

La catégorie de Deligne $\mathbf{Rep}(Gl_t)$

Construction du Yangian $Y(\mathfrak{g})$

Léa Bittmann

18 décembre 2015

Table des matières

1	Les représentations du groupe linéaire $Gl_N(\mathbb{C})$	2
1.1	Définitions et exemples	2
1.2	Les représentations du tore	3
1.3	Espaces de poids	4
1.4	Représentations irréductibles de Gl_N	5
1.5	L'action de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_N	7
2	La catégorie $\mathbf{Rep}(Gl_t)$	7
2.1	La catégorie squelette $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$	7
2.1.1	Idées pour la construction	8
2.1.2	Mots et diagrammes	8
2.1.3	La catégorie $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$	10
2.2	Construction de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$	11
2.2.1	L'enveloppe additive $\mathbf{Rep}_1(Gl_t)$	11
2.2.2	L'enveloppe de Karoubi $\mathbf{Rep}(Gl_t)$	12
2.3	Classification des indécomposables de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$	13
2.4	L'"algèbre" \mathfrak{g}	14
3	Le Yangian $Y(\mathfrak{g})$	14
3.1	Le Yangian $Y(\mathfrak{gl}_N)$	15
3.2	Yangian en rang complexe	16
	Références	17

Introduction

Les représentations de dimension finie du groupe linéaire $GL_N(\mathbb{C})$ sont étudiées depuis longtemps, et si l'on se restreint à des représentations "lisses", elles sont de plus très bien comprises. Avec l'arrivée de la théorie des catégories, on a pu voir que ces représentations formaient une catégorie $\mathbf{Rep}(GL_N)$, avec de bonnes propriétés (c'est une catégorie symétrique tensorielle par exemple).

C'est P. Deligne qui eut pour la première fois l'idée de généraliser une catégorie de représentations à la variable complexe. En 2007 dans son article fondamental [2], il définit $\mathbf{Rep}(S_t)$, qui généralise la catégorie des représentations de dimension finie du groupe symétrique S_N au cas où $N = t$ n'est pas nécessairement un entier.

A la fin de ce même article, il définit de façon similaire des catégories $\mathbf{Rep}(G)$, pour les groupes classiques $G = GL_t, O_t, \dots$. Ce sont ces catégories qu'on appelle *Catégories de Deligne*.

Nous allons présenter dans un premier temps des résultats connus sur des représentations de GL_N , pour motiver la construction de $\mathbf{Rep}(GL_t)$, qui arrivera dans un second temps. Enfin, nous donnerons une application : la construction du Yangian de \mathfrak{g} , un objet de $\mathbf{Rep}(GL_t)$, qui interpole l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_N au rang complexe.

1 Les représentations du groupe linéaire $GL_N(\mathbb{C})$

Dans cette première partie, nous allons nous intéresser aux représentations complexes de dimension finie du groupe linéaire $GL_N(\mathbb{C})$, où N est un entier supérieur ou égal à 1. On le notera plus simplement GL_N dans la suite. De bonnes références pour cette partie pourraient être [4], ou [5]. Nous suivrons ici le plan de [6].

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1. Une *représentation* de GL_N est la donnée d'une paire (V, ρ) , où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et $\rho : GL_N \rightarrow GL(V)$ est un morphisme de groupes.

On considèrera ici uniquement les représentations qui sont des morphismes de variétés algébriques, donc les représentations rationnelles. Cela signifie que, à un choix de base près, les coefficients de la matrices $[\rho(g)]$ sont des fonctions rationnelles en les coefficients de g .

Remarque 1.1.2. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera dans la suite $\rho(g)(v) = g \cdot v$, pour $g \in GL_N$ et $v \in V$.

Exemple 1.1.3. L'action de GL_N sur \mathbb{C}^N donne une représentation naturelle, appelée *représentation standard*, où $GL_N \hookrightarrow GL(\mathbb{C}^N)$ est l'identité.

On peut construire à partir de \mathbb{C}^N d'autres représentations de Gl_N . Un exemple principal est le produit tensoriel $(\mathbb{C}^N)^{\otimes k}$, l'action de Gl_N y est définie par

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) = (g \cdot v_1) \otimes (g \cdot v_2) \otimes \cdots \otimes (g \cdot v_k). \quad (1)$$

De la même façon, on définit des actions de Gl_N sur les puissances symétriques et extérieures de \mathbb{C}^N .

Exemple 1.1.4. En particulier, on a une représentation de Gl_N sur $\Lambda^N \mathbb{C}^N$, qui est un espace vectoriel de dimension 1. Il s'agit en fait de l'application $Gl_N \rightarrow GL_1 = \mathbb{C}^\times$ qui a une matrice associée son déterminant. Elle est donc appelée la *représentation déterminant*.

Définition 1.1.5. Les représentations $\Lambda^k \mathbb{C}^N$ sont appelées les *représentations fondamentales* de Gl_N .

Proposition 1.1.6. *Plus généralement, si V, W sont des représentations de Gl_N , alors $V \oplus W$ et $V \otimes W$ sont aussi des représentations, les actions étant définies par*

$$\begin{aligned} V \oplus W : \quad g \cdot (v, w) &= (g \cdot v, g \cdot w), \\ V \otimes W : \quad g \cdot (v \otimes w) &= g \cdot v \otimes g \cdot w. \end{aligned}$$

1.2 Les représentations du tore

Nous allons commencer par étudier le cas particulier de $Gl_1 = \mathbb{C}^\times$.

Proposition 1.2.1. *Une représentation $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ qui est aussi un morphisme de variétés algébriques est nécessairement de la forme $z \mapsto z^n$, pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.*

Plus généralement, si (V, ρ) est une représentation de \mathbb{C}^\times ,

Définition 1.2.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que $v \in V$ est un *vecteur de poids n* si $\rho(z)v = z^n v$, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. On définit alors les *espaces de poids* :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad V_n := \{v \in V \mid \forall z \in \mathbb{C}^\times, \rho(z)v = z^n v\}.$$

Théorème 1.2.3. *Soit V une représentation de \mathbb{C}^\times , alors on a une décomposition en somme directe*

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n. \quad (2)$$

Plus généralement, on peut considérer le groupe $T = (\mathbb{C}^\times)^N$, appelé *tore de dimension N* . Comme précédemment, les représentations (rationnelles) de dimension 1 de T sont de la forme

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \mathbb{C}^\times \\ z = (z_1, \dots, z_N) &\mapsto \mu(z) = z_1^{\mu_1} \cdots z_N^{\mu_N} \end{aligned} \quad (3)$$

pour $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$.

Définition 1.2.4. Un morphisme de groupes $\mu : T \rightarrow \mathbb{C}^\times$ de la forme (3) est appelé *poids* de T . L'ensemble de tous les poids $P = \mathbb{Z}^N$ est appelé *réseau des poids* de T .

Soit V une représentation de T , on peut considérer le sous-espace des vecteurs de poids $\mu \in \mathbb{Z}^N$

$$V_\mu := \{v \in V \mid \forall z \in T, z \cdot v = \mu(z)v\}.$$

Avec cette notation, on a la généralisation suivante du Théorème 1.2.3 :

Proposition 1.2.5. *On a une décomposition en somme directe*

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}^N} V_\mu. \quad (4)$$

1.3 Espaces de poids

Revenons au cas de Gl_N . Gl_N contient le tore maximal $T = (\mathbb{C}^\times)^N$, formé des matrices diagonales inversibles. Nous allons étudier les représentations de Gl_N en les restreignant au tore maximal T .

Soit (V, ρ) une représentation de Gl_N , alors c'est aussi une représentation de T . Par la proposition 1.2.5, V admet une décomposition en espaces de poids de T , $V = \bigoplus_{\mu} V_\mu$.

Exemple 1.3.1. Considérons la représentation $V = \Lambda^k \mathbb{C}^N$, avec $1 \leq k \leq N - 1$. Les éléments $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, pour $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ en forment une base.

Soit $z = (z_1, \dots, z_N) \in T$,

$$\begin{aligned} z \cdot (e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &= (z \cdot e_{i_1}) \wedge (z \cdot e_{i_2}) \wedge \cdots \wedge (z \cdot e_{i_k}) \\ &= z_{i_1} e_{i_1} \wedge z_{i_2} e_{i_2} \wedge \cdots \wedge z_{i_k} e_{i_k}, \text{ comme } ze_j = \sum z_i E_{ii} e_j = z_j e_j \\ &= \mu_{i_1, \dots, i_k}(z) e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \end{aligned}$$

où $\mu_{i_1, \dots, i_k} = (0, \dots, 0, \underset{i_1}{1}, 0, \dots, 0, \underset{i_N}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^N$.

$$\text{Ainsi, } \Lambda^k \mathbb{C}^N = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} V_{\mu_{i_1, \dots, i_k}} = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} \mathbb{C} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

Proposition 1.3.2. *Soient V et W deux représentations de Gl_N , et soit $\mu \in P$. Alors*

$$(V \otimes W)_\mu = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda \otimes W_{\mu - \lambda}. \quad (5)$$

1.4 Représentations irréductibles de Gl_N

Définition 1.4.1. Une *sous-représentation* W d'une représentation V de Gl_N est un sous-espace $W \subset V$ qui est stable par l'action de Gl_N .

Définition 1.4.2. Une représentation V de Gl_N est dite *irréductible* si elle n'a pas de sous-représentation autre que $\{0\}$ et elle-même.

Définition 1.4.3. Soient V, W deux représentations de Gl_N . Un *morphisme de représentations* $f : V \rightarrow W$ est une application linéaire f qui vérifie $\rho_W(g)f(v) = f(\rho_V(g)v)$, pour tout $v \in V$ et tout $g \in Gl_N$.

L'ensemble des Gl_N -morphisms de V sur W est noté $\text{Hom}_{Gl_N}(V, W)$.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.4.4. (Lemme de Schur)

Si V et W sont deux représentations irréductibles, alors $\text{Hom}_{Gl_N}(V, W)$ est de dimension 1 si $V \cong W$ et de dimension 0 sinon.

De plus, on a le résultat de semi-simplicité suivant.

Théorème 1.4.5. *Toute représentation V peut s'écrire comme somme directe de sous-représentations irréductibles.*

D'après ce résultat, les représentations irréductibles permettent d'obtenir toutes les représentations de Gl_N . Nous allons donc maintenant classifier ces représentations irréductibles. Introduisons d'abord des définitions supplémentaires.

Définition 1.4.6. Les *racines positives* de Gl_N sont des éléments de $P = \mathbb{Z}^N$ de la forme

$$\beta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0).$$

Pour $\lambda, \mu \in P$, on dit que $\lambda \geq \mu$ si on peut écrire

$$\lambda - \mu = \sum_{\beta} k_{\beta} \beta, \tag{6}$$

avec $k_{\beta} \in \mathbb{N}$, la somme parcourant les racines positives de Gl_N .

Définition 1.4.7. Un poids $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in P$ est dit *dominant* si $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_N$. Ou, de façon équivalente, si $\langle \mu, \beta \rangle \geq 0$, pour toute racine positive β ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $P = \mathbb{Z}^N$).

L'ensemble des poids dominants est noté P_+ .

Définition 1.4.8. Une représentation V est dite *de plus haut poids* λ si $V_{\lambda} \neq 0$, et pour tout poids $\mu > \lambda$, $V_{\mu} = 0$.

Avec ces objets, on a le théorème suivant, qui explicite les représentations irréductibles de Gl_N , et donc toutes les représentations de Gl_N .

Théorème 1.4.9. *Pour tout poids dominant $\lambda \in P_+$, il existe une unique représentation irréductible $V(\lambda)$ de Gl_N , de plus haut poids λ .*

Exemple 1.4.10. La représentation $\Lambda^k \mathbb{C}^N$ est irréductible et de plus haut poids

$$w_k := (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, 0, 0, \dots, 0). \quad (7)$$

On peut alors préciser le résultat de la Proposition 1.3.2.

Lemme 1.4.11. *Si V et W sont des représentations de plus haut poids respectifs λ et μ , alors $V \otimes W$ est une représentation de plus haut poids $\lambda + \mu$.*

Nous allons utiliser l'exemple et le lemme ci-dessus pour prouver l'existence dans le Théorème 1.4.9.

Démonstration. Soit $\lambda \in P_+$. Alors λ s'écrit $\lambda = \sum_{k=1}^N m_k w_k$, avec $m_k \geq 0$ pour tout $k < n$. Considérons le produit tensoriel suivant

$$W = \bigotimes_{k=1}^N (\Lambda^k \mathbb{C}^N)^{\otimes m_k}.$$

D'après le Lemme 1.4.11, W est une représentation de plus haut poids λ .

Si on écrit une décomposition de W en somme directe de représentations irréductibles, $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_m$, alors au moins une des W_k a un espace de poids pour λ non nul. C'est donc une représentation irréductible de plus haut poids λ . \square

Remarque 1.4.12. On voit de plus dans cette preuve que toutes les représentations irréductibles correspondant à des poids λ tels que $\lambda_i \geq 0$, pour tout $1 \leq i \leq N$, peuvent être obtenues comme des sous-représentations de produits tensoriels de représentations de la forme $\Lambda^k \mathbb{C}^N$. On voit aussi assez clairement que $\Lambda^l(\mathbb{C}^N)^*$ est de plus haut poids $(0, 0, \dots, 0, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_l)$.

Ainsi on voit qu'en prenant des produits tensoriels de $\Lambda^k \mathbb{C}^N$ et de $\Lambda^l(\mathbb{C}^N)^*$, on obtient facilement tous les poids dominant possibles. C'est pour cette raison qu'on les appelle les poids fondamentaux. C'est un fait que nous utiliserons dans la construction de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$.

1.5 L'action de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_N

On peut aussi voir les représentations de Gl_N comme des représentations de son algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_N = \mathfrak{gl}_N(\mathbb{C})$. Précisément, si $\rho : Gl_N \rightarrow GL(V)$ est une représentation de Gl_N , on obtient en la différentiant une application $\mathfrak{gl}_N \rightarrow \text{End}(V)$.

Notons \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{gl}_N , c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie formée des matrices diagonales de \mathfrak{gl}_N . On définit aussi les générateurs de Chevalley E_i, F_i , pour $1 \leq i \leq N-1$ tels que E_i est la matrice avec un 1 en $(i, i+1)$ et des 0 ailleurs et F_i est sa transposée. On note $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ les racines simples de \mathfrak{gl}_N . $\alpha_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{-1}, 0, \dots, 0)$, pour $1 \leq i \leq N-1$.

Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ un poids, alors μ s'étend en un morphisme $\mu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\mu \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_N \end{bmatrix} = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_N a_N. \quad (8)$$

Les actions de Gl_N et celle de son algèbre de Lie \mathfrak{gl}_N sont reliées par la proposition suivante.

Proposition 1.5.1. • *Si v est un vecteur d'une représentation V de poids μ , alors pour tout $X \in \mathfrak{h}$, $X \cdot v = \mu(X)v$.*

- *Si $v \in V_\mu$ alors $E_i v \in V_{\mu+\alpha_i}$ et $F_i v \in V_{\mu-\alpha_i}$, pour tout $1 \leq i \leq N-1$.*
- *Si $v \in V_\mu$ alors pour tout $1 \leq i \leq N-1$, $E_i F_i v - F_i E_i v = \langle \mu, \alpha_i \rangle v$.*

2 La catégorie $\text{Rep}(Gl_t)$

Dans cette section, nous allons commencer par présenter la construction de la catégorie de Deligne $\mathbf{Rep}(Gl_t)$, où t est un nombre complexe quelconque. Le but étant de construire une catégorie qui interpole la catégorie des représentations de dimension finie de Gl_N , pour des valeurs complexes du paramètre N . Nous étudierons ensuite quelques propriétés de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$.

Nous suivrons dans cette partie la construction de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ faites par J. Comes et B. Wilson dans [1], mais elle est basée sur la même idée que la construction de Deligne dans [2].

2.1 La catégorie squelette $\text{Rep}_0(Gl_t)$

Tout d'abord, nous allons construire une sous-catégorie $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$, à partir de laquelle on pourra définir $\mathbf{Rep}(Gl_t)$.

2.1.1 Idées pour la construction

Comme on l'a vu dans la remarque 1.4.12, dans le cas de Gl_N , si on note $V = \mathbb{C}^N$, alors toute représentation irréductible vit dans un espace de la forme $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$, avec $r, s \in \mathbb{N}$. Ce sont ces objets qui vont servir de bases à la construction de $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$. On peut représenter graphiquement ces objets de la façon suivante.



V est noté par \bullet et V^* par \circ . Ainsi l'objet $V^{\otimes r} \otimes (V^*)^{\otimes s}$ est un mot à $r + s$ lettres sur l'alphabet à deux lettres $\{\bullet, \circ\}$. Par exemple :

$$V^{\otimes 3} \otimes (V^*)^{\otimes 2} = \bullet \bullet \bullet \circ \circ \quad (9)$$

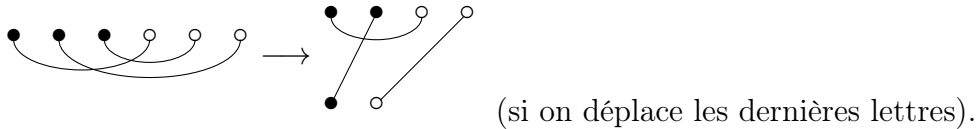
De plus, si $V^{\otimes r_1} \otimes (V^*)^{\otimes s_1}$ et $V^{\otimes r_2} \otimes (V^*)^{\otimes s_2}$ sont deux tels objets, alors l'ensemble des morphismes de représentations entre eux,

$$\mathrm{Hom}_{Gl_N}(V^{\otimes r_1} \otimes (V^*)^{\otimes s_1}, V^{\otimes r_2} \otimes (V^*)^{\otimes s_2}) \cong \mathrm{Hom}_{Gl_N}(\mathbb{C}, V^{\otimes r_2+s_1} \otimes (V^*)^{\otimes s_2+r_1}), \quad (10)$$

est non nul si et seulement si $r_2 + s_1 = s_2 + r_1$. De plus, dans ce cas, il est engendré par des morphismes de coévaluation $\delta : \mathbb{C} \rightarrow V \otimes V^*$, en associant deux à deux les V et V^* (théorie des invariants).

Graphiquement, on représente une coévaluation par le graphe  (association d'un V et d'un V^*). Un morphisme de $\mathrm{Hom}_{Gl_N}(\mathbb{C}, V^{\otimes 3} \otimes (V^*)^{\otimes 3})$, par exemple, est donc représenté par un diagramme de la forme .

Or, $\mathrm{Hom}_{Gl_N}(\mathbb{C}, V^{\otimes 3} \otimes (V^*)^{\otimes 3}) \cong \mathrm{Hom}_{Gl_N}(V \otimes V^*, V^{\otimes 2} \otimes (V^*)^{\otimes 2})$. Sur la représentation graphique, l'isomorphisme se fait en changeant la couleur d'un \bullet et d'un \circ et en les plaçant en dessous des lettres restantes, tout en gardant les arêtes existantes. Sur notre exemple :



2.1.2 Mots et diagrammes

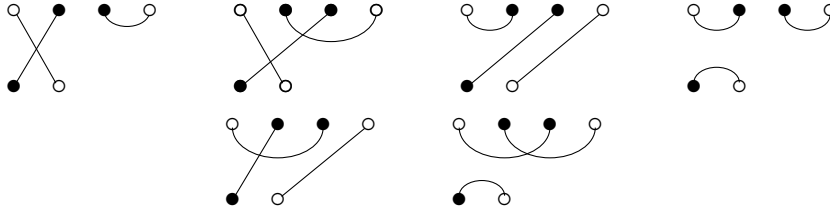
On formalise tout ce que l'on vient de dire de la façon suivante :
Soient w et w' deux mots (finis) sur l'alphabet à deux lettres $\{\bullet, \circ\}$.

Définition 2.1.1. Un (w, w') -*diagramme* est un graphe qui vérifie

1. Les sommets sont les lettres de w et w' placées sur deux rangées. La rangée supérieure formant w' et la rangée inférieure formant w .
2. Chaque sommet touche exactement une arête.

3. Un sommet peut être relié par une arête à un sommet de la même couleur si et seulement s'ils sont placés sur deux rangées différentes. Inversement, un sommet peut être relié par une arête à un sommet de couleur différente si et seulement s'ils sont placés sur la même rangée.

Exemple 2.1.2. L'ensemble des $(\bullet\circ, \circ\bullet\bullet\circ)$ -diagrammes est :



Avec ce qu'on a vu, on a le résultat suivant.

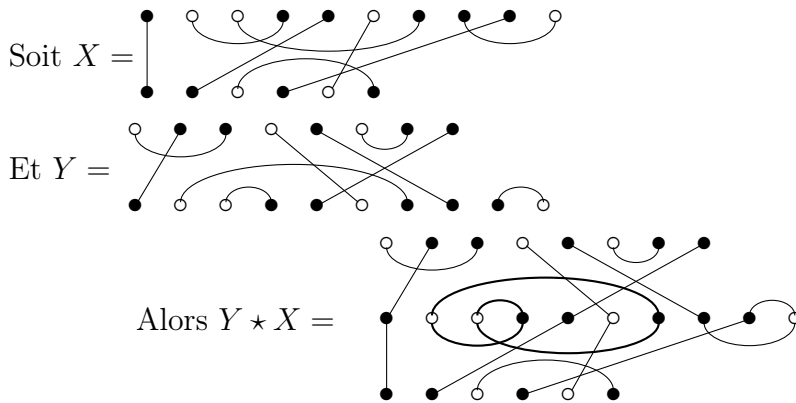
Proposition 2.1.3. Soient w et w' deux mots finis sur l'alphabet $\{\bullet, \circ\}$. Soient r_1 (resp. r_2) le nombre de lettres noires dans w (resp. w'), et s_1 (resp. s_2) le nombre de lettres blanches dans w (resp. w'). Alors

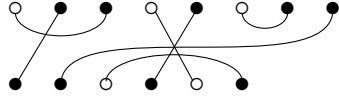
$$\#\{(w, w')\text{-diagrammes } (w, w')\} = \begin{cases} (r_1 + s_2)! & \text{si } r_1 + s_2 = s_1 + r_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut définir une opération entre ces diagrammes.

Soient w, w' et w'' des mots sur l'alphabet $\{\bullet, \circ\}$. Soient X un (w, w') -diagramme et Y un (w', w'') -diagramme. On commence par définir le diagramme $Y \star X$, qui est obtenu en plaçant Y au dessus de X et en identifiant la rangée inférieure de Y avec la rangée supérieure de X . Ensuite, on définit le (w, w'') -diagramme $Y \cdot X$, dont les sommets sont la rangée supérieure de Y et la rangée inférieure de X , et dont les arêtes sont obtenues en composant les arêtes de X et de Y . Enfin, soit $\ell(X, Y)$ le nombre de cycles apparaissant dans $Y \star X$ (i.e. le nombre de composantes connexes de $Y \star X$ moins le nombre de composantes connexes de $Y \cdot X$).

Exemple 2.1.4. Suivons la construction de $Y \cdot X$ sur un exemple concret.



Ainsi $Y \cdot X =$  et $\ell(X, Y) = 1$

2.1.3 La catégorie $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$

Nous avons maintenant tous les outils pour définir la catégorie $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$, pour $t \in \mathbb{C}$ quelconque.

Définition 2.1.5. La catégorie $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$ est définie par

Objets Les mots finis sur l'alphabet $\{\bullet, \circ\}$.

Morphismes Pour $w, w' \in \text{Obj}(\mathbf{Rep}_0(Gl_t))$, $\text{Hom}(w, w')$ est le \mathbb{C} -espace vectoriel de base les (w, w') -diagrammes.

Composition Pour $w, w', w'' \in \text{Obj}(\mathbf{Rep}_0(Gl_t))$,

$$\text{Hom}(w', w'') \times \text{Hom}(w, w') \rightarrow \text{Hom}(w, w'') \quad (11)$$

est l'application \mathbb{C} -linéaire définie par

$$(Y, X) \mapsto YX = t^{\ell(X, Y)} Y \cdot X \quad (12)$$

où X et Y sont respectivement un (w, w') -diagramme et un (w', w'') -diagramme.

Pour tout objet w , il existe un (w, w) -diagramme, noté 1_w , qui soit l'identité de l'anneau $\text{Hom}(w, w)$. 1_w est définie en reliant chaque sommet de la rangée supérieure au sommet correspondant sur la rangée inférieure. Par exemple

$$1_{\bullet\bullet\circ\circ\bullet\bullet} = \begin{array}{cccccc} \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet \\ | & | & | & | & | & | & | \\ \bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet \end{array}$$

Cette construction permet effectivement de définir une catégorie (l'associativité se vérifie facilement).

$\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$ peut être munie d'une structure supplémentaire.

On définit un foncteur

$$\otimes : \mathbf{Rep}_0(Gl_t) \times \mathbf{Rep}_0(Gl_t) \rightarrow \mathbf{Rep}_0(Gl_t).$$

Son action sur $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$ est la suivante :

Sur les objets $(w_1, w_2) \mapsto w_1 \otimes w_2 := w_1 w_2$ concaténation des mots.

Sur les morphismes Soit X_i un (w_i, w'_i) -diagramme, pour $i = 1, 2$.

Alors $(X_1, X_2) \mapsto X_1 \otimes X_2 =$ le $(w_1 w_2, w'_1 w'_2)$ -diagramme obtenu en plaçant X_2 directement à droite de X_1 .

Remarque 2.1.6. Si on revient à $\bullet = V = \mathbb{C}^N$, on voit que ce produit tensoriel est compatible avec le produit tensoriel classique entre espaces vectoriels.

$$(V^{\otimes r_1} \otimes (V^*)^{\otimes s_1}) \otimes (V^{\otimes r_2} \otimes (V^*)^{\otimes s_2}) = V^{\otimes r_1} \otimes (V^*)^{\otimes s_1} \otimes V^{\otimes r_2} \otimes (V^*)^{\otimes s_2} \quad (13)$$

Proposition 2.1.7. *Rep₀(Gl_t) équipée de*

- \otimes comme produit tensoriel,
 - le mot vide $\mathbb{1}$ comme objet unité,
 - le tressage symétrique γ défini par γ_{w_1, w_2} est le $(w_1 w_2, w_2 w_1)$ -diagramme obtenu en reliant la i^e lettre de w_1 (resp. w_2) sur la rangée supérieure à la i^e lettre de w_1 (resp. w_2) sur la rangée inférieure,
- est une catégorie symétrique rigide.

Nous n'entrerons pas ici dans le détails de la signification de ces termes. Le lecteur pourra aller voir le livre de Mac Lane [7], par exemple, pour des définitions détaillées. On pourra juste signaler que dans cette catégorie tensorielle, le dual w^* d'un mot w est obtenu en changeant la couleur de toutes les lettres de w . Par exemple $(\bullet \bullet \circ)^* = \circ \circ \bullet$ (et donc $(V)^* = \bullet^* = \circ = V^*$).

2.2 Construction de Rep(Gl_t)

On va ajouter des objets à la catégorie **Rep₀(Gl_t)** pour obtenir **Rep(Gl_t)**.

2.2.1 L'enveloppe additive Rep₁(Gl_t)

Tout d'abord, il semble naturel de pouvoir considérer les sommes directes des objets que l'on a déjà créé dans **Rep₀(Gl_t)**. En effet, nous avons considéré pour l'instant des objets de la forme $V^r \otimes (V^*)^{\otimes s}$, si $V = \bullet$ (tout objet de **Rep₀(Gl_t)** est naturellement isomorphe à un objet de cette forme). Si l'on compare au cas classique des représentations de dimension finie de Gl_N , on voit que les sommes directes des objets de ce type sont encore des représentations de dimension finie de Gl_N . On pose donc

Définition 2.2.1. Soit **Rep₁(Gl_t)** = **(Rep₀(Gl_t))^{add}**, l'enveloppe additive de la catégorie **Rep₀(Gl_t)**.

L'enveloppe additive \mathcal{C}^{add} d'une catégorie pré-additive \mathcal{C} est construite en prenant les sommes formelles finies d'objets de \mathcal{C} :

Objets Familles finies $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} .

Morphismes $\Phi : (X_i)_{i \in I} \rightarrow (Y_j)_{j \in J}$ est la matrice $\Phi = (\phi_i^j)$ avec $\phi_i^j : X_i \rightarrow Y_j$.

Composition La composition de deux morphismes $\Phi \in \text{Hom}((X_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J}), \Psi \in \text{Hom}((Y_j)_{j \in J}, (Z_k)_{k \in K})$ se fait par produit matriciel :

$$(\Psi \circ \Phi)_i^k = \sum_{j \in J} \psi_j^k \circ \phi_i^j. \quad (14)$$

$\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$ étant une catégorie pré-additive (les ensembles de morphismes sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels, donc en particulier des groupes), on peut bien définir la catégorie $\mathbf{Rep}_1(Gl_t)$.

2.2.2 L'enveloppe de Karoubi $\mathbf{Rep}(Gl_t)$

Comme nous l'avons aussi vu en première partie, dans les représentations courantes de Gl_N on trouve par exemple les $\Lambda^k \mathbb{C}^N$, pour $1 \leq k \leq n$. Or ces représentations n'apparaissent pour l'instant pas dans la catégorie $\mathbf{Rep}_1(Gl_t)$.

On va donc élargir encore notre catégorie, de la façon suivante :

Définition 2.2.2. Soit $\mathbf{Rep}(Gl_t) = (\mathbf{Rep}_1(Gl_t))^{kar}$, l'enveloppe de Karoubi de la catégorie $\mathbf{Rep}_1(Gl_t)$.

Une catégorie est dite *Karoubi* si tout endomorphisme idempotent est la projection sur un facteur direct. Prendre l'enveloppe de Karoubi \mathcal{C}^{kar} d'une catégorie \mathcal{C} consiste à ajouter des facteurs directs formels pour les endomorphismes idempotents. On la construit comme suit.

Objets Les paires (X, e) , où $e \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est un idempotent.

Morphismes $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{kar}}((X, e), (Y, f)) = \{\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \mid f \circ \phi = \phi = \phi \circ e\}$

Composition Celle de \mathcal{C} .

Alors, tout endomorphisme $\phi \in \text{End}_{\mathcal{C}^{kar}}((X, e))$ idempotent est scindé.

En effet il existe des morphismes ι_ϕ, π_ϕ tels que

$$\begin{aligned} (X, \phi) &\xrightarrow{\iota_\phi} (X, e), \\ (X, e) &\xrightarrow{\pi_\phi} (X, \phi), \end{aligned}$$

et $\phi = \iota_\phi \circ \pi_\phi$, $\text{id}_{(X, \phi)} = \pi_\phi \circ \iota_\phi$.

Il suffit de prendre $\iota_\phi = \pi_\phi = \phi$ ($\text{id}_{(X, \phi)} = \phi$ dans \mathcal{C}^{kar}).

De plus, \mathcal{C} est une sous-catégorie de \mathcal{C}^{kar} , par l'injection $X \hookrightarrow (X, \text{id}_X)$.

Ainsi, $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ est une catégorie additive et Karoubi. Elle est aussi rigide, symétrique et tensorielle car elle hérite de la structure tensorielle de $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$.

De plus, $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ contient les catégories $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$ et $\mathbf{Rep}_1(Gl_t)$, par

$$X \mapsto (X, \text{id}_X). \quad (15)$$

Remarque 2.2.3. Si on regarde $e \in \text{End}(\bullet\bullet)$, l'endomorphisme idempotent

$$e = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array},$$

alors l'objet $(\bullet\bullet, e)$ de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ s'identifie à $\Lambda^2 V$ (image par la projection).
On peut définir de manière similaire $\Lambda^k V$ et $\Lambda^l V^*$.

2.3 Classification des indécomposables de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$

On a dans la catégorie $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ un résultat sur la classification des objets indécomposables, qui ressemble au Théorème 1.4.9 dans la cas des représentations irréductibles de Gl_N .

Théorème 2.3.1. *On a une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{bipartitions de} \\ \text{taille arbitraire} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{bij.}} \left\{ \begin{array}{l} \text{objets indécomposables non} \\ \text{nuls de } \mathbf{Rep}(Gl_t), \text{ à iso. près} \end{array} \right\} \quad (16)$$

Introduisons quelques définitions pour comprendre ce théorème.

Définition 2.3.2.

- Une *partition* λ est une suite d'entiers positifs ou nuls $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, telle que pour tout $i \geq 1$, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, et $\lambda_i = 0$ pour presque tout i . On note $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ la *taille* de λ . Et $\ell(\lambda)$ désigne la *longueur* de λ , le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\lambda_n \neq 0$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i > n$.
- Soit \mathcal{P} l'ensemble des partitions.
- Une *bipartition* est un élément de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Pour une bipartition λ , on écrit $\lambda = (\lambda^\bullet, \lambda^\circ)$. La *taille* de λ est $|\lambda| = (|\lambda^\bullet|, |\lambda^\circ|)$, et sa *longueur* est $\ell(\lambda) = \ell(\lambda^\bullet) + \ell(\lambda^\circ)$.

Définition 2.3.3. Un objet X d'une catégorie pré-additive \mathcal{C} est dit *indécomposable* si, pour toute décomposition en biproduit $X = X_1 \oplus X_2$, munie des morphismes $\iota_i : X_i \rightarrow X$ et $\pi_i : X \rightarrow X_i$, il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $\iota_i \circ \pi_i = 0 \in \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$.

Dans le cas des représentations de dimension finie de Gl_N que nous avons considéré en première partie, les représentations indécomposables sont nécessairement irréductibles (mais ce n'est pas le cas en général). De plus, on a vu que celles-ci étaient en bijection avec l'ensemble des poids dominants P_+ .

On peut voir tout poids dominant est de la forme

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0, -\mu_l, -\mu_{l-1}, \dots, -\mu_1) \in P_+, \quad (17)$$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ et $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_l$ (nécessairement, $k + l \leq N$).

Ainsi, on a une bijection

$$P_+ \xrightarrow{\sim} \{ \text{bipartitions de longueur } \leq N \}. \quad (18)$$

On peut donc voir que le cas de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ ressemble à celui de Gl_N pour des grands entiers N . Les éléments indécomposables sont en bijection avec un ensemble qui ressemble à celui des poids dominants, mais en dimension infinie (et où on ne considère que les éléments presque nuls).

2.4 L'"algèbre" \mathfrak{g}

Il existe dans $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ un élément particulier, que l'on notera \mathfrak{g} . Il s'agit de

$$\mathfrak{g} := \bullet \circ (= V \otimes V^*). \quad (19)$$

Si on revient à la comparaison avec le cas de Gl_N , où $\bullet = V = \mathbb{C}^N$, alors $V \otimes V^* \cong \mathfrak{gl}_N$.

\mathfrak{g} est donc une interpolation au rang complexe de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_N .

Si l'on veut voir les objets de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ comme des représentations, on peut les voir comme des \mathfrak{g} -modules. Il est clair que pour tout objet X de $\mathbf{Rep}_0(Gl_t)$, l'ensemble de morphismes $\text{Hom}(\mathfrak{g} \otimes X, X)$ est non nul (d'après la Proposition 2.1.3), i.e. il y a un morphisme $\mathfrak{g} \otimes X \rightarrow X$. A partir de cela, il est facile de voir que pour tout objet X de $\mathbf{Rep}(Gl_t)$ il existe aussi un morphisme de $\mathfrak{g} \otimes X \rightarrow X$.

Remarque 2.4.1. \mathfrak{g} peut aussi être défini comme l'algèbre de Lie du groupe fondamental, noté Gl_t , de la catégorie $\mathbf{Rep}(Gl_t)$. L'objet qu'on obtient est exactement $V \otimes V^*$.

L'objet \mathfrak{g} est très utile. Une partie de la théorie des algèbres de Lie semi-simples peut y être étendue, voir par exemple [3], Sections 3 à 7.

Dans la section suivante, nous allons nous intéresser à une de ces généralisations : la construction du Yangian de \mathfrak{g} .

3 Le Yangian $Y(\mathfrak{g})$

Nous nous intéresserons ici à un objet défini par Etingof en Section 7 de [3]. Pour cela, nous allons généraliser une construction assez classique, celle du Yangian $Y(\mathfrak{gl}_N)$ de \mathfrak{gl}_N . Plusieurs sources peuvent faire référence pour cette construction. Nous nous baserons ici sur celle de A. Molev dans [8].

3.1 Le Yangian $Y(\mathfrak{gl}_N)$

Dans le cas classique, pour tout $N \geq 1$, on peut définir une algèbre de Hopf, notée $Y(\mathfrak{gl}_N)$, de la façon suivante :

Définition 3.1.1. Le Yangian $Y(\mathfrak{gl}_N)$ de \mathfrak{gl}_N est l'algèbre engendrée par les éléments $\{t_{ij}^{(m)} \mid 1 \leq i, j \leq N, m \geq 1\}$, avec les relations, pour $1 \leq i, j \leq N, p, q \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$,

$$[t_{ij}^{(p+1)}, t_{kl}^{(q)}] - [t_{ij}^{(p)}, t_{kl}^{(q+1)}] = t_{kj}^{(q)} t_{il}^{(p)} - t_{kj}^{(p)} t_{il}^{(q)}, \quad (20)$$

où $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ par convention.

Considérons la série génératrice des $t_{ij}^{(m)}$:

$$t_{ij}(u) := \delta_{ij} + \sum_{m \in \mathbb{N}^*} t_{ij}^{(m)} u^{-m} \in Y(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}]]. \quad (21)$$

Alors les relations (20) peuvent se résumer sous l'écriture suivante :

$$(u - v)[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = t_{kj}(v)t_{il}(u) - t_{kj}(u)t_{il}(v), \quad (22)$$

pour tous $1 \leq i, j, k, l \leq N$.

On peut maintenant définir $T(u) \in \mathfrak{gl}_N \otimes Y(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}]]$,

$$T(u) := \sum_{i,j=1}^N e_{ij} \otimes t_{ij}(u), \quad (23)$$

où les e_{ij} , pour $1 \leq i, j \leq N$, sont les matrices de la base canonique de \mathfrak{gl}_N .

Cette écriture va nous permettre de résumer les relations (20) définissant le Yangian en une seule relation matricielle portant sur $T(u)$.

Définition 3.1.2. Soit σ la permutation

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N &\rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N, \\ x \otimes y &\mapsto y \otimes x. \end{aligned} \quad (24)$$

Comme élément de $\text{End}(\mathbb{C}^N) = \mathfrak{gl}_N \otimes \mathfrak{gl}_N$, elle peut s'écrire $\sigma = \sum_{i,j=1}^N e_{ij} \otimes e_{ji}$. On pose alors

$$R(u) := 1 + \frac{\sigma}{u} \in \mathfrak{gl}_N^{\otimes 2} \quad (25)$$

Enfin, notons respectivement $T^{13}(u)$ et $T^{23}(u)$ les éléments $\sum_{i,j=1}^N e_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(u)$ et

$\sum_{i,j=1}^N 1 \otimes e_{ij} \otimes t_{ij}(u)$, et soit $R^{12}(u)$ l'élément $1 + \frac{1}{u} \sum_{i,j=1}^N e_{ij} \otimes e_{ji} \otimes \mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est l'unité de $Y(\mathfrak{gl}_N)$ (et 1 est une notation abrégée pour $1 \otimes 1 \otimes \mathbb{1}$).

Ces objets appartiennent à $\mathfrak{gl}_N^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}]]$.

Proposition 3.1.3. *Les relations qui définissent l'algèbre $Y(\mathfrak{gl}_N)$ sont équivalentes à l'unique relation suivante, dans $\mathfrak{gl}_N^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_N)[[u^{-1}, v^{-1}]]$,*

$$R^{12}(u-v)T^{13}(u)T^{23}(v) = T^{23}(v)T^{13}(u)R^{12}(u-v). \quad (26)$$

3.2 Yangian en rang complexe


C'est cette dernière relation (26), que nous allons généraliser pour définir le Yangian $Y(\mathfrak{g})$.

Tout d'abord, on crée un objet global, qui est l'équivalent de considérer l'algèbre engendrée par les $t_{ij}^{(m)}$. On pose

$$A := \mathbf{T}\left(\bigoplus_{m \geq 0} (V \otimes V^*)_{(m)}\right). \quad (27)$$


Soit T_m la coévaluation

$$T_m = \mathbb{1} \rightarrow (V^* \otimes V) \otimes (V \otimes V^*)_{(m)} \in \text{Hom}(\mathbb{1}, (V^* \otimes V) \otimes A), \quad (28)$$



définie par .

Soit $T(u) := 1 + T_0 u^{-1} + T_1 u^{-2} + \dots$ la fonction génératrice de T_m .

Soit σ la permutation $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. Comme $\text{Hom}(V \otimes V, V \otimes V) \cong$

$\text{Hom}(\mathbb{1}, V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V)$, on a . Et soit $R(u) := 1 + \frac{\sigma}{u}$.

Comme précédemment, on peut définir $T^{13}(u), T^{23}(u)$ et $R^{12}(u)$, des objets de $\text{Hom}(\mathbb{1}, (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V) \otimes A)[[u^{-1}]]$.

Remarque 3.2.1. L'identité $V \rightarrow V$ se note . Si on le traduit en un morphisme de $\text{Hom}(\mathbb{1}, V^* \otimes V)$, cela donne .

Ainsi, chaque $V^* \otimes V$ ou $V \otimes V^*$ sur lequel il n'y a pas d'action sera représenté comme cela.

Exemple 3.2.2. $T_i^{13} =$

$$\text{Diagram showing a sequence of coevaluation maps } T^{(0)}, T^{(i-1)}, T^{(i)}, T^{(i+1)} \text{ connected by a large arc.} \quad \dots$$

Considérons maintenant la série formelle

$$\begin{aligned} Q(u, v) &:= (u - v)(R^{12}(u - v)T^{13}(u)T^{23}(v) - T^{23}(v)T^{13}(u)R^{12}(u - v)) \\ &= \sum Q_{i,j} u^i v^j \end{aligned}$$

Les coefficients $Q_{i,j}$ sont des éléments de $\text{Hom}(\mathbf{1}, (V^* \otimes V) \otimes (V^* \otimes V) \otimes A)$, mais ils peuvent être vus comme des morphismes

$$Q_{ij} = (V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*) \rightarrow A. \quad (29)$$

Soit J l'idéal engendré par les images des Q_{ij} .

Définition 3.2.3. L'algèbre $Y(\mathfrak{g}) := A/J$ est appelée le *Yangian de \mathfrak{g}* .

Remarque 3.2.4. C'est la même définition que dans le cas classique.

En effet, l'image de $e_{ij} \otimes e_{kl} \otimes y$, transformé en un morphisme de $\mathfrak{gl}_n^{\otimes 2}$ sur $Y(\mathfrak{gl}_N)$ est y .

Références

- [1] J. Comes and B. Wilson. Deligne's category $\underline{\text{Rep}}(GL_\delta)$ and representations of general linear supergroups. *Represent. Theory*, 16 :568–609, 2012.
- [2] P. Deligne. La catégorie des représentations du groupe symétrique S_t , lorsque t n'est pas un entier naturel. In *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., pages 209–273. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007.
- [3] P. Etingof. Representation theory in complex rank, II. <http://arxiv.org/pdf/1407.0373v1.pdf>, 2014.
- [4] W. Fulton and J. Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [5] R. Goodman and Nolan R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [6] J. Kamnitzer. Representation theory, geometric langlands duality and categorification. <http://www.math.toronto.edu/jkamnitz/zurich/zurich.pdf>, 2014.
- [7] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [8] A. Molev. *Yangians and classical Lie algebras*, volume 143 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.