Topologie de l'espace des modules des surfaces de translation

Pierre-Louis Blayac, sous la supervision de Anton Zorich

October 3, 2017

Contents

1 Préambule

Les surfaces de translation, et plus généralement les surfaces plates sont des surface riemannienne qui sont localement métriquement isomorphes au plan, c'est-à-dire que le flot géodésique nous y est donné par les lignes droites, et ces surfaces possèdent des singularités dites coniques. Le système dynamique qui nous intéresse est donc le flot géodésique, et la plus célèbre des applications du flot géodésique sur des surfaces plates est la modélisation des billards polygonaux.

Par exemple donnons-nous un billard rectangulaire, on veut étudier la trajectoire d'une unique boule dans le billard qui rebondi sans pertes énergétiques sur les bords du billard selon la loi de réflexion de Descartes (s'il y a plusieurs boules le problème devient beaucoup plus compliqué et ne peut être modélisé par une simple surface plate). Maintenant dessinons le symétrique du billard par rapport à son bord droit, par rapport à son bord supérieur, et par rapport au coin en haut à droite. On obtient un rectangle quatre fois plus grand, et on a naturellement une projection du grand rectangle sur le petit qu'on peut voir de la façon suivante : le grand rectangle est une feuille de papier blanche, on la plie en deux dans le sens de la largeur puis de nouveau en deux mais dans la direction perpendiculaire, on obtient un rectangle quatre fois plus petit, c'est notre projection. (On remarque en passant que notre domaine de recherche a des liens très profonds et intéressants avec l'origami). Collons maintenant les bords du grand rectangle de manière à former un tore. On a toujours une projection depuis le tore plat vers le billard. On observe que la projection du flot géodésique du tore plat dans le billard nous donne exactement les trajectoires du système dynamique auquel on s'intéresse. Du reste, les orbites du flot géodésique dans le tore sont bien connues, on peut facilement dire si une trajectoire est périodique ou dense (même équirépartie), et la plupart des trajectoires sont denses.

Le procédé qu'on vient de décrire pour le billard rectangulaire se généralise aux billards polygonaux dont les angles sont commensurables à π, et cela donne des surfaces de translation (et on peut remarquer que les singularités correspondent grossièrement aux sommets du billard, où le rebond de la boule n'est pas bien défini).

Un procédé différent permet de ramener l'étude d'un billard polygonal quelconque à l'étude du flot géodésique sur une surface plate (mais non de translation, cela signifie que l'holonomie est non triviale) ; pour cela on se donne deux exemplaires de notre billard polygonal, on les superposent l'un au-dessus de l'autre (un à l'altitude 0 et l'autre 1 par exemple) et on colle les bords, cela donne une sphère plate.

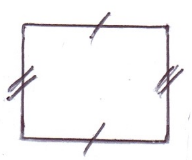
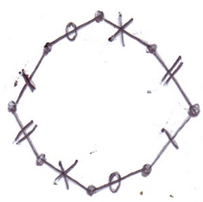
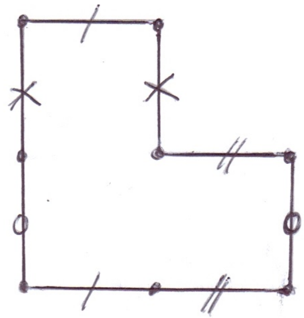
Une autre application de l'étude des surfaces plates, en physique, proposée dans les années 80 par S. P. Novikov, est l'étude de la trajectoire d'un électron soumis à un champ gravitationnel constant dans une surface de Fermi. La surface de Fermi est une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ qui est invariante par translations entières, et la trajectoire de l'électron est donnée par l'intersection d'un plan orthogonal au champ gravitationnel avec la surface de Fermi. On peut projeter la surface dans le tore de dimension 3 pour obtenir une surface compacte. Le lien avec les surfaces plates est qu'on peut voir le problème comme l'étude d'un feuilletage sur une surface. Or il existe un théorème qui nous dit que sous certaines hypothèses sur le feuilletage, on peut construire une structure plate sur la surface dont les feuilles du feuilletage sont des géodésiques.

L'espaces des modules, qui est grossièrement l'espace des structures de translation que l'on peut mettre sur une même surface, est une idée qui été introduite par Teichmüller, qui lui étudiait l'espace des structures complexes, dont notre espace des modules, on va en parler, est en quelque sorte une fibration. Il s'avère que l'étude du flot géodésique dit de Teichmüller sur l'espace des modules permet de résoudre certains problèmes quant à l'étude du flot géodésique sur une surface de translation. C'est d'autre part devenu un objet mathématique intéressant en lui-même, et qui est la source de nombreuses recherches aujourd'hui.

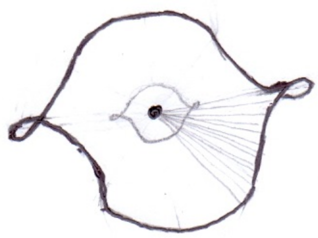
2 Définitions

2.1 Surfaces de translation

Définissons maintenant le système dynamique autour duquel s'articule le domaine de recherche : c'est un flot continu sur une surface compacte orientée, appelé flot de translation. L'image qu'il faut garder en tête lorsque l'on parle d'une surface de translation est le recollement d'un polygone (ou même plusieurs) par identification d'arêtes parallèles et de même longueur. Le tore carré $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est l'exemple typique d'une telle surface, un autre exemple est un polygone régulier à $4g$ côtés dont on identifie les côtés opposés. On peut aussi construire une surface de translation en recollant des petits carrés, la surface est alors appelée surface à petits carreaux.

Le flot de translation dans la direction $e^{i\theta}$ est défini par le fait de suivre la ligne droite dans la direction $e^{i\theta}$, et lorsque l'on rencontre une arête on se "téléporte" sur l'arête appareillée et on continue à suivre la ligne droite. On remarque dès à présent que le flot de translation est mal défini lorsqu'on rencontre un sommet du polygone. C'est pourquoi on appelle les points de la surface associés des singularités, dites coniques. Une autre raison pour nommer ces points des singularités est le fait que lorsqu'on regarder un voisinage d'un sommet du polygone, on recolle des secteurs angulaires dont la somme des angles peut dépasser 2π (mais ce sera nécessairement un multiple de 2π), cela donne une espèce de cône pointu, que l'on peut se représenter en faisant du collage : on prend par exemple trois disques en papier, on découpe dans chacun un rayon, et on colle les trois disques les uns à la suite des autres le long des rayons, on obtient une singularité conique d'angle 6π.



La multiplicité de la strate est $\frac{angle-2\pi}{2\pi}$.

Pour mieux comprendre la nature de ces singularités une solution est de définir au préalable la notion de singularité conique, au moyen de la notion de carte conique, d'où découle ensuite la définition formelle de surface de translation.

Définition 1.

- Une carte conique sur S est un triplet (U, ϕ, ψ) où U est un ouvert connexe de S, $\phi : U \to \mathbb{C}$ est un plongement dont l'image contient 0 et $\psi : U \to \mathbb{C}$ est la composée de ϕ avec $z \mapsto z^{\alpha+1}$ ($\alpha \geq 0$ est la multiplicité de $\phi^{-1}(0)$, déterminée par le triplet). On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des cartes coniques sur S, $\mathcal{C}^+$ celles qui préservent l'orientation.
- Un atlas de translation sur S est un ensemble de cartes coniques $\mathcal{A}$ qui recouvrent S et qui vérifient une propriété de compatibilité : pour toutes cartes coniques $(U_1, \phi_1, \psi_1), (U_2, \phi_2, \psi_2) \in \mathcal{A}$, $\psi_1 - \psi_2$ est localement constante sur $U_1 \cap U_2$.
- Une structure de translation sur S est un atlas de translation maximal. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des structures de translation et $\mathcal{P}^+$ celles qui préservent l'orientation.
- Une surface de translation est la donnée d'une surface topologique compacte orientée et d'une structure de translation dessus.

Cependant, une caractéristique importante des surfaces de translation, qui en fait un objet étudié par des mathématiciens de bords différents, est qu'il existe beaucoup d'autres définitions équivalentes, qui ont toute une bonne raison d'être choisie comme définition principale. La définition ci-dessus a été choisie car c'est celle introduite dans le mémoire de master sous-jacent à cette introduction à un domaine de recherche. Résumons les autres points de vue.

- On peut montrer que le recollement d'un ou plusieurs polygones le long de côtés parallèles de même longueur donne une surface de translation, et que réciproquement toute surface de translation peut-être décrite de cette manière.
- On peut montrer qu'une surface de translation c'est la donnée d'une surface topologique compacte orientée, d'une structure complexe, et d'une forme abélienne, c'est-à-dire d'une 1-forme holomorphe non nulle, dont les zéros correspondent aux singularités coniques, la multiplicité du zéro est la multiplicité de la singularité conique. (du point de vue seul de la structure complexe il n'y a pas de singularité)

  Cela explique pourquoi on parlait de l'espace des modules comme d'une fibration au-dessus de l'espace des structures complexes : la projection est l'oubli de la forme abélienne.
- On peut montrer qu'une surface de translation c'est la donnée d'une surface différentielle compacte orientée S, d'un sous-ensemble fini Σ qui correspond aux singularités, de cartes coniques au niveau des singularités, et d'une métrique riemannienne sur $S \setminus \Sigma$ qui est compatible avec les cartes coniques, et telle que l'holonomie de tout lacet est nulle.
- Enfin on peut montrer qu'une surface de translation c'est la donnée d'une surface différentielle compacte orientée et de deux foliations mesurées orientées, c'est-à-dire de deux 1-formes différentielles fermées ω_1 et ω_2 telles que $\omega_1 \wedge \omega_2$ ne s'annule qu'en un nombre fini de points, où ω_1 et ω_2 s'annulent aussi.

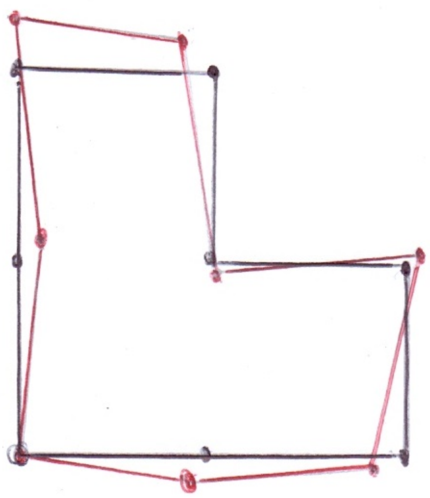
2.2 Espaces des modules

Maintenant on introduit l'autre objet fondamental dans l'étude des surfaces de translation : l'espace des modules des surfaces de translation. L'idée est la suivante : au lieu d'étudier une surface de translation en particulier et le flot de translation dessus, on étudie l'ensemble de toutes les surfaces de translation (de même genre fixé), sur lequel on définit une topologie, et une action continue de $GL_2^+(\mathbb{R})$.

L'espace des modules est donc l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de translation de genre g, où on dit intuitivement que deux surface de translation sont isomorphes si il existe un homéomorphisme entre elles qui fait correspondre les singularités et préserve le flot de translation.

Définition 2.
- On définit une action à gauche de $\text{Homeo}^+(S)$, les homéomorphismes de S qui préservent l'orientation, sur $\mathcal{C}^+$ par $g(U, \phi, \psi) = (gU, \phi \circ g^{-1}, \psi \circ g^{-1})$. On voit facilement que cela induit une action à gauche de Homeo^+ sur $\mathcal{P}^+(S)$ car la compatibilité de deux cartes coniques est conservées par l'action.
- On note $\mathcal{H}(S) = \text{Homeo}^+ \backslash \mathcal{P}^+$ l'espace des modules des structures de translation.

La topologie sur l'espace des modules est plus délicate à définir, on peut donner une intuition, basée sur la représentation polygonale des surfaces de translation : deux surfaces de translation sont "proches" s'il existe deux représentations polygonales "proches", dans le sens où les polygones sont proches et l'appariement aussi.



Une manière de formaliser cette intuition est de faire appel à la notion d'application développante. On fixe une surface topologique compacte orientée S et un revêtement universel $\widetilde{S}$. Si on se donne une structure de translation $\mathcal{A}$ sur S, cela revient à se donner un homéomorphisme de S avec un recollement d'un polygone, et cela induit un homéomorphisme entre $\widetilde{S}$ et un recollement une infinité de copies du polygone, collé les uns aux autres le long des arêtes d'une manière que l'on ne détaille pas mais qui on espère se conçoit bien par lecteur, et on peut "aplatir" cette construction sur le plan complexe, cela donne une application continue de $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{C}$, qui n'est en générale bien sûr pas injective. Cette application est l'application développante associée à la structure de translation, elle est bien définie à translation près, et si on fixe un point x_0 de $\widetilde{S}$ dont on impose 0 comme image par l'application développante, celle-ci est bien définie et notée $D_{\mathcal{A},x_0}$, et on peut montrer que deux structures de translation différentes donnent lieu à deux applications développantes différentes.

Définition 3.
- L'ensemble des structures de translation $\mathcal{P}^+(S)$ s'identifie à un sous-espace de l'espace des fonctions continues de $\widetilde{S}$ dans $\mathbb{C}$, on le munit de la topologie de convergence uniforme sur les compacts.
- On munit l'espace des modules de la topologie quotient.

Reste pour finir à définir l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur l'espace des modules. Pour ce faire on décrit l'action d'une matrice de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur une surface de translation, vue comme recollement de polygones. La matrice agit sur les polygones de par son action naturelle sur le plan complexe, préserve le parallélisme et l'égalité des longueurs, donc elle agit sur la surface de translation. Une définition faisant intervenir les cartes coniques est possible mais pénible car elle nécessite de passer par une action du revêtement universel $\widetilde{GL_2^+}(\mathbb{R})$ de $GL_2^+(\mathbb{R})$. Une façon commode mais un peu trichée de s'en sortir formellement est d'utiliser à nouveau l'application développante.

Définition 4. $\widetilde{S}$ revêtement universel de S, $x_0 \in \widetilde{S}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}^+(S)$, $B \in GL_2^+(\mathbb{R})$, $B \cdot \mathcal{A}$ est défini par :

$$D_{B\cdot\mathcal{A},x_0} = B \circ D_{\mathcal{A},x_0}.$$

Cela donne en passant au quotient une action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}(S)$.

L'action du sous-groupe des matrices diagonales de déterminant 1, paramétré par $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ est appelé le flot géodésique de Teichmüller.

3 Résultats généraux

3.1 Des questions

Les questions qui viennent naturellement sont celles qu'on se pose devant tout système dynamique, elles se résument par : Peut-on décrire les orbites de flot, ou les adhérences des orbites ? Plus précisément, et avec comme intuition le cas bien connu du tore, on peut poser comme questions les suivantes.

- Quand est-ce que l'orbite est dense, ergodique ou périodique ?
- Est-ce que l'orbite est dense (respectivement ergodique) presque sûrement ?
- Existe-t-il toujours une orbite périodique ?

À propos de l'action de $GL_2^+(\mathbb{R})$ et du flot géodésique de Teichmüller sur l'espace des modules on peut poser le même genre de questions. Cela amène d'ailleurs à d'autres questions plus géométriques sur l'espace des modules, notamment pour résoudre le problème de surface de translation générique.

- Peut-on trouver une mesure naturelle sur l'espace des modules ?
- Est-ce que l'espace des modules a une structure de variété, et une mesure absolument continue par rapport à celle de Lebesgue ?
- Peut-on décrire la topologie de l'espace des modules : ses groupes d'homologie par exemple ?

Cette dernière question est celle qui m'a intéressée pendant mon stage, qui a consisté principalement à comprendre et restituer un théorème de Zorich et Konsevitch qui classifie les composantes connexes des strates de l'espace des modules, strates dont nous n'avons pas encore parlée, nous allons le faire dans un instant. Cela explique le titre de cette introduction à un domaine de recherche.

3.2 Résultats de type dynamique

Le premier résultat important qui précise notre compréhension de l'espace des modules est sa décomposition en strates, strates qui regroupent les surfaces de translation qui ont même nombre de singularités avec même multiplicités. La proposition explique pourquoi on peut faire cette décomposition, c'est-à-dire pourquoi deux surface de translation qui ont même nombre de singularités avec même multiplicités ont même genre.

Proposition 3.1. *Soit une surface de translation de genre g, la somme des multiplicités des singularités coniques vaut $2g - 2$.*

Preuve. La démonstration peut se faire à l'aide du théorème de Hopf-Poincaré qui énonce un fait du même acabit pour des formes différentielles réelles sur une variété compacte orientée de dimension quelconque. Ou bien on peut utiliser la formule de Gauss-Bonnet, qui donne une meilleure intuition du résultat. La formule de Gauss-Bonnet stipule que la courbure totale d'une surface riemannienne compacte orientée de genre g vaut $2 - 2g$. Ainsi il n'existe de métrique lisse plate (plate signifie de courbure nulle) que sur le tore, une métrique sur une surface de genre supérieur à 2 doit avoir des points de courbure strictement négative. Dans le cas des structures de translation, la courbure est en quelque sorte concentrée dans les singularités, où la courbure vaut l'opposée de la multiplicité. □

Définition 5. On note $\mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ le sous-espace de l'espace des modules constitué des surfaces de translation qui ont n singularités $x_1, \dots, x_n$ de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$\mathcal{H}_g = \sqcup_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2g-2} \mathcal{H}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Énonçons maintenant quelques résultats concernant le flot géodésique sur une surface de translation, qui vont dans le sens des questions évoquées plus haut. On réalisera qu'il découle de ces considérations des résultats très importants pour la compréhension de l'espace des modules, de sa topologie et du flot de Teichmüller, c'est le premier indice d'un lien étroit entre flot géodésique sur une surface de translation et flot de Teichmüller sur l'espace des modules.

Définition 6. Une géodésique rencontrant une singularité est appelée une séparatrice.
Une géodésique reliant deux singularités est appelée une connexion de selle.

Proposition 3.2. *Si on se donne dans une surface de translation une orbite périodique ne rencontrant pas de singularité, on peut la translater pour obtenir un cylindre plongé dans la surface, les courbes qui en font le tour sont des géodésiques et les extrémités du cylindre sont des concaténations de connexions de selle.*

Proposition 3.3. *Étant donnée une surface de translation, dans presque toute direction le flot géodésique n'a pas de connexion de selle, donc pas d'orbite périodique, et dans le ce cas le flot dans cette direction est minimal, ie les orbites sont denses.*

Ce n'est en fait pas tant le résultat qui nous intéresse mais sa preuve. En effet l'idée de la preuve est la suivante. Soit x le point de la surface dont on veut montrer que l'orbite, qu'on suppose verticale par commodité (sans perte de généralité quitte à faire agir $GL_2^+(\mathbb{R})$), est dense (on suppose qu'elle ne rencontre pas de singularité). On considère un petit segment I transversal au flot vertical, par exemple horizontal. L'idée est de montrer que l'orbite verticale négative de I parcourt toute (enfin presque toute mais c'est un détail) la surface. En particulier elle rencontre x donc l'orbite positive de x rencontre I, qui est arbitrairement petit. Il revient au même de montrer que l'orbite verticale positive de I parcourt toute la surface. On commence par voir, par un argument de volume fini similaire au théorème de récurrence de Poincaré, que l'orbite strictement positive de I rencontre I, et que hormis pour un nombre fini de points, qui sont sur une séparatrice verticale, l'application de premier retour est bien définie. De plus les points pour lesquels l'application de premier retour n'est pas définie partagent I en plus petits intervalles, et l'application de premier retour est un échange d'intervalles, c'est-à-dire que c'est une simple translation lorsqu'on la restreint à un des sous-intervalles. L'orbite de I est alors constituée de rectangles ayant pour base les sous-intervalles de I se recollant en leur bord supérieur au niveau de l'image du sous-intervalle par l'application de premier retour, et se recollant sur les côtés d'une certaine manière. On peut montrer que l'orbite est ouverte fermée, ce qui permet de conclure.

Mais on a montré en plus que la surface pouvait se voir comme recollement de rectangles, ce recollement s'appelle les rectangles zippés de Veech, et ce dernier a montré que la donnée d'un échange d'intervalle et des dimensions des rectangles (les dimensions d'un rectangle sont représentées par un nombre complexe) fournissait une paramétrisation locale des strates de l'espace des modules. Cela fournit une structure d'orbifold complexe aux strates (une structure d'orbifold est un peu comme une structure de variété mais avec des singularités). Une autre façon de voir la structure d'orbifold complexe est par l'application période. On fixe une surface de translation S et le lieu de singularités $\Sigma \subset S$ de cardinal n ; à une structure de translation sur S, dont on peut supposer que les singularités sont Σ puisqu'on regarde à isomorphisme près, on associe une classe de cohomologie de $H^1(S, \Sigma; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{2g+n-1}$, vu comme le dual du groupe d'homologie $H_1(S, \Sigma; \mathbb{C})$. Fixons la structure de translation, on rappelle qu'il lui est associée une structure complexe et une 1-forme holomorphe non nulle ω et une application développante D. À toute classe d'homologie représentée par un lacet ou un chemin reliant deux singularités on associe l'intégrale de ω le long du chemin, ou dit autrement on applique l'application développante au chemin, vu comme un point du revêtement universel. Ces cartes ont l'avantage supplémentaire de nous fournir une mesure sur la strate : la mesure de Lebesgue dans ces cartes.

On en déduit donc :

Théorème 1. *$\mathcal{H}(\alpha)$ est muni d'une structure d'orbifold complexe de dimension $2g + n - 1$, ainsi que d'une mesure qui dans les cartes est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Théorème dont je précise que je ne connais pas la démonstration.

On énonce maintenant des théorèmes (dont je ne connais pas la démonstration non plus) qui répondent en partie aux questions dynamiques suggérées en début de section, et qui étoffent le lien entre flot de translation et flot de Teichmüller.

Tout d'abord on énonce le critère d'ergodicité de Masur.

Théorème 2. *Soit une surface de translation dont le flot de translation vertical est minimal mais pas ergodique. Alors l'orbite par le flot de Teichmüller de la surface S dans l'espace des modules est divergente, c'est-à-dire qu'elle passe un temps fini dans tout compact.*

Ensuite on énonce un théorème de Smillie et Veech.

Théorème 3. *Soit une surface de translation dont la $GL_2^+(\mathbb{R})$-orbite est fermée. Alors étant donné n'importe quelle direction, le flot de translation dans cette direction est soit complètement périodique soit uniquement ergodique.*

Où complètement périodique signifie que les orbites sont toutes fermées, c'est-à-dire que elles sont soit des connexions de selle soit sont périodiques.

On énonce un théorème montré parallèlement par des méthodes similaire par Masur et Veech.

Théorème 4. *Le flot de Teichmüller est ergodique (et même mélangeant).*

Puis viens un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie.

Théorème 5. *Soit une surface de translation, dans presque toute direction le flot de translation est uniquement ergodique.*

3.3 Résultat topologique

On aborde dans ce paragraphe un théorème de Zorich et Konsevitch, qui classifie les composantes connexes des strates de l'espace des modules (ou connexe par arcs puisqu'on sait maintenant que les strates de l'espace des modules sont des orbifolds donc sont localement connexes par arcs).

Théorème 6 (Konsevitch, Zorich)**.**

- *$\mathcal{H}(2)$ et $\mathcal{H}(1,1)$ sont connexes.*
- *$\mathcal{H}(4)$ et $\mathcal{H}(2,2)$ ont deux composantes connexes : une composantes hyperelliptique et une composante non hyperelliptique de structure spin impaire.*
- *$\mathcal{H}(1,3)$, $\mathcal{H}(1,1,2)$, $\mathcal{H}(1,1,1,1)$ sont connexes.*
- *$\mathcal{H}(2g-2)$, $g \geq 4$ possède trois composantes connexes : une composante hyperelliptique, une composante non hyperelliptique de structure spin paire et enfin une composante non hyperelliptique de structure spin impaire.*
- *$\mathcal{H}(2k, 2k)$, $k \geq 2$ possède trois composantes connexes classifiées de la même manière que celles de $\mathcal{H}(4k)$.*
- *$\mathcal{H}(2k+1, 2k+1)$, $k \geq 1$ possède deux composantes connexes : une hyperelliptique et une non hyperelliptique.*

- $\mathcal{H}(2k_1, \ldots, 2k_n),\ 2k_1 + \cdots + 2k_n \geq 6$ *possède deux composantes connexes : une de structure spin paire et une de structure spin impaire.*
- *Toutes les autres strates sont connexes.*

Le théorème fait appel à des invariants : l'hyperellipticité, et la parité de la structure spin. On discute de ces notions dans la section suivante, ainsi que divers autres notions qui sont présentes dans la preuve du théorème, et d'un intérêt plus général dans le domaine de recherche.

4 Notions utiles pour la classification des composantes connexes

4.1 Hyperellipticité

Il existe une notion d'hyperellipticité pour la théorie générale des surfaces de Riemann :

Définition 7. Une surface de Riemann est dite hyperelliptique si elle est revêtement ramifié à deux feuillets de la sphère, autrement dit (conséquence d'un théorème appelé formule de Hurwicz) si il existe une involution ayant $2g+2$ points fixes.

La définition de surface de translation hyperelliptique est liée. On doit avant de pouvoir la préciser faire une observation préliminaire. Donnons-nous une surface de Riemann compacte X munie d'une forme quadratique q, c'est-à-dire d'une section méromorphe non nulle du fibré $\Omega^1 X^{\otimes 2}$, c'est-à-dire un objet qui s'écrit dans des cartes $f(z)(dz)^2$ où f est méromorphe. Supposons que la forme quadratique ne soit pas le carré d'une forme abélienne et que les pôles soient de multiplicité -1, alors on peut construire un (unique) revêtement ramifié à deux feuillets au-dessus de X tel que le tiré en arrière de la forme quadratique soit carré d'une forme abélienne. La construction ensembliste du revêtement donne une idée assez précise de la preuve : on considère l'ensemble

$$\{(x, \omega_x),\ \text{où } x \in X \text{ et } \omega_x \in \Omega^1 X_x \text{ telle que } \omega_x^2 = q_x\}.$$

De plus on décrit précisément les zéros et leur multiplicité de la forme abélienne en fonction des zéros et pôles et leur multiplicité de la forme quadratique.

Définition 8. Une surface de translation hyperelliptique est une surface de translation (ie la donnée d'une surface de Riemann et d'une forme abélienne) obtenue de la manière expliquée dans le paragraphe précédent, en supposant de plus que X est la sphère.

La pertinence d'une telle définition est résumée dans la proposition qui suit.

Proposition 4.1. *L'ensemble des surfaces hyperelliptiques de* $\mathcal{H}(2g-2)$ *(resp* $\mathcal{H}(g-1, g-1)$*) forme une composante connexe.*

Preuve. L'idée de la preuve est de raffiner la construction du revêtement à deux feuillets expliquée auparavant. On peut définir, de la même manière que l'espace des modules des structures de translation (ie des formes abéliennes), l'espace des modules des formes quadratiques, décomposé lui-aussi en strates. Et la construction donne lieu à une application d'une strate de l'espace des modules des formes quadratiques dans une strate de l'espace des modules des formes abéliennes, dont l'image consiste en les surfaces de translation hyperelliptiques. Il s'avère que cette application est continue, et même régulière au sens des orbifolds complexes, que les strates sont de même dimension, que pour finir l'application est ouverte fermée, et pour finir on remarque que l'ensemble des formes quadratiques sur la sphère est bien connu, il s'agit de fraction polynomiales à zéros et pôles fixés, et cet espace est connexe. On déduit que l'image de l'application est une composante connexe. □

4.2 Structure spin

La structure spin est un invariant issu de la topologie algébrique. Donnons-nous une surface de translation et un lacet lisse ne rencontrant aucune singularité et dont le vecteur vitesse ne s'annule pas. Comme le fibré tangent $T(S \setminus \Sigma)$ est naturellement trivialisable à partir de la structure de translation, on peut considérer le nombre de tours modulo 2 que fait le vecteur vitesse, qu'on appelle indice. Par exemple si le lacet est un petit cercle autour d'une singularité de multiplicité α, l'indice vaut $\alpha + 1$.

Proposition 4.2. *Si la surface de translation est dans une strate de la forme $\mathcal{H}(2k_1, \ldots, 2k_n)$, l'indice du lacet ne dépend que de sa classe d'homologie dans $H_1(T^1S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.*

Preuve. On remarque juste pourquoi la condition sur la multiplicité des singularités est nécessaire : l'indice d'un petit cercle autour d'une singularité doit être le même celui d'un petit cercle autour d'un point régulier. □

La proposition permet d'associer à toute surface de translation d'une strate de la forme $\mathcal{H}(2k_1, \ldots, 2k_n)$ une structure spin, c'est-à-dire une classe de cohomologie de $H^1(T^1S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ vu comme le dual de $H_1(T^1S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui à un petit cercle associe 1 modulo 2.À un lacet on associe son indice. Attention la structure spin n'est définie que pour une structure de translation et non sa classe à isomorphisme près dans l'espace des modules. À une structure spin $\xi \in H^(T^1S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ on associe sa parité, définie à partir de la formule suivante.

$$\Sigma_{i=1}^{2g}(\xi(a_i) + 1)(\xi(b_i) + 1)$$

où $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ est une base symplectique de lacets de la surface.

La parité de la structure spin d'une surface de translation ne dépend que de sa classe dans l'espace des modules, et de plus :

Proposition 4.3. *L'application $\mathcal{H}(2k_1, \ldots, 2k_n) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui à une classe de surfaces de translation isomorphes associe la parité de la structure spin est continue.*

Ainsi deux surfaces de translation qui ont des parités spinorielles différentes sont nécessairement dans des composantes connexes différentes.

4.3 Surfaces de translation fhf

Une classe de surfaces de translation intéressante est la suivante.

Définition 9. Une surface de translation fhf est une surface de translation à feuilletage horizontal fermé, ou dit encore avec une notation introduite auparavant, c'est une surface de translation dont le flot de translation horizontal est complètement périodique.

Ces surfaces sont importantes pour deux bonnes raisons :

Proposition 4.4. *Elles sont denses dans les strates de l'espace des modules.*

Proposition 4.5. *Elles sont décrites par une donnée combinatoire relativement simples : on peut montrer qu'en découpant une telle surface le long des connexions de selles horizontales on obtient un nombre fini de cylindres verticaux, donc la donnée d'une telle surface est juste la donnée du graphe des connexions selles épaissi verticalement en un ruban, d'un appariement des composantes du bord du ruban correspondant au fait de relier par des cylindres, et de cylindres verticaux (et aussi d'angles de torsion pour les cylindres mais c'est un détail).*

Cette dernière proposition permet de construire plein de surface de translation aux propriétés sympathiques à l'aide de diagrammes.

4.4 Chirurgies locales

Une dernière idée importante sur laquelle reposait la classification des composantes connexes des strates est le fait de construire à partir d'une surface de translation une surface de translation d'une autre strate, qui a plus de singularités (on dit qu'on divise une singularité) ou de genre supérieur (on dit que l'on ajoute une anse), et cette nouvelle surface possède des propriétés agréable, on peut exprimer par exemple sa parité spin en fonction de la parité spin de l'ancienne surface. Ces constructions ont la remarquable propriété d'agir localement sur la surface de translation, si bien que moralement en perturbant légèrement la surface de translation dans la strate de l'espace des modules on ne perturbe que légèrement la surface de translation créée dans la nouvelle strate.

Ces chirurgies sont notamment utiles car la preuve du théorème se fait par récurrence sur le genre, il est donc intéressant de pouvoir augmenter le genre.

5 Problèmes ouverts

Dans cette section on cite deux problèmes ouverts concernant la topologie de l'espace des modules.

Premièrement on peut résumer le théorème de Zorich et Konsevitch sur la classification des composantes connexes des strates de l'espace des modules des surface de translation comme le calcul du zéro-ième groupe d'homologie des strates. La question qui suit naturellement est : qu'en est-il des groupes d'homologie supérieur ?

Une conjecture de Konsevitch va dans ce sens:

Conjecture 1. *Le revêtement universel des composantes connexes des strates est contractile.*

Une autre question concernant la topologie de l'espace des modules peut être soulevée, elle provient de l'étude de la topologie de l'espace des modules des surfaces complexes, qui a donné lieu à la compactification de Deligne-Mumford de l'espace des modules.

Question. *Peut-on construire une compactification agréable de l'espace des modules des surfaces de translation ?*

References

[1] Michael Atiyah. Riemann surfaces and spin structures. *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 1971.

[2] Giovanni Forni and Carlos Matheus. Introduction to teichmüller theory and its applications to dynamics of interval exchange transformations, flows on surfaces and billiards. *arXiv*, 2013.

[3] Dennis Johnson. Spin structure and quadratic forms on surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 1980.

[4] Maxim Konsevitch and Anton Zorich. Connected components of the moduli spaces of abelian differentials with prescribed singularities. *Inventiones mathematicae*, 2003.

[5] Jean-François Quint. Rigidité des orbites dans les espaces de modules de surfaces plates. *Séminaire Bourbaki*, novembre 2014.

[6] William Veech. Gauss measures for tansforamtions on the space of interval exchange. *The annals of Mathematics*, 1982.

[7] William Veech. Moduli space of quadratic differential. *Journal d'analyse mathématique*, 1990.

[8] Anton Zorich. Flat surfaces. *Springer*, 2006.