruit tend vers 0, pour f une image C^2 par morceaux avec bords C^2 .

3.3 Les ondelettes orientables

Plutôt que suivre la piste des curvelets en discrétisant les directions et pavant le plan de Fourier, on peut aussi s'intéresser aux familles

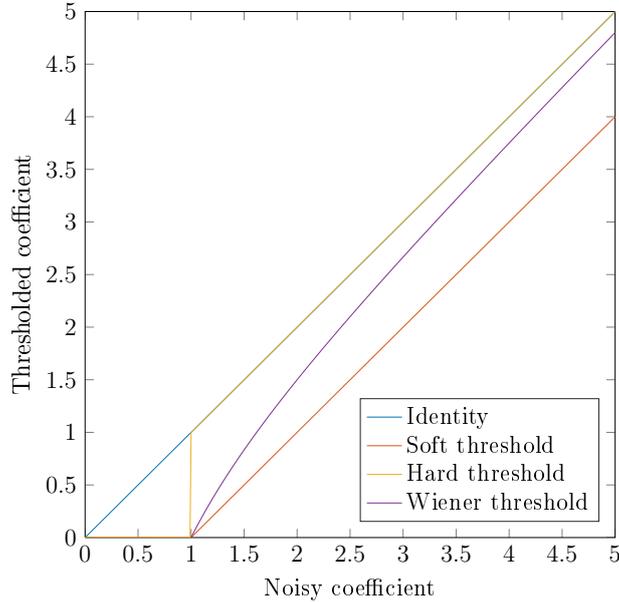


FIGURE 4 – Rampes de seuillage, $T = 1$. Le seuillage doux correspond à une pénalité “pro-parcimonie” en $\|x\|_1$, les deux autres sont proposées à titre d’exemple, et utilisées en pratique.

d’ondelettes construites à partir de filtres *orientables*, c’est à dire telles que pour toute orientation θ , on puisse synthétiser les filtres “tournés” $w^1 \circ R_\theta, \dots, w^p \circ R_\theta$ comme combinaisons linéaires des filtres originaux w^1, \dots, w^p . La définition est illustrée Figure 7, et l’intérêt de la notion pour le débruitage d’images expliqué Figure 8. On développera en fin de soutenance la construction et l’utilisation de familles d’ondelettes orientables adaptées aux images d’intérêt, en se basant sur les travaux de Freeman et Adelson [4], Unser, Van De Ville et Chenouard [7, 8], abordés au cours de ma thèse de M2.

4 Ouvertures et conclusion

Au cours de cette introduction, nous avons esquissé un très bref panorama du monde du débruitage d’images médicales, nous concentrant sur une des approches les plus prometteuses, celle des ondelettes. Gardons à l’esprit qu’en matière de débruitage, aucun résultat définitif n’est à attendre, et que la comparaison de méthodes a priori fondamentalement distinctes reste une part essentielle du travail du chercheur. Aussi n’avons-nous pas trop insisté sur les théorèmes d’optimalité et d’estimations asymptotiques qui peuvent être démontrés selon les fa-

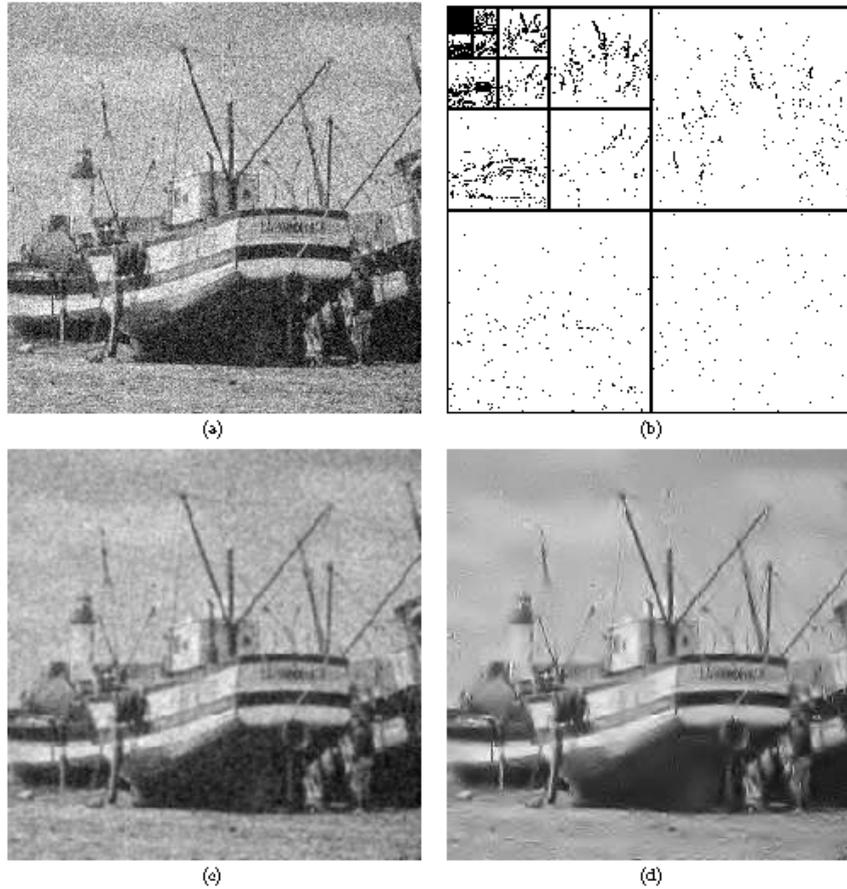


Fig. 1.2. A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. (a): Noisy image X . (b): Noisy wavelet coefficients above threshold, $\|X, \psi_{j,k}\| \geq T$. (c): Linear estimation $X * f$. (d): Non-linear estimator recovered from thresholded wavelet coefficients, over several translated bases.

FIGURE 5 – Illustration schématique d'un algorithme de seuillage dans une base redondante d'ondelettes séparables. Tirée de [6].

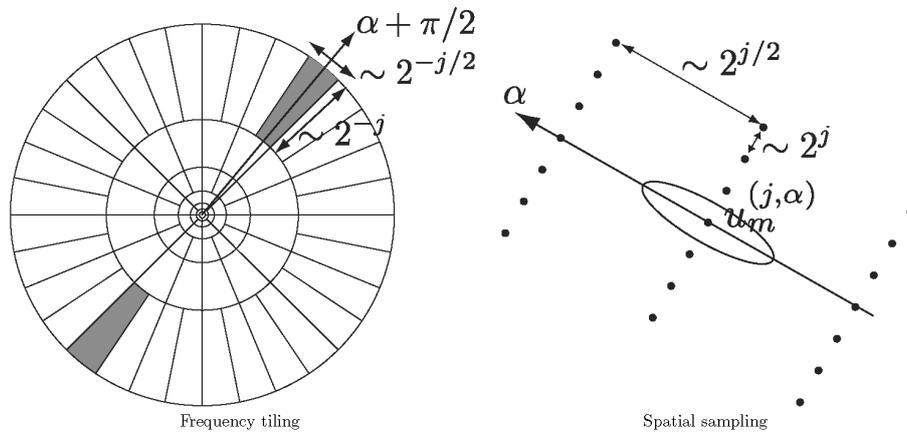


Fig. 5.12. A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed. Left: Curvelet polar tiling of the frequency plane with parabolic wedges. Right: curvelet sampling grid $u_m^{(j, \alpha)}$ at a scale 2^j and direction α .

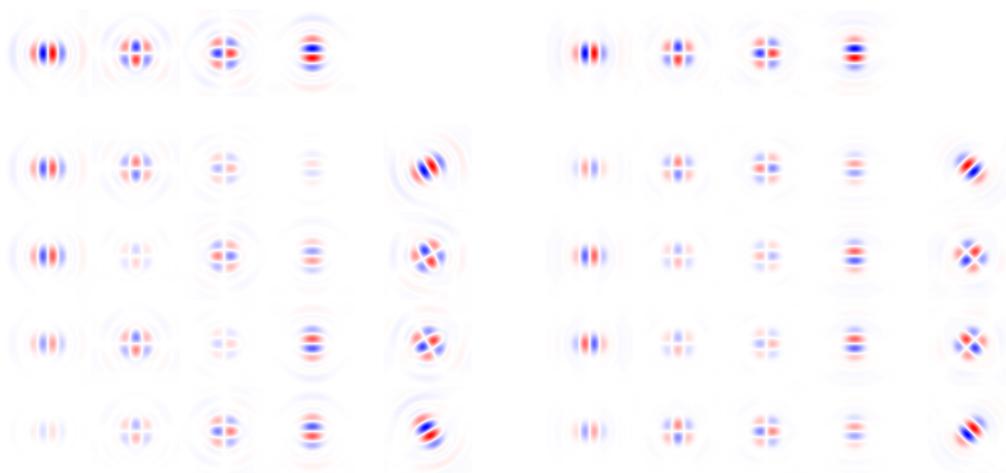
FIGURE 6 – Bases de Curvelets. Le plan de Fourier est pavé et le domaine angulaire, discrétisé. Tiré de [6].

milles, et préféré mettre l'accent sur les principes, contraintes et idées qui guident le choix d'une transformée.

Si, dans le cadre de cet exposé, nous nous sommes limité au cas des fonctions à valeurs réelles, soulignons aussi les problèmes posés par les modalités d'imagerie récentes aux espaces d'arrivées plus exotiques, telles les séquences d'IRM de *diffusion*, aux valeurs tensorielles. Le monde de l'imagerie médicale est source de nombreux défis, qu'il importe de relever.

Références

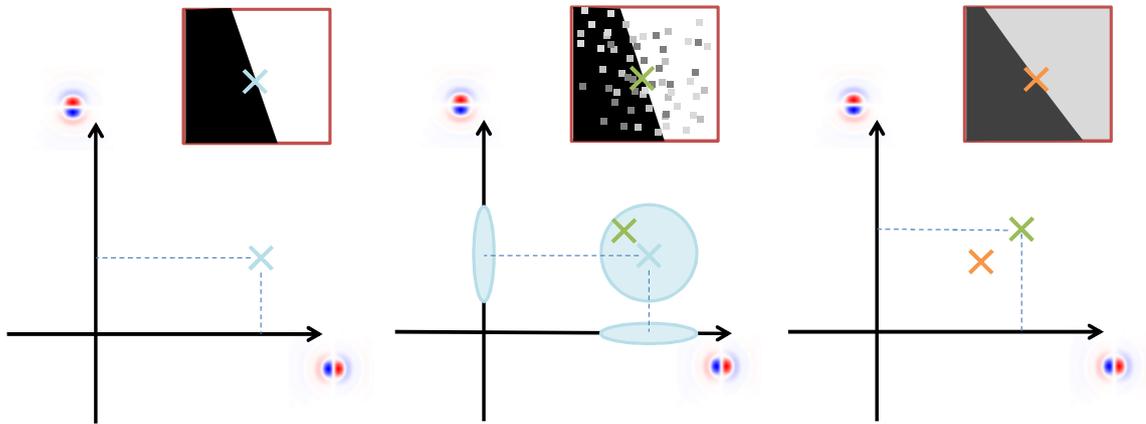
- [1] Emmanuel J Candes and David L Donoho. Recovering edges in ill-posed inverse problems : Optimality of curvelet frames. *Annals of statistics*, pages 784–842, 2002.
- [2] James W Cooley and John W Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90) :297–301, 1965.
- [3] David L Donoho. Denoising by soft-thresholding. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 41(3) :613–627, 1995.
- [4] William T. Freeman and Edward H Adelson. The design and use of steerable filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence*, (9) :891–906, 1991.
- [5] Jelena Kovačević and Amina Chebira. An introduction to frames. *Foundations and Trends in Signal Processing*, 2(1) :1–94, 2008.



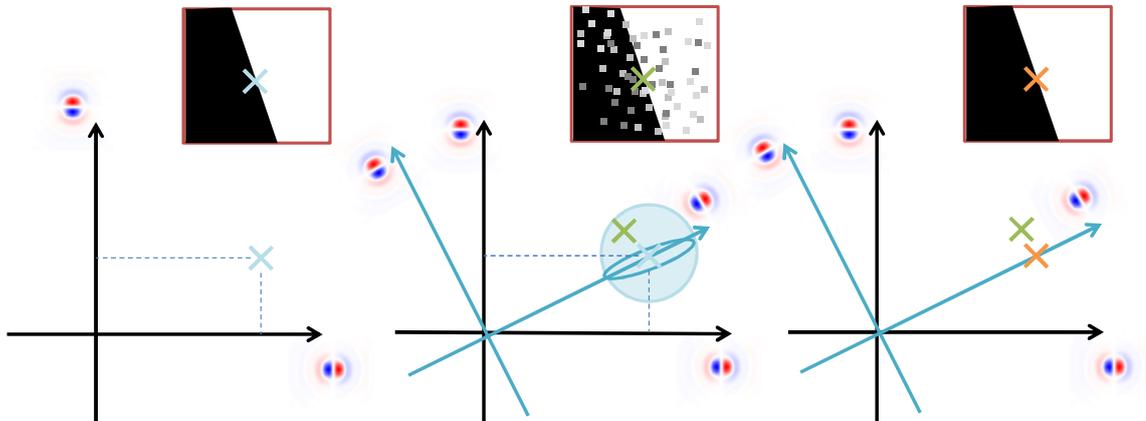
(a) Ondelettes de Meyer-Riesz d'ordre $N = 3$ tournées à un angle $\theta = \pi/6$.

(b) Ondelettes de Simoncelli-Riesz d'ordre $N = 3$ tournées à un angle $\theta = 3\pi/4$.

FIGURE 7 – Orientabilité de deux familles d'ondelettes. Sur la première ligne, les filtres “originaux” - similaires à des dérivées directionnelles d'ordre 3. Au milieu, la matrice des coefficients d'orientation : les analogues orientés (à droite) des filtres cartésiens sont simplement obtenus en sommant ses lignes, c'est à dire en prenant une combinaison linéaire des filtres de base.



(a) Avec des ondelettes séparables standards. De gauche à droite : une frontière *propre*, son analogue *bruité*, et l'estimation *débruitée*. Un bruit isotrope corrompt chaque orientation de manière similaire : le patch bruité, représenté par la croix verte, se trouve aléatoirement dans un voisinage du patch original – croix bleue –, avec des coefficients forts sur chaque coordonnée. Dans le cadre d'un seuillage d'ondelette, on ne peut guère faire mieux qu'atténuer indistinctement tous ces coefficients. Au final, l'orientation a été corrompue et l'atténuation sur chaque coordonnée nous a fait perdre beaucoup d'énergie.



(b) Avec des ondelettes orientables. De gauche à droite : une frontière *propre*, son analogue *bruité*, et l'estimation *débruitée*. Une estimée extérieure (fiable) de l'orientation est utilisée par le passage de la base d'ondelettes *cartésienne* (en noir) à sa version convenablement *orientée* (en bleu). Dans cette dernière, le signal possède une représentation parcimonieuse, tandis que le bruit isotrope reste toujours aussi épars : le seuillage se comporte de manière bien plus intéressante, comme une projection sur l'axe privilégié. Au final, moins d'énergie structurée est perdue (une seule atténuation au lieu de deux), et l'orientation estimée à été encouragée dans le résultat final.

FIGURE 8 – Diagrammes illustrant la manière dont les ondelettes orientables améliorent la parcimonie tout en permettant de promouvoir une information a priori (le champs d'orientation, estimé de manière fiable). Les patches sont représentés dans le domaine d'ondelettes par des points dont les coordonnées sont les réponses de filtres en leurs centres.

- [6] Stephane Mallat. *A wavelet tour of signal processing : the sparse way*. Academic press, 2008.
- [7] Michael Unser and Nicolas Chenouard. A unifying parametric framework for 2d steerable wavelet transforms. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(1) :102–135, 2013.
- [8] Michael Unser, Nicolas Chenouard, and Dimitri Van De Ville. Steerable pyramids and tight wavelet frames in l_2 (rd). *Image Processing, IEEE Transactions on*, 20(10) :2705–2721, 2011.