INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE: STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE SURFACES

FLORESTAN MARTIN-BAILLON

Table des matières

En 1872, lors de la prise de possession de sa chaire, Klein proposa un programme d'étude de la géométrie que l'on appelle maintenant le programme d'Erlangen. Ce programme a pour but d'unifier les différentes géométries connues à l'époque - géométrie euclidienne, affine, projective - en mettant l'accent sur la notion de symétrie. L'objet principal de ce travail devint alors le *groupe* des symétries d'une géométrie et la géométrie devint l'étude de l'action des groupes. Cette vision a depuis influencé toute la géométrie moderne développée au vingtième siècle.

Le développement de la géométrie différentielle et des groupes de Lie a donné un cadre rigoureux à ces idées. Munir une variété lisse d'une G-structure, c'est-à-dire changer le groupe de structure du fibré des repères de cette variété, est une manière de lui donner une géométrie *infinitésimale* de groupe de symétrie G. La géométrie riemannienne est, par exemple, l'étude des variétés qui possèdent une géométrie euclidienne infinitésimale. Si certaines conditions d'intégrabilités sont vérifiées, on peut prolonger cette structure infinitésimale à une structure *locale* : c'est la notion de variété localement modélée sur une géométrie, une (G, X)-structure au sens d'Ehresmann (voir la partie 1).

La *géométrisation* est le problème de comprendre quelles sont les géométries dont on peut munir une variété donnée. Ce problème est fortement lié à la topologie de la variété et la compréhension des géométries permet parfois d'éclairer des problèmes topologiques.

En dimension 2 ce problème est résolu par le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann (voir la partie 2). Ce théorème implique en particulier que toute surface peut-être munie d'une géométrie riemannienne de courbure constante et que le signe de la courbure dépend de la topologie de la surface. Cela permet de faire le lien entre la topologie, la structure complexe et la structure conforme des surfaces.

En dimension 3, Thurston a établi à la fin des années soixante-dix un ambitieux programme de géométrisation des variétés fermées de dimension 3. Il a conjecturé qu'on pouvait décomposer toutes ces variétés et que chaque morceau de la décomposition pouvait être muni d'une géométrie (au sens des (G, X)-structures) parmi 8 géométries modèles dont il fait la liste. Cette conjecture a des conséquences topologiques importantes comme la conjecture de Poincaré. Thurston a expliqué dans les années quatre-vingt comment résoudre une partie de ce programme, l'hyperbolisation, qui décrit les variétés admettant une géométrie hyperbolique. Au début des années deux mille, Perelman a prouvé cette conjecture grâce à l'étude d'un flot géométrique, le flot de Ricci, suivant un programme établi par Hamilton.

Si l'on fixe une variété M et une (G, X)-géométrie un autre problème intéressant est de chercher à classifier toutes les façons dont on peut munir cette variété d'une (G, X)-structure. Cela amène à considérer l'espace des *déformations* des (G, X)-structures sur cette variété M. Le prototype d'un tel espace est l'espace de Teichmüller qui classifie les structures conformes sur une surface (voir la partie 2). La structure locale de l'espace des déformations est liée aux variétés de représentations, qui sont des espaces de la forme

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/G,$$

où G agit par conjugaison. Ces espaces font le lien entre la topologie de M et les objets algébriques basés sur G que l'on peut construire sur M. Ils apparaissent en géométrie différentielle et algébrique comme espaces de modules de constructions géométriques. Ces objets ont été très étudiés ces trente dernières années en lien avec les structures géométriques et de nombreux autres domaines des mathématiques.

1. Structures géométriques

Le concept de structure géométrique est une formalisation de la notion de géométrie selon Klein. La formalisation de ce concept prend son origine dans les travaux d'Ehresmann [Ehr34] et a été développée tout au long du vingtième siècle. C'est la donnée d'une géométrie modèle et d'espaces construits localement à partir de cette géométrie. Plus précisément, choisissons une variété connexe X et un groupe de Lie G qui agit fidèlement, transitivement et analytiquement sur X par difféomorphismes. Une action est dite analytique si deux éléments de G dont les actions coïncident sur un ouvert non trivial sont égaux. Le couple (G, X) est une géométrie modèle. On peut alors construire des objets qui sont localement modelés sur cette géométrie, c'est la notion de (G, X)-variété.

Soit M une variété. Une X-carte est la donnée de (V, ϕ_V), où V est un ouvert de X et $\phi_V : V \to M$ est un diffeomorphisme sur son image. Un (G, X)-atlas sur M est une famille de X-cartes telle que pour toutes les cartes V et W la fonction de transition $\phi_V^{-1} \circ \phi_W$ soit la restriction d'un élément de G là où elle est définie, et telle que les ouverts $(\phi_V(V))$ recouvrent M. Deux atlas sont compatibles si leur réunion est encore un atlas.

Définition 1. *Une (G, X)-variété est la donnée d'une variété M est d'une (G, X)-structure sur M, c'est-à-dire la donnée d'une classe d'équivalence de (G, X)-atlas compatibles sur M.*

L'intérêt d'une telle définition est que les notions *géométriques* de X, c'est-à-dire celles qui sont invariantes par le groupe G, ont aussi un sens sur une (G, X)-variété. Donnons quelques exemples classiques (on consultera [Gol88a] pour de nombreux exemples et des références) :

— Quand X est $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{H}^n$ et que $G = \mathrm{Isom}(X)$ une (G, X)-variété est une variété riemannienne à courbure constante.
— Quand $X = \mathbb{R}^n$ et que G est le groupe des transformations affines de X on obtient la géométrie affine plate. C'est une géométrie où il n'y a pas de distances, mais où il y a bien une notion de parallélisme.
— Quand X est un espace projectif (réel ou complexe) et G son groupe de transformations projectives on obtient la notion de géométrie projective. Les structures projectives complexes apparaissent naturellement dans l'étude des équations différentielles linéaires sur les variétés complexes.
— La géométrie anti-de Sitter est un cas particulier de géométrie pseudo-riemannienne et correspond à $X = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ muni de la métrique lorentzienne induite par la forme de Killing sur son algèbre de Lie. Le groupe G est le groupe d'isométrie de cette métrique. Les variétés anti-de Sitter sont les variétés lorentziennes de dimension 3 de courbure constante égale à 1.

La définition que l'on a donnée est de nature locale. Nous donnons deux autres caractérisations de la notion (G, X)-structures qui permettent de mieux comprendre la structure globale d'une (G, X)-variété.

1.1. **Développante et holonomie.** Regardons un exemple de construction qui fournit une classe très riche de (G, X)-structures. Supposons que X soit simplement connexe et que l'on ait un sous-groupe discret H de G qui agit sur X librement et proprement. Alors $M = X/H$ est naturellement muni d'une structure de (G, X)-variété. Le revêtement universel de M s'identifie avec X et le groupe fondamental de M s'identifie avec H. On a donc une inclusion $\pi_1 M \hookrightarrow G$. Les (G, X)-structures que l'on obtient de cette façon sont dites complètes. En général, une (G, X)-structure n'est pas complète, mais on a tout de même une construction analogue.

Étant données deux (G, X)-variétés M et M', un (G, X)-morphisme de M vers M' est une application qui dans chaque carte est donnée par la restriction d'un élement de G. Par analyticité de G, si M est connexe, étant donnés deux (G, X)-morphismes $\phi, \psi : M \to X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $\phi = g \circ \psi$. Le revêtement universel de M, noté $\widetilde{M}$, est naturellement muni d'une structure de (G, X)-variété de sorte que la projection soit un

(G, X)-morphisme et que les morphismes de revêtements soient des (G, X)-morphismes.

Proposition 1.1. *Il existe un (G, X)-morphisme $D : \widetilde{M} \to X$ et une représentation $\rho : \pi_1 M \to G$ telle que D soit équivariant par rapport à ρ :*

$$D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D.$$

On dit que (D, ρ) est la paire développante / holonomie de la (G, X)-structure. La construction est la suivante : on part d'une carte $\phi : U \to X$. C'est bien un (G, X)-morphisme. Pour une autre carte $\psi : V \to X$ telle que $U \cap V \neq \emptyset$, il existe un $g \in G$ telle que $g \circ \psi = \phi$ sur $U \cap V$. De plus ce g est unique par analyticité de G. On peut donc prolonger ϕ en un (G, X)-morphisme de $U \cap V$ dans X. Comme $\widetilde{M}$ est simplement connexe, on peut effectuer cette opération de prolongement pour toutes les cartes de manière cohérente (et unique) et on obtient un (G, X)-morphisme $\widetilde{M} \to X$. Si $\gamma \in \pi_1 M$ alors γ agit sur $\widetilde{M}$ par (G, X)-morphisme et donc $D \circ \gamma$ est un autre (G, X)-morphisme $\widetilde{M} \to X$. Il existe donc un unique $\rho(\gamma) \in G$ tel que $D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D$. Il est clair que ρ est un morphisme et que D est une application équivariante par rapport à cette représentation. Une telle paire est unique modulo l'action naturelle de G.

Réciproquement, étant donnée une variété M avec une représentation $\rho : \pi_1 M \to G$ et un difféomorphisme local $D : \widetilde{M} \to X$ qui est ρ-équivariant alors il existe une unique (G, X)-structure sur M telle que (D, ρ) soit une paire développante/holonomie pour cette structure.

L'application développante est une globalisation des cartes locales de la (G, X)-variétés tandis que l'holonomie est une globalisation des applications de recollement.

1.2. **Fibré tangent plat.** Grâce à une paire développante/holonomie on peut construire un fibré sur X auquel on peut penser comme l'analogue de l'espace tangent.

Proposition 1.2. *Il existe un fibré localement trivial sur M, de fibre X et de groupe de structure G, muni d'une connexion plate dont l'holonomie est à valeur dans G et d'une section transverse.*

Esquissons la construction du fibré. Le groupe fondamental de M agit librement et proprement sur le produit $\widetilde{M} \times X$, par morphisme de revêtement sur le facteur $\widetilde{M}$ et par la représentation d'holonomie sur le facteur X. Notons E l'espace quotient. La projection $\widetilde{M} \times X \to M$ est invariante par rapport à cette action et descend en une projection $E \to M$. On peut vérifier que c'est un fibré localement trivial de fibre X. Ce fibré vient avec des données additionnelles. L'espace $\widetilde{M} \times X$ admet un feuilletage horizontal transverse au fibre de la projection qui est compatible avec l'action du groupe fondamental et qui donc descend au quotient. Cela définit une connexion au sens d'Ehresmann sur E qui est plate (localement horizontale). L'holonomie de cette connexion est à valeur dans G. L'application développante $D : \widetilde{M} \to X$ induit une section du fibré $s : M \to E$. On peut montrer que réciproquement un triplet fibré / connexion / section qui vérifie les mêmes hypothèses permet de reconstruire la (G, X)-structure de M et qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré.

1.3. **Classification des (G, X)-structures.** Le problème principal dans la théorie des (G, X)-structures est de comprendre, étant donnée une variété M, toutes les (G, X)-structures dont on peut munir M. Pour cela on introduit l'ensemble des (G, X)-structures sur M que l'on note provisoirement $\mathscr{M}_{(G,X)}(M)$. Les constructions que l'on vient de donner montrent que cet ensemble peut être vu comme l'ensemble des couples développante/holonomie ou l'ensemble des triplets fibré/connexion/section. Ces ensembles peuvent être munis de topologies naturelles qui sont compatibles avec les différentes identifications. On se contentera pour le moment d'une description naïve de cet espace et de sa topologie. On verra dans la partie 3 que cet ensemble, correctement défini, possède une structure globale très riche et très compliquée qui dépend fortement de la géométrie que l'on étudie.

Le seul résultat général qui existe sur cet ensemble de structures décrit comment une (G, X)-structure dépend localement de son holonomie. Il est dû, sous sa forme la plus générale, à Thurston [TL97] mais de nombreux cas particuliers étaient déjà connus. Pour une formulation plus précise et une démonstration, voir [Gol88a].

Théorème 1 (Principe d'Ehresmann-Thurston)**.** *Soit M une variété munie d'une (G, X)-structure V et ρ son holonomie. Alors, pour toute représentation ρ' assez proche de ρ (pour la topologie compacte ouverte de* $\mathrm{Hom}(\pi_1 M, G)$*) il existe une (G, X)-structure sur M dont ρ' est l'holonomie. De plus, pour toute (G, X)-structure W sur M assez proche de V, si les deux structures ont des holonomies conjuguées, alors V et W sont isotopes.*

Ce résultat est un principe de déformation. Il indique qu'en déformant l'holonomie d'une (G, X)-structure on trouve de nombreux autres exemples de structures. Il dit aussi que localement, une (G, X)-structure est déterminée par son holonomie à isotopie près.

1.4. **Structures singulières.** Il existe en générale des obstructions topologiques à l'existence d'une (G, X)-structure sur une variété donnée. Par exemple, il existe des géométries riemanniennes de courbure constante sur chaque surface fermée, mais le signe de la courbure est déterminé par le genre de la surface par le théorème de Gauss-Bonnet. Si l'on autorise la structure à avoir des singularités, alors on enlève souvent ces restrictions topologiques et l'on élargit l'ensemble des structures que supporte une variété donnée. La définition de structure singulière varie en fonction des structures considérées, mais c'est généralement la donnée d'une structure non singulière sur le complémentaire d'un ensemble de codimension deux, avec un comportement prescrit au voisinage des points singuliers.

Exemple 1.3. Quand $X = \mathbb{C}$ et G est le groupe des translations de $\mathbb{C}$, une (G, X)-structure est une surface de translation. La seule surface à admettre une structure de surface de translation non singulière est le tore, tandis que toutes les surfaces possèdent des structures singulières. Les surfaces de translation admettent une géométrie et une dynamique très riche et sont très étudiées. Voir le survey [Zor06].

2. Exemple fondamental : espace de Teichmüller

L'espace de Teichmüller est un objet d'étude central en mathématiques qui joue un rôle dans des domaines aussi divers que l'analyse complexe, la géométrie algébrique, la topologie de basse dimension, la théorie géométrique des groupes, la géométrie hyperbolique et même la physique théorique. Pour avoir une idée des nombreuses directions dans lesquelles se développe ce domaine voir [Pap07]. Nous allons introduire cet objet et expliquer pourquoi il joue un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie des surfaces et des variétés de petite dimension.

Soit S une surface fermée et orientée de genre g. Une structure conforme marquée sur S est une classe d'équivalence de difféomorphismes $\Phi : S \to X$ où X est une surface de Riemann, où $\Phi_1 : S \to X_1$ et $\Phi_2 : S \to X_2$ sont équivalents si $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 : X_1 \to X_2$ est isotope à un biholomorphisme. De manière équivalente, une structure conforme marquée est une orbite de structure de surface de Riemann pour l'action naturelle de $\mathrm{Diff}_0^+(S)$, l'ensemble des difféomorphismes de S préservant l'orientation qui sont isotopes à l'identité. On note $\mathrm{Teich}(S)$ l'ensemble des structures conformes marquées sur S. C'est *l'espace de Teichmüller* de S. On sait qu'il n'est pas vide. Si l'on fait agir tout le groupe $\mathrm{Diff}^+(S)$ et pas seulement les difféomorphismes isotopes à l'identité on obtient *l'espace de modules* des surfaces de Riemann de genre g. L'espace de modules est donc le quotient de $\mathrm{Teich}(S)$ par le *mapping class group* de S qui est le groupe $\mathrm{MCG}(S) := \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}_0^+(S)$. Ce groupe est d'une grande importance en topologie, en dynamique et en théorie combinatoire des groupes. Une propriété des surfaces est que $\mathrm{MCG}(S) = \mathrm{Out}_+(\pi_1 S) := \mathrm{Aut}_+(\pi_1 S)/\mathrm{Int}(\pi_1 S)$ par le théorème de Dehn-Nielsen.

L'espace de modules des surfaces de Riemann est considéré depuis Riemann lui même qui a donné, sans preuve formelle, la dimension de cet espace. C'est un objet important en géométrie algébrique, l'espace de modules des courbes algébriques. Cependant il est singulier alors que l'espace de Teichmüller est une variété topologique et même une variété complexe lisse.

Le lien entre l'espace de Teichmüller est les structures géométriques est donné par le théorème d'uniformisation de Riemann. Ce théorème a été prouvé au début du siècle par Poincaré et Koebe et est l'un des premiers résultats fondamentaux de la théorie (voir [dSG10] pour une perspective historique).

Théorème 2 (d'uniformisation)**.** *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe au plan complexe $\mathbb{C}$, à la sphère de Riemann $\mathbb{S}^2$ ou au disque unité $\mathbb{D}$.*

Le lien avec la géométrie est que ces espaces modèles sont exactement les modèles de variétés riemanniennes complètes de dimension 2 simplement connexe de courbure constante : le plan complexe est de courbure nulle pour la métrique euclidienne, la sphère de Riemann de courbure égale à 1 pour la métrique sphérique et le disque unité de courbure -1 pour la métrique de Poincaré. De plus, ces métriques sont conformes par rapport à la structure de surface de Riemann et leurs groupes d'isomorphisme agissent par isométries.

Ce théorème implique que toute surface de Riemann est le quotient d'un de ces espaces modèles par l'action de son groupe fondamental par isométrie. Cette action fidèle et discrète, modulo conjugaison, caractérise la surface de Riemann. Toute surface de Riemann est donc munie d'une unique métrique riemannienne conforme à courbure constante. On peut donc énoncer :

Proposition 2.1. *L'espace de Teichmüller d'une surface S s'identifie à l'ensemble des structures riemanniennes à courbure constante marquées sur S. Il s'identifie aussi à l'ensemble*

$$\mathrm{Hom}_{fd}(\pi_1(S), \mathrm{Isom}^+(\mathscr{M}))/\mathrm{Isom}^+(\mathscr{M}),$$

des représentations fidèles et discrètes de son groupe fondamental dans le groupe des isométries directes de l'espace modèle $\mathscr{M}$ qui le revêt modulo l'action de ce groupe par conjugaison.

Nous nous intéresserons seulement aux surfaces qui sont revêtues par $\mathbb{D}$ c'est-à-dire celles qui supportent des géométries hyperboliques. Ce sont celles qui sont de caractéristique d'Euler négative par le théorème de Gauss-Bonnet ou de manière équivalente de genre plus grand que 2. Dans ce cas $\mathrm{Isom}^+\mathscr{M} \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ si l'on identifie $\mathscr{M}$ avec le demi-plan hyperbolique. Une des motivations pour étudier la dimension 2 est qu'une même surface admet beaucoup de structures hyperboliques ce qui constraste avec la dimension plus grande que 3 où si une variété fermée admet une structure hyperbolique, celle-ci est unique par le théorème de rigidité de Mostow.

La description de $\mathrm{Teich}(S)$ comme ensemble de structures hyperboliques permet de montrer la paramétrisation suivante :

Théorème 3 (Fenchel-Nielsen)**.** *L'espace de Teichmüller est homéomorphe à $\mathbb{R}^{3|\chi_g|}$.*

Ce résultat est une description très géométrique. On commence par décomposer la surface en $|\chi_g|$ pantalons (une surface à bord homéomorphe à une sphère privée de trois disques ouverts) en lui enlevant $\frac{3}{2}|\chi_g|$ courbes simples. Une structure hyperbolique sur un pantalon est déterminée par la longueur de ses trois composantes de bords. Pour recoller ces pantalons, il faut préciser un paramètre de twist en chaque courbe de la décomposition. On obtient bien $3|\chi_g|$ paramètres réels. On trouvera une preuve de cette décomposition dans [IT12] par exemple.

3. Représentations de groupes de surfaces et variétés de représentations

Notons Γ le groupe fondamental d'une surface fermée orientée S et G un groupe de Lie algébrique. L'objet qui nous intéresse est

$$\mathcal{R}(S,G) := \mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G,$$

c'est la *variété de représentations* associée à S et G. D'après le principe d'Ehresmann-Thurston, l'étude de cet objet permet de comprendre les déformations de (G,X)-structures. Comme Γ est finiment engendré $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ est une variété algébrique. Le quotient par l'action de G est singulier mais on peut se restreindre à des points stables $\mathrm{Hom}^{st}(\Gamma, G)$ pour lequel l'action de G est propre. Selon l'interprétation des structures géométriques comme

G-fibré plat, $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ est un espace de déformations de G-fibré plat. L'étude de cet espace dépend fortement du groupe G considéré et nous allons-en expliquer quelques propriétés seulement dans le cas $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

En interprétant une représentation $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma, G)$ comme une classe d'équivalence de G-fibré plat on peut lui associer $\mathbf{eu}(\rho) \in \pi_1(G) \simeq \mathbb{Z}$ qui est une classe caractéristique du G-fibré appelée la classe d'Euler de la représentation. La fonction **eu** gouverne la topologie globale de la variété de représentation. Le premier résultat sur cette fonction est l'inégalité de Milnor-Wood (voir [Gol88b]) :

$$|\mathbf{eu}(\rho)| \leq |\chi_g|$$

Goldman a démontré dans [Gol88b] que la classe d'Euler classifie les composantes connexes :

Théorème 4. *Les composantes connexes de $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ sont exactement les $\mathbf{eu}^{-1}(k)$ pour $|k| \leq \chi_g$.*

De plus, il montre que la classe d'Euler détecte les représentations fuchsiennes : une représentation ρ est fuchsienne si et seulement si sa classe d'Euler est maximale, c'est à dire $|\mathbf{eu}(\rho)| = |\chi_g|$. Il y a donc dans $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ deux composantes connexes qui sont des copies de l'espace de Teichmüller $\mathrm{Teich}(S)$.

4. Géométrisation des représentations de groupes de surfaces

L'étude des structures géométriques conduit à s'intéresser à certains sous-ensembles des variétés de représentations. Réciproquement on peut se demander si une représentation admet une interprétation géométrique, par exemple si c'est l'holonomie d'une certaine structure géométrique. C'est le problème de *géométrisation* d'une représentation. Encore une fois ce problème dépend fortement de la géométrie que l'on étudie.

4.1. **Exemple de la composante de Hitchin.** Pour chaque $n \geq 2$, il existe une injection i_n de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ dans $G_n = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ unique à conjugaison près. Cette injection induit un plongement de $\mathrm{Teich}(S)$ dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G_n)/G_n$. La composante connexe de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G_n)/G_n$ qui contient $\mathrm{Teich}(S)$ est appelée la composante de Hitchin dans G_n. Les représentations de Hitchin sont une manière de généraliser les représentations fuchsiennes : les représentations dans cette composante sont celles que l'on peut continûment déformer en une représentation fuchsienne. Ces représentations ont été introduites par Hitchin en 1992 dans [Hit92]. Il étudie cette composante grâce à des outils d'analyse, les fibrés de Higgs, et montre en particulier le résultat suivant :

Théorème 5. *La composante de Hitchin est difféomorphe à une boule de dimension $(n^2 - 1)|\chi_g|$.*

Bien que Hitchin pense à cette composante comme une généralisation de l'espace de Teichmüller, il admet qu'il ne sait pas interpréter géométriquement ces représentations. Quand $n = 3$ il conjecture que la composante de Hitchin paramétrise les structures projectives convexes marquées sur S, ce que montrent Goldman et Choi en 1993 dans [CG93]. L'étude de ces composantes est le point de départ de la *Higher Teichmüller Theory*, vaste programme qui est à l'interface de la géométrie, de la dynamique et de l'analyse complexe.

4.2. **Domination de représentations.** Soient deux espaces métriques X_1, X_2 et $\rho_i : \Gamma \to \mathrm{Isom}(X_i)$ deux représentations du groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(S)$ dans les groupes d'isométries de ces espaces. On dit que ρ_1 domine ρ_2 (et on note $\rho_1 \geq \rho_2$) s'il existe une application $f : X_1 \to X_2$ qui est 1-lipschitzienne et équivariante par rapport à ρ_1 et ρ_2. On dit que la domination est stricte si il existe une telle application qui est c-lipschitzienne pour une constante $c < 1$ (et on le note $\rho_1 > \rho_2$).

Cette notion est fortement liée à la notion de *spectre des longueurs* d'une représentation. Pour une représentation ρ à valeur dans les isométries d'un espace métrique X le spectre des longueurs de ρ est la fonction $l_\rho : \Gamma \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$l_\rho(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \rho(\gamma) \cdot x).$$

On dit que $l_\rho(\gamma)$ est la longueur de translation de γ pour ρ. Cette fonction contient beaucoup d'informations sur la représentation. Si la représentation ρ_1 domine la représentation ρ_2 alors il est clair que le spectre des longueurs de ρ_1 domine celui de ρ_2 c'est à dire que $l_{\rho_1}(\gamma) \geq l_{\rho_2}(\gamma)$ pour tous les $\gamma \in \Gamma$.

La relation de domination a été introduite pour classifier les espaces anti-de Sitter compacts de dimension 3. D'après [GKW15] ce sont, à revêtement et quotient fini près, les quotients de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ par un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ qui agit librement proprement discontinuement. De plus ces groupes sont de la forme

$$(j, \rho)(\Gamma) = \{(j(\gamma), \rho(\gamma)); \gamma \in \Gamma\},$$

où j et ρ sont des représentations $\Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et j est fuchsienne et domine strictement ρ. Une telle paire (j, ρ) est dite admissible. Le résultat suivant permet de décrire les paires admissibles. Il a été prouvé simultanément par Guéritaud-Kassel-Wolf dans [GKW15] (pour le cas $X = \mathbb{H}^2$) et par Deroin-Tholozan dans [DT13] (dans le cas général).

Théorème 6. *Soit ρ une représentation de Γ dans le groupe des isométries de X, une variété riemanienne* CAT (-1). *Il existe une représentation fuchsienne j qui domine ρ. De plus on peut rendre cette domination stricte, sauf s'il existe un plongement isométrique de $\mathbb{H}^2$ dans X en restriction auquel ρ est fuchsienne.*

Une variété riemanienne CAT (-1) est une variété riemanienne simplement connexe complète de courbure sectionelle plus petite que -1. Remarquons qu'une représentation fuchsienne ne peut pas dominer strictement une autre représentation fuchsienne. Quand $X = \mathbb{H}^2$ ce théorème permet de dire que pour toute représentation $\rho : \Gamma \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ de classe d'Euler non maximale, il existe une représentation fuchsienne j telle (j, ρ) soit admissible. Dans [Tho14] Tholozan décrit topologiquement l'ensemble des représentations fuchsiennes qui dominent une représentation ρ donnée : il est homéomorphe à Teich(S). On a donc une classification complète des paires admissibles.

La notion de domination s'avère intéressante au-delà du contexte des variétés anti-de Sitter. Le théorème 6 exprime que les représentations fuchsiennes sont maximales en un certain sens parmi les représentations dans les isométries des variétés CAT (-1). Cela permet de transférer certaines estimations valables pour les représentations fuchsiennes à ces représentations. Donnons un exemple. Le théorème suivant est un cas particulier d'un résultat conjecturé par Bourdon et prouvé par Bonk-Kleiner dans [BK04].

Théorème 7. *Soit ρ une représentation convexe cocompact de Γ dans le groupe des isométries de X un espace métrique* CAT (-1)*. Alors l'ensemble limite de $\rho(\Gamma)$ dans le bord à l'infini de X est de dimension de Hausdorff plus grande que* 1*, avec égalité si et seulement si ρ est fuchsienne en restriction à un plongement isométrique de $\mathbb{H}^2$ dans X.*

Le théorème 6 permet de donner une démonstration simple de ce résultat quand X est une variété CAT (-1). En effet, quand ρ est une représentation convexe cocompact, la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de $\rho(\Gamma)$ dans le bord à l'infini de X coïncide avec *l'exposant critique* de ρ qui est la plus petite constante $\delta(\rho)$ telle que la série de Poincaré

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\rho(\gamma)x)}$$

converge pour tout $s > \delta(\rho)$. Il est clair que si j domine ρ alors l'exposant critique de ρ est plus grand que celui de j et il est connu que l'ensemble limite d'une représentation fuchsienne est de dimension de Hausdorff 1. Dans mon mémoire de master, j'ai étudié comment étendre le théorème 6 pour X un espace métrique CAT (-1) général et non pas seulement une variété riemanienne. Cela permettrait de donner une autre démonstration de 7 dans le cas général.

Si le théorème 6 montre que les représentations fuchsiennes sont maximales pour la domination parmi les représentations dans les isométries des espaces CAT (-1), Tholozan a montré dans [Tho15] que les représentations fuchsiennes sont *minimales* pour la domination dans la composante de Hitchin en dimension 3. Cela a permis de montrer une version forte du *collar lemma* de Lee-Zhang [LZ14] pour les représentations de la composante de Hitchin de dimension 3.

4.3. **Géométrisation par des surfaces hyperboliques branchées.** On considère maintenant $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathcal{R} = \mathrm{Hom}(\Gamma, G)/G$ la variété de représentations associée. On a vu que les composantes connexes de $\mathcal{R}$ sont classifiées par la classe d'Euler $\mathbf{eu} : \mathcal{R} \to \mathbb{Z}$ dont l'image est $[-|\chi_g|, |\chi_g|]$ par l'inégalité de Milnor-Wood. Les représentations fuchsiennes sont celles de classes d'Euler maximales. Elles correspondent aux structures hyperboliques sur la surface S. On sait que le mapping class group agit proprement discontinuement sur ces composantes. Le cas des composantes *non-maximales* est beaucoup moins bien connu. Deux questions se posent naturellement : peut-on géométriser les représentations non maximales ? peut-on décrire l'action du mapping class group sur les composantes non-maximales ?

Dans [Gol05] Goldman conjecture que l'action du mapping class group sur chaque composante non-maximale est ergodique. Dans le cas du genre $g = 2$ Marché-Wolff ont montré dans [MW15] et [MW16] que cette conjecture était vraie. Le cas général est toujours ouvert.

Une des manières de produire des représentations de classe d'Euler non-maximale est de considérer des structures hyperboliques *branchées*. Une structure hyperbolique branchée est définie comme une (G, X)-structure sauf que l'on autorise les cartes à avoir des singularités isolés de la forme $z \mapsto z^k$. C'est la même chose qu'une structure hyperbolique conique où tous les angles sont des multiples de 2π. Considérons une structure hyperbolique branchée en les points $z_1, \ldots, z_k$ avec un angle conique θ_i en z_i. Une telle structure définit une holonomie $\rho : \pi_1(S \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}) \to G$ telle qu'une courbe qui entoure une singularité z_i soit envoyée sur une rotation d'angle θ_i. Comme θ_i est un multiple de 2π, la rotation est triviale et la représentation se factorise à travers une représentation $\pi_1(S) \to G$. C'est l'holonomie de la structure branchée. Le théorème de Gauss-Bonnet garantit que :

$$\mathbf{eu}(\rho) = \chi_g + \frac{1}{2\pi} \sum_i (\theta_i - 2\pi) .$$

Dans [Tro91] Troyanov prouve un théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann à singularités coniques très générales. Il implique en particulier qu'étant donnée une structure de surface de Riemann X sur S, des points $z_1, \ldots, z_k$ et des multiplicités $m_1, \ldots, m_k$ alors il existe une structure hyperbolique branchée en les points $z_1, \ldots, z_k$ avec les multiplicités $m_1, \ldots, m_k$ qui est *conforme* à X si et seulement si

$$\chi_g + \sum_i m_i < 0.$$

Il sera plus pratique de ne pas considérer de multiplicités mais d'autoriser les points z_i à ne pas être distincts : la multiplicité du branchement est alors le nombre de fois où le point apparaît. Avec cette convention et le théorème d'uniformisation de Troyanov on voit que pour tout d tel que $\chi_g + d < 0$ et pour tout $X \in \mathrm{Teich}(S)$ il existe une application d'uniformisation $Sym^d(X) \to \mathbf{eu}^{-1}(\chi_g + d)$ où $Sym^d(X)$ est la d-puissance symétrique de X, c'est-à-dire les ensembles avec répétitions de d points de X. Ces applications s'assemblent pour former une application d'uniformisation $U : \Sigma^d(S) \to \mathbf{eu}^{-1}(\chi_g + d)$ où $\Sigma^d(S)$ est un fibré holomorphe au dessus de $\mathrm{Teich}(S)$ de fibre $Sym^d(X)$ au dessus du point $X \in \mathrm{Teich}(S)$. On sait que U n'est pas surjective. Cependant Hitchin a montré que c'est une équivalence d'homotopie. Goldman, dans [Gol08], conjecture que toutes les représentations dont l'image n'est pas discrète sont dans l'image de U. Une réponse affirmative à cette conjecture permettrait de géométriser une grande classe de représentations non-maximales.

Références

[BK04] Mario Bonk and Bruce Kleiner. Rigidity for quasi-fuchsian actions on negatively curved spaces. *International Mathematics Research Notices*, 2004(61) :3309–3316, 2004.

[CG93] Suhyoung Choi and William M Goldman. Convex real projective structures on closed surfaces are closed. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 118(2) :657–661, 1993.

[dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire*. ENS editions, 2010.

[DT13] Bertrand Deroin and Nicolas Tholozan. Dominating surface group representations by fuchsian ones. *arXiv preprint arXiv :1311.2919*, 2013.

[Ehr34] Charles Ehresmann. Sur la topologie de certains espaces homogenes. *Thèses françaises de l'entre-deux-guerres*, 162 :391–443, 1934.

[GKW15] François Guéritaud, Fanny Kassel, and Maxime Wolff. Compact anti-de sitter 3-manifolds and folded hyperbolic structures on surfaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 275(2) :325–359, may 2015.

[Gol88a] William M. Goldman. Geometric structures and varieties of representations. In *Geometry of Group Representations : Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference Held July 5-11, 1987 with Support from the National Science Foundation*, volume 74, page 169. American Mathematical Soc., 1988.

[Gol88b] William M Goldman. Topological components of spaces of representations. *Inventiones mathematicae*, 93(3) :557–607, 1988.

[Gol05] William M Goldman. Mapping class group dynamics on surface group representations. *arXiv preprint math/0509114*, 2005.

[Gol08] William M Goldman. Higgs bundles and geometric structures on surfaces. *arXiv preprint arXiv :0805.1793*, 2008.

[Hit92] Nigel J Hitchin. Lie groups and teichmüller space. *Topology*, 31(3) :449–473, 1992.

[IT12] Yoichi Imayoshi and Masahiko Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer Science & Business Media, 2012.

[LZ14] G.-S. Lee and T. Zhang. Collar lemma for Hitchin representations. *ArXiv e-prints*, November 2014.

[MW15] Julien Marché and Maxime Wolff. Six-point configurations in the hyperbolic plane and ergodicity of the mapping class group. *arXiv preprint arXiv :1509.02290*, 2015.

[MW16] Julien Marché and Maxime Wolff. The modular action on psl(2,r)-characters in genus 2. *Duke Mathematical Journal*, 165(2) :371–412, 2016.

[Pap07] Athanase Papadopoulos, editor. *Handbook of Teichmüller theory*, volume 1 of *IRMA lectures in mathematics and theoretical physics*. European Mathematical Society, Zürich, 2007.

[Tho14] Nicolas Tholozan. Dominating surface group representations and deforming closed anti-de sitter 3-manifolds. 2014.

[Tho15] Nicolas Tholozan. Entropy of hilbert metrics and length spectrum of hitchin representations in psl(3,r). *arXiv preprint arXiv :1506.04640*, 2015.

[TL97] William P Thurston and Silvio Levy. *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1. Princeton university press, 1997.

[Tro91] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 324(2) :793–821, 1991.

[Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. *Frontiers in number theory, physics, and geometry I*, pages 439–585, 2006.