

Introduction au domaine de recherche : Invariants
de type fini en théorie des nœuds

David Leturcq
sous la direction de Christine Lescop

2015-2016

Table des matières

1	Motivations de la théorie des nœuds	2
2	Premiers exemples d'invariants des nœuds	2
2.1	Mouvements de Reidemeister	2
2.2	Un premier invariant défini à partir des diagrammes : le polynôme d'Alexander	4
2.3	Relations d'écheveau, et polynôme de Jones	4
3	Invariants de type fini des nœuds	5
3.1	Définition	5
3.2	Diagrammes de cordes	6
3.3	Intégrale de Kontsevich	7
3.4	Invariant universel de Chern-Simons	9
3.5	Relation entre les invariants de Kontsevich et de Chern-Simons . . .	11
4	Cas des dimensions supérieures	11
4.1	Diagrammes de Jacobi	11
4.2	Espaces de configurations associés aux diagrammes de Jacobi	12
4.3	Invariants de Bott-Cattaneo-Rossi	13
5	Bibliographie	14

1 Motivations de la théorie des nœuds

La théorie des nœuds consiste en un mot à classer certains objets (les nœuds) pour une certaine relation d'équivalence (l'isotopie). Dans le cas le plus simple, étudié en premier lieu, les nœuds sont définis de la manière suivante, et regardés à isotopie près :

Définition 1.1. *On appelle nœud un plongement ψ de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 (c'est à dire une injection lisse de différentielle injective, ce qui, en dimension 1 comme ici revient à un arc paramétré fermé sans point double où le vecteur vitesse ne s'annule jamais).*

On appelle isotopie une famille $(\psi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ de nœuds, lisse en t . On dit que deux nœuds ψ et ψ' sont isotopes, s'il existe une isotopie $(\psi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ telle que $\psi_0 = \psi$ et $\psi_1 = \psi'$.

Un des objectifs de la théorie des nœuds de \mathbb{R}^3 est de décrire la classification des nœuds de \mathbb{R}^3 à isotopie près. Pour cela on introduit des invariants d'isotopie défini ainsi :

Définition 1.2. *Soit F une fonction définie sur l'ensemble des nœuds. On dit que F est un invariant d'isotopie des nœuds si pour tous nœuds isotopes ψ_0 et ψ_1 , on a $F(\psi_0) = F(\psi_1)$. En particulier, par contraposition, si il existe un invariant distinguant deux nœuds (on dit alors que l'invariant distingue les nœuds), alors ils ne sont pas isotopes.*

On voit donc que la qualité d'un invariant sera essentiellement dans sa capacité à distinguer des nœuds non isotopes. Un invariant prenant une valeur différente sur chaque classe d'isotopie des nœuds sera dit total. Un invariant total permet alors de donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux nœuds soient isotopes. De tels invariants ne sont pour l'instant pas connus.

On introduira en partie 3 la notion d'invariants de *type fini* qui contient en un certain sens les polynômes d'Alexander, de Jones, et nombre d'invariants quantiques (définis par Turaev dans). On construira alors un certain nombre d'invariants *universels*, qui contiennent seuls toute l'information donnée par les invariants de type fini (i.e. qui distinguent tous les nœuds qui sont distingués par au moins un invariant de type fini).

2 Premiers exemples d'invariants des nœuds

2.1 Mouvements de Reidemeister

Avant de construire nos invariants, nous allons introduire les diagrammes de nœuds. Il s'agit en fait de ramener un problème de dimension 3 à un problème plan, ce qui sera très fructueux par la suite.

Définition 2.1. On appelle *diagramme orienté de nœud* la donnée d'une immersion $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :

- les points multiples sont doubles et en nombre fini,
- les deux branches s'intersectant en un point double sont toujours transverses,
- on a une information sur les deux branches en chaque point double, de sorte qu'on puisse dire que l'une passe "sous" le croisement, et l'autre "dessus", ce qui se traduira sur le dessin en interrompant la branche passant sous le croisement.

Comme \mathbb{S}^1 est orienté, on dispose d'une orientation sur notre diagramme.

On relie les nœuds et les diagrammes de nœuds par la proposition suivante :

Proposition 2.2. Pour tout nœud ψ , il existe un nœud ψ' isotope à ψ dont la projection sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est un diagramme orienté de nœud.

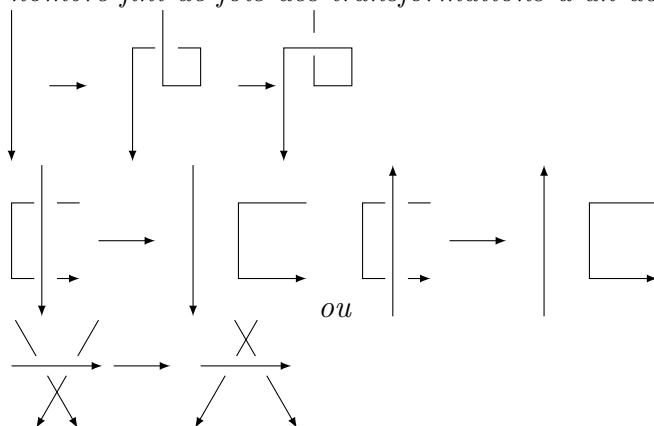
Chaque diagramme orienté de nœud permet de reconstruire un nœud de \mathbb{R}^3 .

Pour le premier point, il s'agit en fait d'une application du lemme de Sard, et le nœud ψ' peut même être pris arbitrairement proche de ψ . Pour le second, au voisinage de chaque croisement, on remplace le point double par deux branches disjointes pour obtenir un plongement de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 .

La relation d'isotopie sur les nœuds va alors définir une relation d'équivalence sur les diagrammes, en disant simplement que deux diagrammes sont équivalents si et seulement si les nœuds qu'ils définissent sont isotopes. On a alors le théorème suivant [11] qui permet de prouver qu'une fonction définie sur les nœuds est invariante de manière pratique.

Théorème 2.3. (Reidemeister, 1927)

Deux nœuds orientés sont isotopes si et seulement si on peut passer de tout diagramme de l'un à tout diagramme de l'autre par isotopie plane, et en appliquant un nombre fini de fois des transformations d'un des trois types suivants :



La dernière transformation préserve le type du croisement des branches représentées obliques, et s'adapte suivant les orientations initiales.

2.2 Un premier invariant défini à partir des diagrammes : le polynôme d'Alexander

Le théorème 2.3 permet notamment de donner la définition pratique suivante du polynôme d'Alexander, introduit d'abord en 1923, par des méthodes utilisant l'homologie et la théorie des revêtements.

Définition 2.4. Soit ψ un nœud. On considère un diagramme orienté de ψ , ayant n croisements c_1, \dots, c_n , et séparant donc le plan en $n + 2$ régions r_1, \dots, r_{n+2} .

On construit alors la matrice dont les colonnes sont indexées par les r_j , et les lignes par les c_i et telle que le coefficient de (r_i, c_j) soit donné par :

- 0 si r_i n'est pas adjacente à c_j ,
- $-t$ si r_i est la région qui est à gauche avant le croisement,
- 1 si r_i est la région qui est à droite avant le croisement,
- t si r_i est la région qui est à gauche après le croisement,
- -1 si r_i est la région qui est à droite après le croisement,

Le polynôme d'Alexander est obtenu en supprimant de la matrice deux colonnes correspondant à des régions adjacentes, et en prenant le déterminant. Il est bien indépendant du choix des deux colonnes retirées, à multiplication par $\pm t^n$ près. On peut donc le définir sans ambiguïté en lui demandant d'avoir un coefficient dominant positif, et de ne pas être divisible par t^n .

$$\begin{array}{c|c} t & -1 \\ \hline -t & 1 \end{array}.$$

On résume la règle ci-dessus par le dessin suivant :

On montre que le polynôme en question reste le même quand on effectue chacun des mouvements de Reidemeister, donc on a le théorème suivant, prouvé initialement dans [1] :

Théorème 2.5. (Alexander, 1923) Le polynôme d'Alexander est un invariant d'isotopie des nœuds.

2.3 Relations d'écheveau, et polynôme de Jones

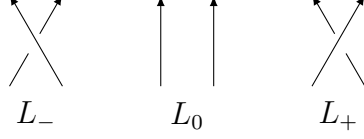
Définition 2.6. On appelle entrelacs la réunion d'un nombre fini de nœuds disjoints de \mathbb{R}^3 , c'est à dire un plongement de n cercles disjoints dans l'espace. Si L est un entrelacs, on définit de même qu'en 2.1 les diagrammes orientés d'entrelacs.

Jones a montré dans [7] le théorème suivant :

Théorème 2.7. (Jones, 1984)

Il existe un unique invariant d'entrelacs, noté $V_L(t)$, tel que :

- V_L est le polynôme 1 si L est le nœud trivial (un cercle de \mathbb{R}^3),
- si $L_0, L_-,$ et L_+ sont trois entrelacs ne différant que sur un petit disque où



on a les comportements L_-, L_0, L_+ , on a alors :

$$(\sqrt{t} - \sqrt{t^{-1}}).V_{L_0}(t) = t^{-1}V_{L_+}(t) - t.V_{L_-}(t) \quad (1)$$

Cet invariant est appelé polynôme de Jones de l'entrelac, et c'est un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{t}, \sqrt{t^{-1}}]$. La relation (1) s'appelle relation d'écheveau du polynôme de Jones.

3 Invariants de type fini des nœuds

3.1 Définition

La notion d'invariant de type fini sert à généraliser la notion de fonction polynomiale, en trouvant un équivalent de la caractérisation des polynômes par $\exists n \geq 0, P^{(n)} = 0$.

Définition 3.1. Soit \mathcal{K} l'ensemble des nœuds de \mathbb{R}^3 . Soit K une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^3 avec n points multiples (c_1, \dots, c_n) qui sont doubles et transverses, ce que l'on nommera dans la suite nœud n -singulier. Pour $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, on construit le nœud $K_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n}$ en remplaçant chaque point double $c_i = \begin{smallmatrix} \nearrow \\ \searrow \end{smallmatrix}$ par $\begin{smallmatrix} \nearrow \\ \nearrow \end{smallmatrix}$ si $\epsilon_i = +1$, ou $\begin{smallmatrix} \searrow \\ \searrow \end{smallmatrix}$ sinon.

On dit qu'un invariant $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est de type $< n$ si pour toute telle immersion, la somme $\sum_{(\epsilon_i) \in \{\pm 1\}^n} \epsilon_1 \cdots \epsilon_n \cdot F(K_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n})$ est nulle.

On définit exactement de même les invariants d'entrelacs de type fini.

Cette propriété est celle qui généralise bien la notion de degré d'un polynôme : en effet, un invariant de type 0, est par la définition précédente invariant par un changement de croisement. Comme on peut se ramener d'un nœud quelconque au nœud trivial par un nombre fini de changement de croisements, il sera donc constant. On retrouve ainsi le fait que les polynômes de degré 0 sont les fonctions constantes.

Définition 3.2. Les invariants de type fini des nœuds de \mathbb{R}^3 forment un \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{V} , dont les éléments sont aussi dits invariants de Vassiliev. L'espace vectoriel des invariants de type au plus n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{V} noté \mathcal{V}_n .

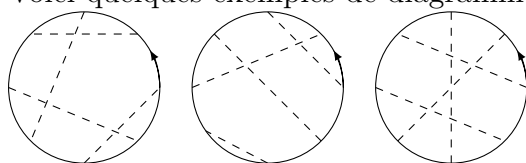
Théorème 3.3. (Birman-Lin) *Tous les coefficients d'un développement de Taylor de $V_L(e^x)$ (où V_L a été défini en théorème 2.7) sont des invariants de type fini.*

3.2 Diagrammes de cordes



On introduit ici un espace abstrait de diagrammes introduit par Bar-Natan [2].

Définition 3.4. *Soit m un entier naturel. On appelle diagramme de cordes de degré m , une classe d'équivalence de diagrammes formés d'un cercle orienté et de m cordes d'extrémités distinctes, où deux diagrammes sont équivalents, si on passe de l'un à l'autre en déplaçant les extrémités des cordes sans que deux extrémités ne se croisent. On dit qu'une corde est isolée, si elle ne rencontre aucune autre corde du diagramme.*

Voici quelques exemples de diagrammes de cordes de degré 4 :



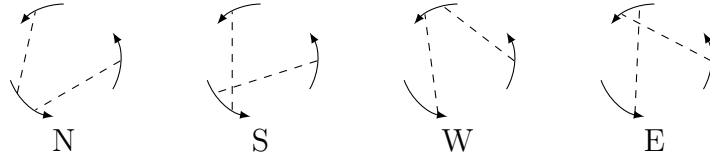
Définition 3.5. *On note \mathcal{D}_n le \mathbb{R} -espace vectoriel dont une base est formée par les diagrammes de cordes de degré n . À un nœud n -singulier K , on peut associer un diagramme de cordes de degré n de la manière suivante : on parcourt le nœud K dans le sens de l'orientation, et on place un point sur le cercle à chaque fois que l'on passe un des points doubles. On obtient alors $2n$ points sur le cercle orienté, et on relie deux points si et seulement si ils correspondent au même point double.*

Par exemple, le nœud 3-singulier  correspond au diagramme de cordes de degré 3 . On montre alors facilement la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit F un invariant de nœuds de type au plus n et K un nœud n -singulier. Alors $F(K)$ ne dépend que du diagramme associé à K , et est toujours nul si F est de type $\leq n - 1$.*

On peut donc associer à F une forme linéaire F^* dans \mathcal{D}_n^* . Elle vérifie les relations suivantes :

- Si D possède une corde isolée, $F^*(D) = 0$
- Si quatre diagrammes N, S, W, E sont comme sur la figure ci-dessous (où les parties non montrées sont identiques d'un diagramme à l'autre), alors on a : $F^*(W) - F^*(E) = F^*(N) - F^*(S)$



Il est alors logique d'introduire l'espace de diagrammes suivant :

Définition 3.7. On note \mathcal{A}_n l'espace vectoriel obtenu en quotientant \mathcal{D}_n par l'espace engendré par les diagrammes ayant une corde isolée et les $(S - E - N + W)$ où S , E , N , et W sont comme en proposition 3.6. On note également $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$.

La proposition 3.6 nous dit alors que F^* passe au quotient en une forme linéaire sur \mathcal{A}_n , et que cette forme est nulle si $F \in \mathcal{V}_{n-1}$.

On a ainsi construit une application :

$$\phi_n: \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{A}_n^*$$

Nous allons maintenant introduire l'intégrale de Kontsevich, qui permet de montrer que les applications ϕ_n définies ci-dessus sont en fait des isomorphismes, et de comprendre donc tous les invariants de Vassiliev des nœuds de \mathbb{R}^3 .

3.3 Intégrale de Kontsevich

On rappelle la définition d'une fonction de Morse sur une variété différentielle :

Définition 3.8. Soit M une variété, et $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse.

Une valeur critique de f est une valeur $y \in \mathbb{R}$ telle qu'il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$ pour lequel $d_x f = 0$.

On dit que f est de Morse si pour tout point critique x de f , la forme hessienne $d_x^2 f$ (ou de manière équivalente la matrice hessienne $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))_{1 \leq i, j \leq \dim(M)}$ dans n'importe quelle base) est non dégénérée.

On voit dans la suite \mathbb{R}^3 comme le produit $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, et on admet qu'à isotopie arbitrairement petite près, on peut supposer qu'un nœud K orienté (on appelle aussi nœud l'image d'un nœud ψ dans \mathbb{R}^3) admet la fonction altitude $(z, t) \in K \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mapsto t \in \mathbb{R}$ comme fonction de Morse. On dit alors que K est un nœud de Morse. Pour cette classe de nœud (qui suffit donc à représenter tous les nœuds à isotopie près), Kontsevich a introduit un invariant qui résume comme on le verra ensuite tous les invariants de Vassiliev de \mathbb{R}^3 .

Définition 3.9. Soit K un nœud de Morse orienté.

On note t_{\min} et t_{\max} ses valeurs extrémales. Pour t donné parmi les valeurs non critiques, on note $\zeta(t)$ l'ensemble des paires de points distincts $\{z, z'\}$ tels que

$(z, t) \in K$ et $(z', t) \in K$. On note $C_m^0(K)$ l'ensemble des m -uplets de valeurs régulières (t_1, \dots, t_m) avec $t_{\min} < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t_{\max}$. Pour un tel m -uplet, et pour $P = (\{z_i, z'_i\})_{1 \leq i \leq m} \in \prod_{1 \leq i \leq m} \zeta(t_i)$, on note :

- $\epsilon(P) = (-1)^{n_P}$ où n_P est le nombre de points (z_i, t_i) ou (z'_i, t_i) où tout paramétrage du nœud a un vecteur vitesse ayant une coordonnée suivant t négative (c'est à dire que le nœud orienté "descend").

- D_P le diagramme de cordes obtenu en parcourant le nœud dans le sens de l'orientation, en marquant les points (z_i, t_i) et (z'_i, t_i) dans l'ordre où on les rencontre, puis en reliant pour tout i les deux points d'altitude t_i sur le nœud.

On pose alors :

$$Z_m(K) = \frac{1}{(2i\pi)^m} \int_{(t_1, \dots, t_m) \in C_m^0(K)} \sum_{P = (\{z_i, z'_i\}) \in \prod_{1 \leq i \leq m} \zeta(t_i)} \epsilon(P) \bigwedge_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i} D_P \in \mathcal{A}_m$$

et

$$Z(K) = \sum_{m \geq 0} Z_m(K) \in \mathcal{A}$$

Pour comprendre en quoi cette formule à un sens, il s'agit de bien définir la forme différentielle $\frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$. Or, pour une valeur régulière t_i donnée, le nombre de choix possibles de paires (z_i, z'_i) est fini et correspond au nombre de branches verticales du nœud à la hauteur t_i . On peut donc choisir les $(z_i(t_i), z'_i(t_i))$ de manière lisse en t_i tant qu'on ne passe aucune valeur critique (à ce moment, deux branches distinctes pourraient se rejoindre). Or, sur chaque composante connexe de $C_m^0(K)$, les valeurs t_i ne passent pas par des valeurs régulières. Les formes

présentes dans la somme s'écrivent donc $\epsilon(P) \prod_{i=1}^m \left(\frac{\frac{dz_i}{dt_i} - \frac{dz'_i}{dt_i}}{z_i(t_i) - z'_i(t_i)} \right) dt_1 \cdots dt_m$, ce

qui définit alors bien une forme lisse de degré m sur chaque composante connexe de $C_m^0(K)$, et donne un sens à l'intégrale ci-dessus, sous réserve de convergence.

Le même raisonnement montre que le diagramme D_p est indépendant de l'intégrale sur chaque composante connexe et pour P donné.

Les intégrales ainsi construites vérifient la propriété suivante :

Théorème 3.10. (Kontsevich [8]) *Il existe une constante C telle que si on note $c(K)$ le nombre de points critiques d'un nœud, on ait :*

- en posant $Z'_0(K) := 1$, et $Z'_m(K) := C^{-c(K)} Z_m(K)$, Z'_m est un invariant de Vassiliev de degré m pour tout $m \geq 0$,

- Si on note également $Z'(K) = C^{-c(K)} Z(K)$, alors l'application ϕ_m de la définition 3.7 est un isomorphisme et son inverse est donné par :

$$\begin{aligned} \phi_m^{-1} : \mathcal{A}_n^* &\rightarrow \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \\ G &\mapsto G \circ Z' \text{ mod } \mathcal{V}_{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut reconstruire à partir d'une forme linéaire sur l'espace de diagramme \mathcal{A}_n un unique invariant aux termes de type $n - 1$ près. On peut résumer l'importance de ce théorème dans le corollaire suivant :

Corollaire 3.11. *Deux nœuds K et K' peuvent être distingués par un invariant de type fini si et seulement si ils le sont par leur invariant de Kontsevich Z' .*

Tout invariant de type fini s'écrit $\phi \circ Z'$ pour un $\phi \in \mathcal{A}^$.*

C'est au nom de ce résultat que l'on dira que Z' est un invariant de Vassiliev universel.

3.4 Invariant universel de Chern-Simons

Nous allons dans cette partie construire un invariant universel des nœuds de \mathbb{R}^3 construit par combinaison d'intégrales sur des espaces de configurations. Cette construction est détaillée dans un article de Altschüler et Freidel [5].

Définition 3.12. *On va s'intéresser à une certaine famille de graphes Γ , les diagrammes de Wilson trivalents, vérifiant les propriétés suivantes :*

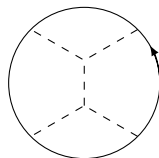
- le graphe Γ est connexe,
- il existe dans Γ un cycle orienté privilégié W_Γ ,
- les sommets de Γ sont trivalents.

On représente le cycle W_Γ par un cercle en trait plein, et les arêtes qui ne sont pas dans le cycle (et ne sont donc pas orientées) seront pointillées. Les sommets du cycle seront dit internes et les autres seront dit externes. On note V_i l'ensemble des sommets internes, V_e l'ensemble des sommets externes, et E_p l'ensemble des arêtes en pointillés (i.e. hors du cycle). Le degré d'un diagramme sera par définition la moitié de son nombre de sommets. Une orientation d'un diagramme sera la donnée d'une orientation de chacune des arêtes.

On note G^3 l'ensemble de ces diagrammes à isomorphisme près, et on note $\text{Aut}(\Gamma)$ le groupe des automorphismes d'un diagramme donné, et $|\text{Aut}(\Gamma)|$ son cardinal.

Notre définition des sommets internes/externes est inversée par rapport à l'article [5], pour pouvoir être en cohérence avec la nomenclature qui sera utilisé en partie 4 pour les diagrammes de Jacobi.

Ceci étant noté, voici un exemple de diagramme de Wilson trivalent de degré trois avec deux sommets externes, et quatre sommets internes, présentant deux



automorphismes :

À un diagramme de Wilson trivalent donné et à un nœud, on va associer un certain espace de configurations, qui permet de comprendre la nomenclature précédente : aux sommets internes correspondront des sommets du nœud, aux sommets externes des sommets libres de se déplacer dans l'espace.

Définition 3.13. Soit Γ un diagramme de Wilson trivalent, et $\phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un nœud. On pose $C_\Gamma^0(\phi)$ l'ensemble des applications injectives $c: V_i \cup V_e \rightarrow \mathbb{R}^3$ telles que :

- il existe $c_i: V_i \rightarrow \mathbb{S}^1$ tel que $c|_{V_i} = \phi \circ c_i$
- l'ordre cyclique des images des éléments de V_i sur \mathbb{S}^1 est celui donné par W_Γ .

Il est immédiat que $C_\Gamma^0(\phi)$ est une variété sans bord de dimension $\text{Card}(V_i) + 3\text{Card}(V_e)$.

On définit alors sur cette variété une forme différentielle par :

Définition 3.14. Soit ω_2 la forme de Gauss sur \mathbb{S}^2 , c'est à dire la seule forme de surface sur \mathbb{S}^2 , invariante par l'action de $SO(3)$, et de surface totale 1. Soit Γ un diagramme de Wilson trivalent, et $\text{or}(\Gamma)$ une orientation de Γ . Alors pour toute arête $e = (i, j)$ (e va de i à j pour l'orientation $\text{or}(\Gamma)$), on pose $p_e: c \in C_\Gamma^0(\phi) \mapsto \frac{c(j)-c(i)}{\|c(j)-c(i)\|} \in \mathbb{S}^2$. On peut alors introduire $\omega_e = p_e^*(\omega_2)$, et enfin $\omega(\Gamma, \text{or}(\Gamma)) = \bigwedge_{e \in E_p} \omega_e$

$\omega(\Gamma, \text{or}(\Gamma))$ dépend du choix de l'orientation des arêtes, mais il est possible de définir l'orientation de $C_\Gamma^0(\phi)$ de manière à ce que les deux changent de signe simultanément quand on fait varier $\text{or}(\Gamma)$. On peut alors poser sans ambiguïté, sous réserve de convergence :

$$I(\Gamma, \phi) = \int_{C_\Gamma^0(\phi)} \omega_\Gamma$$

La convergence est assurée par le théorème suivant, qui découle d'une construction de Bott et de Taubes dans [?] :

Théorème 3.15. Il existe une variété compacte à bord et à coins $C_\Gamma(\phi)$, d'intérieur $C_\Gamma^0(\phi)$, et sur laquelle les applications p_e , les formes ω_e et donc la forme ω_Γ se prolongent de manière lisse.

En effet, il est bien connu que l'intégrale d'une forme différentielle lisse sur une variété compacte converge sans plus d'hypothèses. On peut alors définir notre invariant de la manière suivante :

Théorème 3.16. Soit $\mathbb{R}[G^3]$ le \mathbb{R} -espace vectoriel de base G^3 . Il existe un quotient \mathcal{A} de $\mathbb{R}[G^3]$ (par certaines relations entre diagrammes), tel que si on note $[\Gamma]$ la

classe d'un diagramme Γ dans \mathcal{A} , on définit pour tout entier n un invariant \tilde{Z}_n de type fini n par :

$$\tilde{Z}_n(\phi) = \sum_{\Gamma \in G^3, \deg(\Gamma)=n} \frac{1}{|\text{Aut}(\Gamma)|} I(\Gamma, \phi)[\Gamma] \in \mathcal{A}$$

La série formelle $\tilde{Z} = 1 + \sum_{n \geq 0} \tilde{Z}_n \cdot X^n$ est donc un invariant dont les coefficients sont de type fini.

\tilde{Z} est alors un invariant universel de nœuds parallélisés, où un nœud parallélisé est la donnée d'un nœud et d'un vecteur normal au nœud en tout point, dépendant de manière lisse du point.

3.5 Relation entre les invariants de Kontsevich et de Chern-Simons

Théorème 3.17. *Les invariants de Kontsevich et de Chern-Simons, coïncident en degré ≤ 6 .*

La question est cependant ouverte en degré supérieur.

4 Cas des dimensions supérieures

La construction de \tilde{Z} connaît un analogue en dimension impaire ≥ 3 que nous allons présenter dans cette partie, en précisant quels changements doivent être apportés. Dans toute la suite n sera donc un entier impair supérieur ou égal à 3. Les nœuds que nous regarderons, seront définis de la manière suivante :

Définition 4.1. *On appellera n -nœud long tout plongement lisse $\psi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, tel qu'il existe une n -boule $B \subset \mathbb{R}^n$ hors de laquelle ψ et $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ coïncident (on dit alors que ψ est standard hors de B).*

4.1 Diagrammes de Jacobi

Définition 4.2. *Soit $k \geq 1$ un entier naturel non nul. On appelle diagramme de Jacobi de degré k , un graphe orienté simple (sans boucle) à $2k$ sommets ayant deux types d'arêtes, dites θ -arêtes et η -arêtes, tel qu'en chaque sommet, on a :*

1. soit deux θ -arêtes rentrantes et une θ -arête sortante, une et une seule des arêtes rentrantes venant d'un sommet univalent,
2. soit une θ -arête rentrante venant d'un sommet univalent, une η -arête sortante, et une η -arête rentrante,

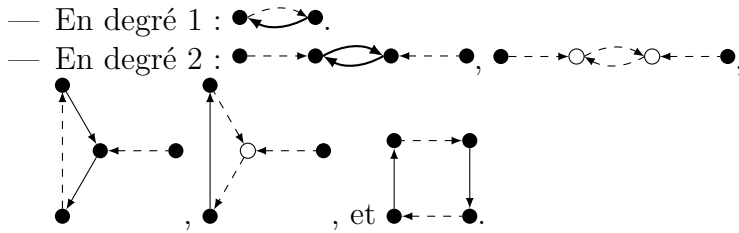
3. soit une θ -arête sortante, se dirigeant alors vers un sommet trivalent,
4. soit une θ -arête rentrante et une η -arête sortante,
5. soit une η -arête rentrante et une θ -arête sortante.

Les sommets décrits dans le premier cas seront dit externes, et représentés par des points blancs, alors que tous les autres seront dit internes et représentés en noir. Les θ -arêtes seront représentées en pointillés, et les η -arêtes seront tracées en trait plein. On notera l'ensemble des sommets $V(\Gamma)$, l'ensemble des θ -arêtes $\Theta(\Gamma)$, et l'ensemble des η -arêtes, $H(\Gamma)$. On appellera **poïds** de Γ , et on notera $w_k(\Gamma)$ l'entier valant $+1$ si le nombre de sommets internes trivalents de Γ est pair, -1 sinon.

Un diagramme de Jacobi connexe est une suite cyclique de fragments des deux types ci-dessous :



Voici par exemple la liste des diagrammes de Jacobi connexes de degré 1 ou 2 à isomorphisme près :



4.2 Espaces de configurations associés aux diagrammes de Jacobi

On a ici une définition analogue à la définition 3.13 déjà vue en dimension 1.

Définition 4.3. Soit Γ un diagramme de Jacobi de degré k , et soient V_i et V_e les ensembles des sommets respectivement internes et externes. Soit $\psi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ un n -nœud long.

On pose $C_\Gamma^0(\psi)$ l'ensemble des applications injectives $c : V_i \cup V_e \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ telles qu'il existe $c_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $c|_{V_i} = \psi \circ c_i$

Les sommets de $c(V_i)$ correspondent aux sommets internes astreints à se déplacer sur le nœud ψ , les sommets restants se déplaçant librement.

On ne détaille pas ici l'orientation de $C_\Gamma^0(\psi)$, détaillée entre autres dans l'article [16] de Watanabe.

4.3 Invariants de Bott-Cattaneo-Rossi

Définition 4.4. Soient ψ un n -nœud long, Γ un diagramme de Jacobi.

On pose pour toute θ -arête de i à j de Γ :

$$p_e : c \in C_\Gamma^0(\psi) \rightarrow \frac{c(j) - c(i)}{\|c(j) - c(i)\|} \in \mathbb{S}^{n+1}$$

Pour toute η -arête e de i à j de Γ , on pose aussi :

$$p_e : c \in C_\Gamma^0(\psi) \rightarrow \frac{c_i(j) - c_i(i)}{\|c_i(j) - c_i(i)\|} \in \mathbb{S}^{n-1}$$

On note pour tout entier $k \geq 1$, ω_k la forme volume $SO(k+1)$ -invariante de volume total unité de \mathbb{S}^k , puis on pose

$$\omega_\Gamma = \left(\bigwedge_{e \in \Theta(\Gamma)} p_e^*(\omega_{n+1}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{e \in H(\Gamma)} p_e^*(\omega_{n-1}) \right)$$

On a alors le théorème suivant dont une preuve constructive est donnée dans l'article [13] de Sinha, qui s'inspire des constructions de Fulton et Mc Pherson pour la géométrie algébrique, détaillées dans [6].

Théorème 4.5. Soient Γ un diagramme de Jacobi, et ψ un n -nœud long. Alors il existe un espace $C_\Gamma(\psi)$ tel que :

- L'espace $C_\Gamma(\psi)$ est une variété à bord et à coins compacte,
- l'intérieur de $C_\Gamma(\psi)$ est canoniquement difféomorphe à $C_\Gamma^0(\psi)$, de sorte qu'on l'y identifie,
- les applications p_e se prolongent de manière lisse à $C_\Gamma(\psi)$,
- la forme différentielle ω_Γ se prolonge de manière lisse à $C_\Gamma(\psi)$.

Encore une fois, ce théorème nous assure de la convergence des intégrales des ω_Γ en nous ramenant au cas d'une forme lisse sur une variété **compacte**. On peut alors définir nos invariants de Bott-Cattaneo-Rossi par :

Définition 4.6. Soit $\psi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ un n -nœud long. On appelle invariant BCR de degré k le réel $z_k(\psi)$ défini par la formule suivante :

$$z_k(\psi) = \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_k^0} \frac{w_k(\Gamma)}{|\text{Aut}(\Gamma)|} \int_{C_\Gamma(\psi)} \omega_\Gamma$$

Cattaneo et Rossi ont montré le théorème suivant dont on trouve une preuve dans la thèse de Rossi [12].

Théorème 4.7. *Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3.*

Alors z_k est un invariant d'isotopie des n -nœuds longs.

On peut également montrer (c'est l'objet de mon mémoire) le théorème suivant :

Théorème 4.8. *Soit n un entier impair supérieur ou égal à 3.*

Alors z_k ne prend que des valeurs rationnelles.

Watanabe a également montré qu'en un sens voisin de celui défini ici, et pour une classe restreinte de nœuds, dits *nœuds rubans* les invariants z_k sont de type fini k si k est pair, et que dans ce cas, tout invariant de type k est multiple de z_k à des termes de type $< k$ près.

5 Bibliographie

Références

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 30(2) :275–306, 1928.
- [2] D. Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2) :423–472, 1995.
- [3] R. Bott. Configuration spaces and imbedding invariants. *Turkish J. Math.*, 20(1) :1–17, 1996.
- [4] R. Bott and C. Taubes. On the self-linking of knots. *J. Math. Phys.*, pages 5247–5287, 1994.
- [5] A. S. Cattaneo and C. A. Rossi. Wilson surfaces and higher dimensional knot invariants. *Comm. Math. Phys.*, 256(3) :513–537, 2005.
- [6] D. Altschuler et L. Freidel. Vassiliev knot invariants and Chern-Simons perturbation theory to all orders. *Comm. Math. Phys.*, 187(2) :261–287, 1997.
- [7] W. Fulton and R. MacPherson. A compactification of configuration spaces. *Ann. of Math. (2)*, 139(1) :183–225, 1994.
- [8] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for knots via von neumann algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 12 :103–111, 1985.
- [9] M. Kontsevich. Feynman diagrams and low-dimensional topology. In *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*, volume 120 of *Progr. Math.*, pages 97–121. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [10] C. Lescop. On the Kontsevich-Kuperberg-Thurston construction of a configuration-space invariant for rational homology 3-spheres. 2004.

- [11] S. Poirier. The configuration space integral for links in \mathbb{R}^3 . *Algebr. Geom. Topol.*, 2 :1001–1050 (electronic), 2002.
- [12] K. Reidemeister. Elementare begründung der knotentheorie. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1) :24–32, 1927.
- [13] C Rossi. *Invariants of higher-dimensional knots and topological quantum field theories*. PhD thesis, Zurich University, 2002.
- [14] D. P. Sinha. Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces. *Selecta Math. (N.S.)*, 10(3) :391–428, 2004.
- [15] Dylan Thurston. Integral expressions for the Vassiliev knot invariants. math.QA/9901110, 1999.
- [16] V. Turaev. *Quantum invariants of knots and links*.
- [17] T. Watanabe. Configuration space integral for long n–knots and the Alexander polynomial. *Algebraic and Geometric Topology*, 7 :47–92, 2007.
- [18] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. In *Braid group, knot theory and statistical mechanics, II*, volume 17 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 361–451. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.