Analyse harmonique des mesures stationnaires

Introduction au Domaine de Recherche

Jialun LI
sous la direction de Jean-François QUINT

Table des matières

Résume

On commence par parler de l'histoire et de la motivation des mesures stationnaires, qui sont aussi appelées les mesures de Furstenberg. On en a besoin quand on veut calculer la limite de la loi des grands nombres pour les matrices. Ensuite, on introduit le résultat suivant: sous une hypothèse de non-dégénérescence, qui est générique, les coefficients de Fourier des mesures stationnaires convergent vers zéro. Cette propriété est invariante sous les actions des difféomorphismes.

1 Mesure Stationnaire

1.1 La loi des grands nombres

La mesure stationnaire est un objet qui a été premièrement considéré par Furstenberg. Dans [Fur63], il étudiait la loi des grands nombres dans le cas non commutatif. Plus simplement, on considère $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans cette section, et on parlera du cas général après. Soient $X_1,\ X_2,\cdots$ des variables aléatoires, i.i.d., qui prennent leurs valeurs dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et telles que l'espérance $\mathbb{E}(|\log\|X_1\||)$ soit fini , où $\|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ est une norme sur les espaces de matrices 2×2. On veut savoir s'il existe une limite à

$$\frac{1}{n}\log\|X_1X_2\cdots X_n\| \text{ quand } n\to\infty. \tag{1.1}$$

C'est une généralisation non commutative de la loi des grands nombres sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, on a plus d'outils que Furstenberg dans les années 60. Une méthode simple utilise le théorème ergodique sous-additif de Kingman [Kin73].

Théorème 1.1. *Soit W_{mn} une famille de variables aléatoires réelles, $m < n$. On suppose que*

(1) La loi de W_{mn} ne dépend que de $n - m$,

(2) Si $m < p < n$, on a $W_{mn} \leq W_{mp} + W_{pn}$,

(3) L'espérance $\mathbb{E}(|W_{01}|)$ est fini.

Alors, la suite $\frac{1}{n} W_{0n}$ converge p.s. quand $n \to \infty$.

Si on prend $W_{mn} = \log \|X_m \cdots X_n\|$, alors on a une limite pour la formule (1.1), mais on n'a pas plus d'information sur cette limite.

On peut le dire dans le langage de la théorie de la mesure. Soit μ la loi de la variable aléatoire X_1.

Définition 1.2. *On note $\Gamma_\mu =< \operatorname{supp} \mu >$, le sous-groupe engendre par le support de μ.*

Et on définit un espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{B}, \beta) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^{\times \mathbb{N}}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$$

où $\mathcal{X}$ est la tribu borélienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dans Ω, les éléments s'écrivent $(g_1, g_2, \cdots)$. Alors le résultat de Furstenberg pour ce cas est

Théorème 1.3. *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, telle que $\operatorname{supp} \mu$ soit compact, Γ_μ soit Zariski dense. Alors, il existe une constant σ_μ*

$$\frac{1}{n} \log \|g_1 g_2 \cdots g_n\| \to \sigma_\mu \qquad p.s \;\; \beta. \tag{1.2}$$

L'hypothèse de Zariski densité est une condition de non dégénérescence, qui est générique. Dans le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, c'est équivalent à non résoluble. On appele **condition (I)**:

$$\begin{gathered}\mu \text{ est une mesure de probabilité borélienne sur } \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \\ \text{telle que } \operatorname{supp} \mu \text{ soit compact, } \Gamma_\mu \text{ soit Zariski dense.}\end{gathered}$$

Cette constante σ_μ est appelée la constante de Lyapunov de μ, elle ne peut pas être calculée directement. En revanche, on a la belle formule de Furstenberg,

$$\sigma_\mu = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1} \sigma(g, x) \mathrm{d}\mu(g) \mathrm{d}\nu(x). \tag{1.3}$$

Pour comprendre cette formule, on doit introduire le concept de mesure stationnaire. L'action de g dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur x dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, x vu comme un vecteur colonne, est le produit d'une matrice par un vecteur colonne. Et on peut définir le produit de convolution entre μ étant une mesure sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ et ν étant une mesure sur $\mathbb{P}^1$ par

$$\mu * \nu = \int g_* \nu \mathrm{d}\mu(g).$$

Définition 1.4 (Mesure stationnaire)**.** *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Une mesure de probabilité borélienne ν sur $\mathbb{P}^1$ est appelée mesure stationnaire si $\mu * \nu = \nu$.*

On a aussi une interprétation géométrique de mesure stationnaire. On associe une chaîne de Markov sur $\mathbb{P}^1$, au départ d'un élément x dans $\mathbb{P}^1$, la prochaine étape est hx avec h de loi μ. Donc $\mu^{*n} * \delta_x$ est la distribution des points après n étapes, partant de x. Il existe une sous-suite de $((\Sigma_{m=0}^{n-1}\mu^{*m} * \delta_x)/n)$ qui converge faiblement vers une mesure stationnaire, cela est due au compacité faible de l'espace des mesures sur $\mathbb{P}^1$. Mais si Γ_μ est Zariski dense, on a un résultat plus fort. Pour n'importe quel point de départ choisi, la distribution des points sur $\mathbb{P}^1$ converge vers la même mesure stationnaire.

Théorème 1.5. *[Fur63][GR85] Sous la condition (I), il existe une seule mesure stationnaire ν. Et pour tout $x \in \mathbb{P}^1$ on a*

$$\mu^{*n} * \delta_x \rightharpoonup \nu, \text{ quand } n \to \infty.$$

Remarque 1.6. *Ce phénomène vient de la contraction d'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1$. Quand on fait le produit des matrices, il existe une grande probabilité d'obtenir une matrice avec une grande norme. Une telle matrice transforme la plupart des points de $\mathbb{P}^1$ vers un petit voisinage du point fixé contracté. C'est une propriété d'hyperbolicité.*

1.2 Quelques exemples

Maintenant, on regard quelques exemples

Exemple 1.7 (Cas résoluble)**.** *Si on prend*

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} + \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Alors le sous-groupe Γ_μ est résoluble, et il existe deux mesures stationnaires sur $\mathbb{P}^1$. L'une est la mesure de Dirac sur $x_0 = [1:0]$. Parce que x_0 est le point fixé de Γ_μ. Et l'action de Γ_μ sur le complémentaire $\mathbb{R} \simeq \mathbb{P}^1 \backslash \{x_0\}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}[x:1] = [\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} : 1],$$
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}[x:1] = [\frac{1}{4}x : 1].$$

Le support de l'autre mesure est dans un ensemble de Cantor.

Exemple 1.8 (Cas Zariski dense)**.** *Si on prend*

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} + \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\left(\delta_{b_1} + \delta_{b_2}\right).$$

Maintenant, le groupe Γ_μ est non résoluble, et il existe une seule mesure stationnaire ν. Le Figure 1 est l'action de b_1, b_2 sur les demi-cercles dans le demi plan de

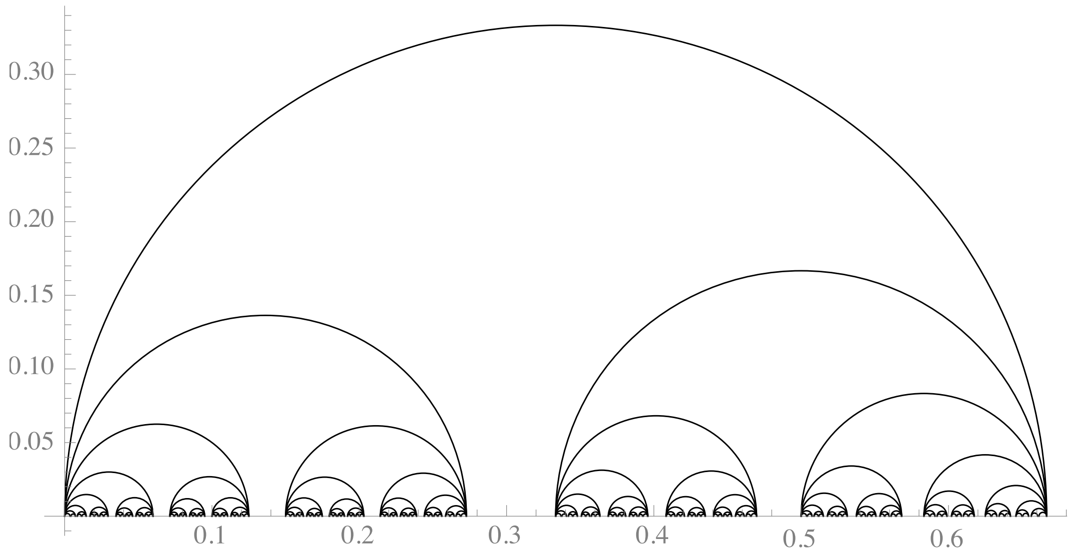

Figure 1: Le support de la mesure stationnaire

Poincaré. L'ensemble des points dans la droite réelle est le support de la mesure stationnaire. Le support est un ensemble de Cantor, mais plus tordu que l'exemple précédent. Parce que l'action n'est pas linéaire, les taux de contraction varient pour les étapes différentes.

Exemple 1.9 (Fraction continue)**.** *Si on prend*

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & n_1\end{pmatrix}} + \frac{1}{2}\delta_{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & n_2\end{pmatrix}} = \frac{1}{2}(\delta_{b_1} + \delta_{b_2}).$$

Dans ce cas, les éléments ne sont pas dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*, mais ils sont dans* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$*. Et on doit considérer la transformation de Möbius sur* $\mathbb{R}$*. On prend un élément* g *dans* $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$*,* x *dans* $\mathbb{R}$*, alors* $gx = \frac{ax+b}{cx+d}$*, où* $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ *est un élément representé de* g*. Cette action est conjuguée avec l'action sur* $\mathbb{P}^1$*. Soit* $x \in [0,1]$*, alors*

$$b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_m} x = [0; n_{i_1}, n_{i_2}, \cdots n_{i_m}, x] = \cfrac{1}{n_{i_1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_{i_m} + x}}}.$$

Donc, étudier la marche aléatoire de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbb{R}$ *peut nous aider à comprendre les fractions continues.*

1.3 Preuve de la loi des grands nombres

Et on revient sur la loi des grands nombres, il faut définir un cocycle.

Définition 1.10. *Soient $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{P}^1$, on prend un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}x$. On associe $\mathbb{R}^2$ avec une norme $\|\cdot\|$ qui est $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ invariante. On définit une fonction σ par*

$$\sigma(g, x) = \log \frac{\|gv\|}{\|v\|}.$$

La fonction définie ci-dessus est un cocycle, parce qu'il satisfait la définition de cocycle

$$\sigma(gh, x) = \sigma(g, hx) + \sigma(h, x).$$

Le cocycle a une loi des grands nombres aussi.

Théorème 1.11. *Sous la condition (I), on a*

$$\frac{1}{n}\sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x) \to \sigma_\mu \qquad p.s \;\; \beta \otimes \nu. \tag{1.4}$$

Idée de preuve. [BQ16, Thm3.28] Le cocycle est additif, ce qui simplifie beaucoup de choses.

Étape 1: On veut appliquer le théorème ergodique de Birkhoff.

Définition 1.12. *Un système dynamique mesuré est un espace mesuré $(X, \mathcal{X}, m)$ avec une application mesurable $T : X \to X$ préservant la mesure m, i.e. pour tout sous-ensemble mesurable A*

$$m(T^{-1}A) = m(A).$$

On rappelle que ν est la mesure stationnarie, β est la mesure produit. Et on introduit un système dynamique mesuré $(\Omega \times \mathbb{P}^1, \beta \otimes \nu, T)$, où T est une application mesurable donnée par

$$T(g_1, g_2, \cdots, x) = (g_2, g_3, \cdots, g_1 x).$$

Et T préserve la mesure $\beta \otimes \nu$, parce que ν est une mesure stationnaire.

Définition 1.13. *Soit (X, m, T) un système dynamique mesuré, m est ergodique si pour tout sous-ensemble mesurable invariant A, c'est-à-dire qui vérifie $T^{-1}A = A$, on a $m(A)$ ou $m(A^c)$ est nulle.*

Théorème 1.14 (Ergodicité de Birkhoff)**.** *Soit m une mesure ergodique, alors pour toute f dans $L^1(X, m)$ on a*

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(T^{i-1}x)\right) \to \int f \mathrm{d}m \;\; p.s \; m. \tag{1.5}$$

Définition 1.15. *Un opérateur de transfert sur $\mathbb{P}^1$ est un opérateur sur l'espace de Banach $L^\infty(\mathbb{P}^1, \nu)$, l'action sur les fonctions continues est définie par*

$$Pf(x) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})} f(gx) \mathrm{d}\mu(g).$$

La mesure m sur $\mathbb{P}^1$ est appelée P-invariante, si $\int Pf \mathrm{d}m = \int f \mathrm{d}m$ pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{P}^1, m)$.

La mesure m est appelée P-ergodique si m est un point extrémal dans l'espace de probabilité borélienne P-invariant.

Par définition

$$\int Pf(x)\mathrm{d}m = \int f(gx)\mathrm{d}\mu(g)\mathrm{d}m(x) = \int f\mathrm{d}\mu * m,$$

on sait qu'une mesure est stationnaire si et seulement si elle est P-invariante.

Proposition 1.16. *[BQ16, Proposition 1.14] Soit ν une mesure P-ergodique, alors $\beta \otimes \nu$ est ergodique.*

Par théorème 1.5, unicité de mesure stationnaire, ν est P-ergodique, donc $\beta \otimes \nu$ est ergodique. On applique le théorème ergodique de Birkhoff à $f((g_1, g_2, \cdots, x)) = \sigma(g_1, x)$. Parce que $\sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x) = \sum_{i=1}^{n} f(T^{i-1}x)$, on a

$$\frac{1}{n}\sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x) \to \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1} \sigma(g,x)\mathrm{d}\mu(g)\mathrm{d}\nu(x) = \sigma_\mu(\nu) \qquad \text{p.s } \beta\otimes\nu. \quad (1.6)$$

Étape 2: On compare les deux limites à $\frac{1}{n}\|g_n g_{n-1} \cdots g_1\|$ et $\frac{1}{n}\sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x)$. Par définition, on a

$$\|gv\| \leq \|g\|\|v\|,$$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\|g_n g_{n-1} \cdots g_1\| \geq \sigma_\mu(\nu)$.

En utilisant le théorème de Fubini, pour ν presque tout $x \in \mathbb{P}^1$, pour β presque tout $(g_1, g_2, \cdots) \in \Omega$, on a la convergence (1.6). D'autre part, la mesure ν n'a pas d'atome [BQ16, Lemma 3.6]. On peut choisir x_1, x_2 et deux vecteurs correspondants, $v_i \in \mathbb{R}^* x_i$ de norme 1, $i = 1, 2$, tels que pour β presque tout $(g_1, g_2, \cdots) \in \Omega$, on ait

$$\frac{1}{n}\sigma(g_n g_{n-1} \cdots g_1, x_i) \to \sigma_\mu(\nu).$$

Et puis, les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont comparables, donc

$$\max\{\|gv_1\|, \|gv_2\|\} \geq \epsilon\|g\|.$$

Passer à la limite, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|g_n g_{n-1} \cdots g_1\| \leq \sigma_\mu(\nu).$$

Finalement, on peut calculer la constante de Lyapunov,

$$\sigma_\mu = \sigma_\mu(\nu) = \int_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1} \sigma(g,x)\mathrm{d}\mu(g)\mathrm{d}\nu(x).$$

□

1.4 Les propriétés des mesures stationnaires et les travaux récents

Une propriété importante de la mesure stationnaire est la régularité höldérienne,

Théorème 1.17. *[Gui90] Sous la condition (I), il existe $C > 0, t > 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{P}^1$, $r > 0$, on a*

$$\nu(B(x,r)) \leq Cr^t.$$

Une mesure ayant cette propriété est appelée mesure de Frostman. Du point de vue géométrique, ν sont les directions limites pour gv. Et ce théorème nous dit que les directions ne sont pas concentrées.

Les mesures stationnaires sont utilisées dans les propriétés fines de la marche aléatoire sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Comme la loi des grands nombres, il existe aussi le théorème central limite, le théorème de la limite locale pour les marches aléatoires sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, dans tous les théorèmes on a besoin de mesures stationnaires.

Par exemple, parlons de la loi des grands nombres des coefficients de matrices. On note $< u, v >$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.18. *Sous la condition (I), on prend deux vecteurs non nuls u, v de $\mathbb{R}$, alors*

$$\frac{1}{n} \log \| < g_n g_{n-1} \cdots g_1 v, u > \| \to \sigma_\mu \qquad p.s \;\; \beta. \tag{1.7}$$

Dans ce théorème, on doit contrôler, de plus, les directions $g_n g_{n-1} \cdots g_1 v$. La régularité de mesure stationnaire dans le théorème 1.17 nous aide pour cela.

Un autre exemple, le théorème de renouvellement qui vient de processus stochastiques. Il dit que le cocycle va être equidistribué dans une fenêtre vers infini, et la distribution des points de la marche aléatoire sur $\mathbb{P}^1$ converge vers la mesure stationnaire dans le même temps. On en a besoin pour étudier la convergence des coefficients de Fourier.

Théorème 1.19. *Sous la condition (I), pour $f \in C_c^1(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{P}^1$, on a quand $t \to +\infty$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f(gx, \sigma(g,x) - t) \mathrm{d}\mu^{*n}(g) \to \frac{1}{\sigma_\mu} \int_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{R}} f(z,s) \mathrm{d}\nu(z) \mathrm{d}s. \tag{1.8}$$

Plus récemment, les gens se sont intéressés à la régularité des mesures stationnaires par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{P}^1$. Ils construisent des exemples. Dans [KLP11], ils prouvent que même si le groupe Γ_μ est dense dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (topologie normale), la mesure stationnaire ν peut être singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Bourgain [Bou12a] construit un exemple dont le support de la mesure μ est fini symétrique, et la mesure stationnaire correspondante est absolument continue. Il y a aussi les travaux de Bourgain [Bou12b] sur la connexion entre la mesure stationnaire et le modèle d'Anderson-Bernoulli.

La mesure stationnaire est une généralisation des mesures auto-similaires ou de la convolution de Bernoulli. Ce sont les mesures sur $\mathbb{R}$, qui sont stationnaires par un système linéaire, comme dans l'exemple 1.7, i.e.

$$\nu = \sum_{i=1}^{m} p_i (g_i)_* \nu \quad \text{où } p_i > 0, \; \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

et g_i sont les matrices triangulaires supérieures $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & a_i^{-1} \end{pmatrix}$ où $a_i < 1$. Pour nous, c'est exactement une mesure stationnaire pour $\mu = \sum_{i=1}^{m} p_i \delta_{g_i}$, et le groupe Γ_μ est un sous-groupe des matrices triangulaires supérieure, qui est résoluble. Il y a beaucoup de travaux sur la dimension, la continuité absolue [Erd39][Hoc14][SS16] [Var16].

2 Analyse harmonique des mesures stationnaires

2.1 Convergence des coefficients de Fourier

Maintenant, nous nous intéressons à la convergence des coefficients de Fourier des mesures stationnaires. Les coefficients de Fourier d'une mesure sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont

$$\hat{\nu}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi kx} \mathrm{d}\nu(x).$$

Définition 2.1. *(1)Une mesure borélienne ν sur $\mathbb{T}$ est appelée mesure de Rajchman, si les coefficients de Fourier convergent vers* 0*, i.e.*

$$\hat{\nu}(k) \to 0 \quad \text{quand } |k| \to \infty.$$

(2) Une mesure borélienne ν sur $\mathbb{R}$ est appelée mesure de Rajchman, si la transformation de Fourier converge vers 0*, i.e.*

$$\hat{\nu}(\xi) \to 0 \quad \text{quand } |\xi| \to \infty.$$

On prend un point $x_0 \in \mathbb{P}^1$, et l'action de $\mathrm{PSO}(2)$ sur $\mathbb{P}^1$ est transitive, libre. Donc on peut faire une identification $\mathbb{P}^1 \simeq \mathrm{PSO}(2) \simeq \mathbb{T}$, et on a les résultats suivants

Théorème 2.2. *Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, telle que Γ_μ soit Zariski dense et* $\operatorname{supp} \mu$ *soit compact. Soit ϕ un difféomorphisme sur $\mathbb{T}$. Alors la mesure $\phi_* \nu$ est une mesure de Rajchman.*

Théorème 2.3. *Sous la même condition, si le support de ν n'est pas $\mathbb{T}$. On prend un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{T}$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tel que le support de $\phi_* \nu$ soit dans $\mathbb{R}$. Alors $\phi_* \nu$ est une mesure de Rajchman.*

Remarque 2.4. *La propriété de Rajchman est très fine: elle n'est même pas préservée par les difféomorphismes. Donc ce résultat signifie les mesures stationnaires sont rigides en un certain sens.*

Si on considère l'action par multiplication par n sur $\mathbb{T} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et ν une mesure invariante, c'est-à-dire pour toute fonction continue f sur $\mathbb{T}$, on a

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbb{T}} f(nx) \mathrm{d}\nu(x).$$

Alors les coefficients de Fourier satisfont $\hat{\nu}(k) = \hat{\nu}(nk)$. Quand le coefficient ne s'annule pas sur $\mathbb{Z} - \{0\}$, cette mesure ν n'est pas une mesure de Rajchman. C'est un contre-exemple typique sur $\mathbb{T}$.

Pour $\mathbb{R}$, on prend la deuxième mesure stationnaire dans l'exemple 1.7. Par définition, pour une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\nu(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mu * \nu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(gx) \mathrm{d}\mu(g) \mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \left(f(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}x) \right) \mathrm{d}\nu(x).\end{aligned}$$

Si on prend $f(x) = e^{2i4\xi\pi x}$, on a

$$\hat{\nu}(4\xi) = \int \frac{1}{2}\left(e^{2i\xi\pi(x+2)} + e^{2i\xi\pi x}\right) \mathrm{d}\nu(x) = e^{2i\xi\pi}\cos(2\xi\pi)\hat{\nu}(\xi).$$

Par récurrence $|\hat{\nu}(\xi)| = \Pi_{l\geq 1}\cos(2\pi 4^{-l}\xi)$, et donc $\hat{\nu}(2^{2l+1}) = \hat{\nu}(2) \neq 0$.

Dans les deux exemples ci-dessus, on trouve que les taux de dilatation ou de contraction sont les mêmes, qui nous donnent une périodicité dans la transformation de Fourier. Mais dans les cas des théorèmes, un point clé est que les taux de contraction engendrent un sous-groupe dense dans $\mathbb{R}$.

Le point de départ d'étudier la convergence des coefficients de Fourier de la mesure stationnaire est le problème du trou spectral d'opérateur de transfert. On a besoin d'information sur les coefficients de Fourier pour estimer le spectre. Quand on travaille dessus, on trouve que les deux problèmes sont essentiellement les mêmes, un point qu'on ne voit pas au début.

Dans la preuve, un outil central est le théorème de renouvellement 1.19.

La stratégie de preuve: on réduit le problème vers un processus de renouvellement de cocycle. Cela s'est fait par la propriété de contraction de l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1$. Et puis on étudie la théorie de renouvellement par l'opérateur de transfert. Et le théorème de renouvellement nous dit que le cocycle $\sigma(g, x)$ serait equidistribué dans l'intervalle $[t, t + b]$ quand $t \to \infty$. À la fin, une fonction intègre par rapport à la mesure de Lebesgue, quand l'oscillation tend vers l'infini, l'intégrale tend vers zéro.

2.2 Généralisation

Pour généraliser le problème, il y a plusieurs directions. Une direction est quantifiée: donner une vitesse sur la convergence des coefficients de Fourier. Parce que dans l'article de Jordan et Sahlsten [JS15], ils considèrent la mesure invariante par l'application de Gauss,

$$h(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}].$$

Un cas général de l'exemple 1.9, et ils peuvent montrer que les mesures stationnaires ont une convergence puissance, quand la dimension de la mesure est plus grande que 1/2. Donc il est semblable que la mesure stationnaire a aussi une convergence puissance i.e.

$$|\hat{\nu}(k)| = O(|k|^{-\epsilon}) \quad \epsilon > 0.$$

Mais leur méthode a une barrière sur la dimension de la mesure, il faut des idées nouvelles pour cela.

Une autre direction est le cas de la dimension plus grande. Soit G un groupe de Lie semi-simple, il existe aussi la loi des grands nombres et les mesures stationnaires. Les choses sont plus compliquées, pour expliquer on a besoin d'un peu de théorie de groupe de Lie et de groupe algébrique. Pour les définitions, voir [Bor90][Hum75]. Soit P un sous-groupe parabolique de G. Alors G/P est une variété de drapeaux. Quand Γ_μ est Zariski dense, il existe une seule mesure stationnaire sur G/P. Et le sous-groupe compact maximal K, agit transitivement sur G/P. Pour le cas de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, la variété de drapeaux est $\mathbb{P}^1$, le sous-groupe maximal est $K = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

À partir de la convergence des coefficients de Fourier, on peut demander y a-t-il les phénomènes similaires? Peut-on dire quelques choses sur la décomposition de ν suivant les harmoniques de sous-groupe maximal dans les espaces fonctionnels de G/P?

Ou on peut remplacer $\mathbb{R}$ par d'autres corps locaux, comme $\mathbb{Q}_p$. Pour quelques exemples simples dont le support de ν est dans $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}\backslash\{x\} \simeq \mathbb{Q}_p$, la transformation de Fourier de ν aussi converge vers zéro. Une difficulté est de trouver une bonne propriété généralisant les coefficients de Fourier.

Références

[Bor90] Armand Borel. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, John Wiley & Sons, 1990.

[Bou12a] J. Bourgain. Finitely supported measures on $SL(2,\mathbb{R})$ which are absolutely continuous at infinity. In *Geometric aspects of functional analysis*, pages 133–141. Springer, 2012.

[Bou12b] J. Bourgain. On the Furstenberg measure and density of states for the Anderson-Bernoulli model at small disorder. *Journal d'Analyse Mathématique*, 117(1):273–295, 2012.

[BQ16] Y. Benoist and J-F. Quint. *Random walks in reductive group.* Springer International Publishing, 2016.

[Erd39] Paul Erdös. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *American Journal of Mathematics*, 61(4):974–976, 1939.

[Fur63] Harry Furstenberg. Noncommuting random products. *Transactions of the American Mathematical Society*, 108(3):377–428, 1963.

[GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontiere de Furstenberg, propriétés de contraction et théoremes de convergence. *Probability Theory and Related Fields*, 69(2):187–242, 1985.

[Gui90] Yves Guivarc'h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic theory and dynamical systems*, 10(03):483–512, 1990.

[Hoc14] Michael Hochman. Self similar sets, entropy and additive combinatorics. In *Geometry and Analysis of Fractals*, pages 225–252. Springer, 2014.

[Hum75] James-E Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, Halsted Press, 1975.

[JS15] T. Jordan and T. Sahlsten. Fourier transforms of Gibbs measures for the Gauss map. *Mathematische Annalen*, pages 1–41, 2015.

[Kin73] John Frank Charles Kingman. Subadditive ergodic theory. *The annals of Probability*, pages 883–899, 1973.

[KLP11] Vadim A Kaimanovich and Vincent Le Prince. Matrix random products with singular harmonic measure. *Geometriae Dedicata*, 150(1):257–279, 2011.

[SS16] Pablo Shmerkin and Boris Solomyak. Absolute continuity of self-similar measures, their projections and convolutions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368(7):5125–5151, 2016.

[Var16] Péter P Varjú. Recent progress on Bernoulli convolutions. *arXiv preprint arXiv:1608.04210*, 2016.