Introduction à la dynamique de solitons

1. Introduction et présentation des équations

Pour les équations dispersives ou diffusives linéaires, comme l'équation de Schrödinger ou l'équation de la chaleur, une donnée initiale va se dispersé ou se diffuser dans tous l'espace quand le temps augmente. Par exemple, si on considère une barre de métal avec un point très chaud en son centre, il va se diffuser dans toute la barre et la température (si la barre est infini ou qu'elle perd de la chaleur par contact avec le milieu exterieur) va tendre vers 0.

Dans le cas où on rajoute un terme non linéaire à ces équations, il est possible que ce dernier cherche à concentrer la solution. On peut alors construire des solutions qui ne se diffuse ou ne se disperse pas, la dispersivité du terme linéaire est compensé par la non linéarité. On parle de soliton. Ce sont des solutions qui ne dépendent pas (ou très simplement) du temps et qui restent concentrées autour d'un point.

Ce genre de phénomène apparait dans de nombreuses équations provenant de la physique, et ces solitons ont une importance dans la compréhension des solutions générales à ces équations. Dans chacun des cas étudiées, on parlera de la signification physique du soliton.

On va prendre ici en exemple trois équations dispersives :

La première est l'équation de Schrodinger non linéaire, qui s'écrit

$$\text{(NLS)}\begin{cases} i\delta_t \Psi + \Delta\Psi = \varepsilon|\Psi|^{p-1}\Psi \\ \Psi(x,0) = \Psi_0(x) \end{cases}$$

avec $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. p est la puissance de la non linéarité.

Cette equation intervient en physique, notamment dans les fibres optiques. Elle décrit la propagation de l'onde Ψ.

La deuxième est l'equation d'Hartree

$$(H)\begin{cases} i\delta_t u + \Delta u = \left(\frac{1}{4\pi\,\|x\|} * |u|^2\right)u \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

avec $u(x,t) \in \mathbb{C}$ pour $x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$.

Elle apparait en mécanique quantique gravitationnel, u désigne la probabilité de présence de particules (et donc une sorte de densité massique).

La dernière est l'équation de Gross-Piatevskii

$$(\mathrm{GP})\begin{cases} i\delta_t\Psi+\Delta\Psi=(|\Psi|^2-1)\Psi \\ |\Psi|\to 1 \text{ à l'infini} \\ \Psi(x,0)=\Psi_0(x) \end{cases}$$

avec $\Psi(x,t)\in\mathbb{C}$ pour $x\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}$

Elle décrit l'évolution des superfluides ou des superconducteurs dans le cas simplifié où il y a une anisotropie dans la troisième dimension, et où on peut se ramener à un problème en deux dimensions.

Les deux premières équations ont le même noyau linéaire $i\delta_t+\Delta$ qui est le noyau de Schrödinger et qui est dispersif. Sans la non linéarité, les solutions se dispersent dans l'espace.

Pour la troisième équation, elle a aussi un tel noyau, mais de part sa condition en l'infini, elle ne se comporte pas de façon identique.

L'étude de solitons peut se faire dans bien d'autres équations que ces trois là. Dans la suite, on va s'interesser à la construction de ces solitons, à leurs stabilité puis à la construction de multisolitons, c'est à dire de solutions qui ressemblent à une somme de solitons.

2. Existence et proprietés des solitons

Pour les équations issues de la mécanique quantique, il y a généralement une phase en e^{it} pour toute les solutions. Il est donc naturelle de chercher les solitons sous la forme

$$\Psi=Q(x)e^{\mathrm{it}}$$

La probabilité de présence en mécanique quantique étant $|\Psi|^2$, si on trouve une telle solution, la probabilité de présence ne dépendera pas du temps.

On aboutit alors, pour (NLS) et (H) aux equations :

$$(\mathrm{NLS}_s)\colon \Delta Q=|Q|^{p\text{-}1}Q+Q$$

et

$$(H_s)\colon \Delta Q=\left(\frac{1}{4\pi\,\|x\|}*|Q|^2\right)Q+Q$$

On a pas forcément unicité des solutions à ces équations, mais on l'a dans une classe plus petite :

Theorem 1. *Si 1 < $p<\frac{n+2}{n-2}$, L'equation* (NLS_s) *admet une unique solution (à symétrie près) parmis les fonctions Q radiales et positives. Cette solution peut s'écrire sous la forme $Q(x)=q(|x|)$ avec q décroissante, qui tend exponentiellement vite vers 0, et il en est de même de toute ses dérivées.*

Theorem 2. *L'équation (H_s) admet une unique solution (à symétrie près) parmis les fonctions Q radiales et positives. cette solution peut s'écrire sous la forme $Q(x)=q(|x|)$ avec q décroissante. De plus, q décroit exponentiellement vite à l'infini.*

On peut voir le soliton de Hartree comme une particule massique classique. Sa probabilité de présence est très concentrée autour d'un point.

Pour la dernière équation, on cherche tout simplement des solutions indépendantes du temps, $\Psi=Q$ et on a l'équation

$$(\mathrm{GP}_s)\begin{cases} \Delta Q=(|Q|^2-1)Q \\ |Q|\to 1 \text{ à l'infini} \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas trouver de solutions radiales autre que la fonction constante 1, mais on a une famille de solutions

Theorem 3. *Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$ il existe une unique fonction f_n parmis les fonctions radiales positives à symétrie près telle que $V_n(x)=f_n(r)e^{\mathrm{i}n\theta}$ soit solution de (GP_s). De plus, f_n est croissante, $f_n(0)=0$ et elle tend vers 1 à l'infini. De plus, $1-f_n(r)=O\left(\frac{1}{r^2}\right)$ à l'infini.*

Pour cette équation, la structure étant un peu différente des deux autres (notamment parce que la solution trivial est 1 et non 0), on parlera de vortex plutôt que de soliton. On dira que V_n est le vortex de degrée n.

Tout ces solitons sont construit à partir de solutions d'EDO donc même si on ne peut pas les exprimer explicitement, on peut pour la plupart donner le développement à l'infini, leurs valeurs en 0, leurs normes et le signe de leurs dérivées.

Chaque équation possède un certain nombre de symétries (notamment l'invariance par translation) qui donne une famille de solitons.

Pour (NLS_s) on a la famille

$$S_{\mathrm{NLS}}=\left\{Q(x-x_0-\beta t)e^{\mathrm{it}}e^{i\frac{\beta}{2}\left(x-\frac{\beta}{2}t\right)}, \beta\in\mathbb{R}^n, x_0\in\mathbb{R}^n\right\}$$

On remarque entre autre que les solitons peuvent se déplacer à vitesse constante, à condition de modifier un peu la phase (entre autre, elle dépend de la position, mais physiquement, la probabilité de présence ne dépend que du module de la solution)

Pour (H_s) on a la famille

$$S_H=\left\{\frac{1}{\lambda^2}Q\left(\frac{x-\beta t}{\lambda}\right)e^{-i\gamma(t)+i\frac{\beta}{2}x}, \beta\in\mathbb{R}^3, \lambda\in\mathbb{R}^*\right\}$$

De même, les solitons peuvent se déplacer à vitesse constante quitte à modifier la phase. λ est relié à la masse du soliton, qui est la quantité (conservée) $\|Q\|_{L^2}$

Pour (GP_s) on a :

$$S_{\mathrm{GP}} = \{V_n(x - x_0)e^{i\gamma}, x_0 \in \mathbb{R}^2, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Pour les vortex, on ne peut que les translater et ajouter une phase globale. Il n'est pas possible d'avoir un vortex seul qui se déplace.

Les solutions qui apparaissent en physique pour ce genre d'équations doivent être des solutions stables, c'est à dire que si on les perturbe un peu, elles restent proche de la solution sans la pérturbation. Sinon, elle n'a aucune chance d'appraître dans la "nature" où il y a toujours des petites perturbations. On peut montrer que les solitons dans les trois cas sont stables :

Proposition 4. *Pour $1 < p < 1 + \frac{4}{n}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisament petit et tout $u_0 \in H^1$, si on note u la solution de* (NLS) *qui a pour condition initiale u_0 et si $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \varepsilon$, alors il existe $\sigma(t), \gamma(t)$ deux fonctions tel que pour tout temps,*

$$\|u(x,t) - Q(x - \sigma(t))e^{i\gamma(t)}\|_{H^1} < C\varepsilon$$

De plus, $|\sigma'| < C\varepsilon$ et $|\gamma' - 1| < C\varepsilon$

En réalité, un soliton n'est pas stable en raison des symétries possible. Ce que dit cette proposition, c'est que si on perturbe un peu un soliton, alors on reste proche de la sous varieté S_{NLS}.

On a un résultat similaire pour Hartree, une solution intialement proche de S_H reste proche de S_H. Pour (GP), il en est de même, mais que pour les vortex de degrée ± 1, les autres sont instables.

Une façon d'étudier la stabilité d'une solution dans le but d'obtenir des résultats comme la proposition ci dessus est d'étudier le linéarisé autour de la solution.

C'est à dire, par exemple pour (GP), si on met comme ansatz $\Psi = \Psi_0 + h$ où Ψ_0 est solution de (GP), alors l'équation sur h devient

$$i\delta_t h + \Delta h = (2|\Psi_0|^2 - 1)h + \Psi_0^2 \bar{h} + O(h^2)$$

On note alors le linéarisé

$$L(h) = -\Delta h + (2|\Psi_0|^2 - 1)h + \Psi_0^2 \bar{h}$$

Si h est petit, c'est ce terme là qui joue le rôle dominant sur l'évolution de h (c'est à dire sur $\delta_t h$). On cherche à montrer que c'est un opérateur positif, c'est à dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives, sauf celles liées aux symétries qui sont alors des valeur propre nulle.

Par exemple, pour la stabilité du vortex $+1$ noté V_1, on a le résultat suivant

Proposition 5. *En notant* $<f, g> = \Re\left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx}\right)$ *le produit scalaire sur* $L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$*, on a que pour tout* h*,* $<L(h), h> \geqslant 0$ *et si* $<L(h), h> = 0$*, alors*

$$h = c_1 \delta_{x_1} V_1 + c_2 \delta_{x_2} V_1$$

Pour deux constantes c_1*et* c_2*.*

Toutes les valeurs propres de L sont strictement positives, sauf dans les directions $\delta_{x_1}V_1$ et $\delta_{x_2}V_1$ qui correspondent à translater le vortex. En effet, pour ε tendant vers 0, on a

$$V_1(x + \varepsilon e_1) \simeq V_1(x) + \varepsilon \delta_{x_1} V_1(x).$$

Pour montrer cette proposition, on décompose h en série de Fourier. Il se trouve que L se comporte bien vis à vis de cette décomposition, c'est à dire qu'en notant h_k les coefficients de Fourier de h pour $k \in \mathbb{Z}$, la quantité $L(h)_k$ ne dépend que de h_k et de $\overline{h_{1-k}}$ (le 1 venant du fait que l'on regarde un vortex de degré 1).

La transformation $h_k \rightarrow \overline{h_{1-k}}$ étant une involution, on peut se restreindre à étudier le linéarisé sur des espaces de dimension 2. Dessus, en utilisant la positivité de $-\Delta$ et en connaissant quelques proprietés sur V_1, on peut en déduire la positivité (sauf sur un de ces sous espaces de dimension 2, où on voit apparaître $\delta_{x_1}V_1$ et $\delta_{x_2}V_1$).

La stabilité de V_{-1} s'en déduit car on remarque que $\bar{V_1} = V_{-1}$.

Pour (NLS), il est conjecturé que les solitons jouent un rôle fondamentale dans le comportement en temps long des solutions. Plus exactement, toute solution de (NLS) tenderait vers une somme de solitons plus un terme dispersif (c'est à dire une solution de l'équation linéaire). Dans la partie suivante on construira entre autre des multisolitons.

On va cherche à construire de telles solutions dans les trois équations. Une question importante se pose alors : est-ce que plusieurs solitons peuvent intéragir entre eux, et notamment changer leur trajectoire et/ou leur forme ?

3. Dynamique de solitons pour (NLS) et (*H*)

Pour (NLS), un soliton s'écrit de façon général

$$R_k(t, x) = Q(x - \beta_k t + x_k) e^{i\left(\frac{\beta_k}{2}x - \frac{|\beta_k|^2}{4}t + \gamma_k\right)}$$

On a le résultat suivant :

Theorem 6. *pour* $1<p<1+\frac{4}{n}$ *et* $K\in\mathbb{N}^*$, *si* $\beta_k\neq\beta_{k'}$ *pour tout* $k\neq k'$ *alors il existe une solution* U *de* (NLS) *et* $\Theta>0$ *tel que*

$$\forall t\geqslant 0, \left\|U(t)-\sum_{k=1}^{K} R_k(t)\right\|_{H^1}\leqslant \mathrm{C}e^{-\Theta t}$$

On peut interpreter le résultat de la façon suivante. La condition $\beta_k\neq\beta_{k'}$ implique que en temps long, les solitons vont tous dans des directions différentes et donc sont loin les uns des autres. Le theorème dit alors qu'ils n'interagissent plus entre eux, c'est à dire que les β_k ne changent pas, et on peut sommer les solitons pour obtenir une solution, avec juste une erreur qui décroit exponentiellement vite.

Si on regarde la preuve en détail, on remarque que la condition que les solitons soient loin les uns des autres est crucial. Notamment, Θ est reliée à $\min|\beta_k-\beta_{k'}|$. Comprendre la collision de solitons est un problème largement ouvert.

Pour l'équation d'Hartree, on arrive à retrouver l'équation de la mécanique classique pour le problème à deux corps dans le cas où les trajectoires sont hypérbolique.

Si on cherchait une solution sous la forme de deux solitons ayant des masses λ_j et se déplacant à une vitesse $\alpha_j(t)$, une idée serait de regarder la somme de deux solitons ayant ces proprietés, c'est à dire la fonction

$$R(t,x)=\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\lambda_j^2}Q\left(\frac{x-\alpha_j(t)}{\lambda}\right)e^{-i\gamma_j(t)+i\beta_j x}$$

avec $\beta_j=\alpha_j'/2$. R n'est pas une solution de (H) quel que soit α_j et γ_j, mais est très proche d'une solution quand le temps tend vers l'infini. Pour être concret, si on se donne un problème à deux corps de masse λ_j, le problème à deux corps en mécanique classique s'écrit

$$\begin{cases}\alpha_1'=2\beta_1, \alpha_2'=2\beta_2\\ \beta_1'=\frac{\|Q\|_{L^2}{}^2}{4\pi\lambda_2}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\|\alpha_2-\alpha_1\|^3}, \beta_2'=-\frac{\|Q\|_{L^2}{}^2}{4\pi\lambda_1}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\|\alpha_2-\alpha_1\|^3}\end{cases}$$

Son energie est

$$E_0=\|\beta_2-\beta_1\|^2-\frac{\|Q\|_{L^2}^2}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{1}{\|\alpha_1-\alpha_2\|}$$

Et on a le theorème suivant:

Theorem 7. *Si on se donne* $\lambda_j,\alpha_j,\beta_j$ *vérifiant le système à deux corps avec* $E_0\geqslant 0$, *alors il existe* u *une solution de* (H) *et des* γ_j *tel que*

$$\|u(t,x)-R(t,x)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\rightarrow 0 \text{ quand } t\rightarrow\infty$$

En particulier, on peut retrouver le problème de gravitation classique dans celui de la mécanique classique. Il apparait de la façon suivante. Certes R n'est pas une solution de (H), mais si on rentre R dans l'équation et que l'on fait un dévelopement de l'erreur en $\frac{1}{\|\alpha_1 - \alpha_2\|}$, le terme de plus haut degré est annulé si on prend le système de mécanique classique à deux corps.

Bien sur, celà ne suffit pas pour prouver le théorème ci-dessus. Il faut ensuite majorer tous les autres ordres et montrer qu'ils ne font que modifier un peu la forme du soliton sans changer sa trajectoire. La stabilité du soliton est nécessaire pour cette démonstration pour montrer que les petites perturbations d'ordre supérieur n'éloigne pas trop la solution du soliton.

Que ce soit pour (NLS) ou (H), ces deux theorèmes ne font que construire une solution vérifiant une certaine condition en temps long. Ils restent de nombreuses questions ouverte, notamment l'unicité d'une telle solution avec cette condition en temps long, mais aussi la stabilité de cette solution. Dans le cas de (NLS), elle est démontrée, mais pas dans le cas de Hartree (et elle est très probablement fausse pour $E_0 = 0$)

Ce qui diffère entre ces deux équations est la décroissance du terme d'interaction entre deux particules (c'est à dire le terme qui apparait dans la partie non linéaire dépendant des deux solitons à la fois). Pour (NLS), elle décroit exponentiellement vite avec la distance. Pour Hartree en revanche, il décroit seulement en $\frac{1}{r}$. C'est pour cette raison que dans le premier cas il n y a pas d'interaction entre les solitons, tandis qu'elle influe leur déplacement pour Hartree.

4. Dynamique pour (GP)

Cette équation à un comportement assez différent des deux premières. Notamment, comme la solution trivial est 1, on ne va pas sommer des solitons mais les multiplier entre eux. De plus, l'existence de vortex de degrée différent laisse la place à plus de dynamique possible.

Un type de solution dépendant facilement du temps est les ondes progressives, c'est à dire une solution de la forme

$$\Psi(x,t) = \Psi(x - \mathrm{ct})$$

C'est à dire une solution qui ne fait que se translater avec le temps. C'est la solution canonique pour l'équation des ondes. Pour (GP), on peut montrer qu'une telle dynamique est possible en dessous de la vitesse du "son"

Theorem 8. *Pour tout $0 < c < \sqrt{2}$ il existe une solution à l'équation*

$$(\mathrm{GP}_c)\colon -\mathrm{ic}\delta_{x_1}\Psi + \Delta\Psi = (|\Psi|^2 - 1)\Psi$$

avec la condition $|\Psi| \to 1$ à l'infini

Il s'agit d'une one progressive dans la direction $x_1=(1,0)$ mais par invariance du problème par rotation, on peut en faire une dans la direction que l'on souhaite.

Ce theorème ne donne que l'existence d'une telle solution, sans en donner l'unicité ni une idée de sa forme. On peut chercher des solutions à cette équation qui ressemble à des vortex. On a la conjecture suivante.

Conjecture 9. *Pour c suffisament petit, il existe une solution de l'équation* (GP_c) *de la forme*

$$\Psi(x)=V_1(x+\mathrm{de}_2)V_{-1}(x-\mathrm{de}_2)+\Phi_d(x)$$

où $d\sim\frac{1}{2c}$ *quand c tend vers 0, et où* $\|\Phi_d\|_{L^p}\to 0$ *quand c tend vers 0 pour tout* $p>2$.

C'est à dire qu'on peut trouver une onde progressive qui ressemble à deux vortex de signe opposé séparé par une distance d inversement proportionnel à la vitesse, avec une erreur petite quand c est grand. Cette conjecture vient du fait qu'un résultat similaire a été démontrée pour une autre équation qui ressemble à (GP). De plus, les techniques utilisées sont générales et à priori applicable ici. On discutera des grandes idées de la démonstration par la suite.

Une telle conjecture peut aussi être faite avec des vortex de degrée $+2$ et -2, même si ils sont instables. Par symétries de la solution il est possible que la perturbation ne soit pas dans la direction instable des vortex.

La démonstration utilise des principes perturbatifs. On met en ansatz $\Psi=Q+\Phi$ où Q est le produit de deux vortex et Φ la perturbation. L'equation (GP_c) devient alors

$$E+L(\Phi)+\mathrm{NL}(\Phi)=0$$

où E est une constante indépendant de Φ et liée seulement à Q, $L(\Phi)$ est le linéarisé autour de Q (définit comme pour la stabilité) et $\mathrm{NL}(\Phi)$ les autres termes (qui sont tous non linéaires).

On s'interesse d'abord à la partie linéaire $L(\Phi)$, et on montre son caractère bijectif si on n'est pas sur les direction liées à la symétrie. C'est une conséquence de la stabilité du vortex de degrée $+1$ (la démonstration est moins direct que celà mais c'est l'idée conductrice). Ensuite, on montre que E est petit quand la distance entre les deux vortex est grande, et on montre que la partie non linéaire est contractante, ce qui permet d'avoir l'existence de Φ par une méthode de point fixe.

On a vu que l'on peut construire des ondes progressives ressemblant à un vortex $+1$ et un vortex -1 à grande distance l'un de l'autre. On peut se demander ce qu'il se passe si on met deux vortex $+1$. Numériquement, ils semblent tourner autour de leur centre d'inertie, mais en s'éloignant l'un de l'autre.

Un point interessant pour avoir une intuition sur le comportement des vortex est de mettre une ansatz qui ressemble à plusieurs vortex et de regarder quel est le terme le plus elevée en l'ordre de la distance entre les vortex. C'est en faisant ainsi dans l'équation d'Hartree que l'on voit appraître le problème à deux corps de mécanique classique.

Ici, on obtient un système appellé système de point vortex. C'est à dire que les centres des vortex ont comme comportement au premier ordre celui de points (x_i) vérifiant le système:

$$x_i'(t) = \sum_{j \neq i} \gamma_i \frac{(x_i(t) - x_j(t))^\perp}{\|x_i(t) - x_{j(t)}\|^2}$$

où $(y_1, y_2)^\perp = (-y_2, y_1)$ et les γ_i sont les degrés des vortex x_i.

Ce système prédit le comportement de certaines solutions que l'on a trouvé, notamment pour deux vortex de signe opposés, dans ce problème simplifiée ils translatent à une vitesse inversement proportionnel à leur distance (que l'on retrouve bien avec l'onde solitaire). En revanche, pour deux vortex de même signe, le système prédit bien une rotation autour de leur centre d'inertie, mais ne voit pas d'éloignement des vortex.

Les solutions de (GP) ont un comportement à priori plus complexes qu'être simplement des vortex centrées en des points qui vérifient le système ci dessus, mais il n'est pas non plus sans interêt. Par exemple pour chercher des configurations stable en temps de (GP), on peut s'interesser à des configurations stables du sytème de point vortex.

Un très grand nombre de problème restent ouvert sur (GP) et le rôle des vortex. Notamment, peut-on trouver des solutions indépendantes du temps qui ressemblent à des vortex à l'infini mais qui n'en sont pas (par exemple non radiale) ? Peut-on trouver des solutions ressemblant à des vortex qui s'éloignent les uns des autres, et dans ce cas quel est leur dynamique ?

5. References

Quelques références pour approfondir certains points survolés ici :

- J.Zinn-Justin, Quantum field theory and critical phenomenon, Oxford Sci. Publ., 1993 pour la physique reliée à l'équation (GP)

- Yu. N. Ovchinikov, I.M. Sigal, Ginzburg-Landau equation I. Static vortices, OSI, 1997 pour les proprietés de base sur les vortex.

- J. Krieger, I. Martel, P. Raphaël, Two solitons soution to the three dimensional gravitationnal Hartree equation, Com. pre app Maths 62, 2009 pour la démonstration du theorème 7

- E. Miot, Etude du système dynaique de N tourbillons ponctuelles, 2015 pour une étude sur le système de point vortex

- F. Lin, J. Wai, Travelling wave solutions of schrödinger map equation, 2009 pour la démonstration d'une onde progressive ressemblant à deux vortex dans un cas différent.

- G. Krstimavic, M. Brachet, E. Tirapegui, radiation and vortex dynamics in the non linear schrödinger equation, Physical review E78, 2008 pour le cas de deux vortex $+1$ en rotation.