Introduction aux suites automatiques

Mickaël Postic

22 janvier 2017

Introduction

Dans ce document, je présente l'objet central sur lequel s'est construit mon stage, à savoir les suites automatiques, puis je montre quelques-unes des propriétés liées aux suites automatiques, et finalement j'énonce certains résultats auxquels mon stage a conduit (qui n'ont pas été découverts par moi bien sûr), comme le lien avec les fonctions multiplicatives et les ensembles libres de somme.

1 Motivation et définitions

En combinatoire des mots, un problème qui s'est rapidement posé est le suivant : sur un alphabet à 2 lettres, mettons 0 et 1, est-il possible d'écrire un mot infini qui ne contienne pas de carré ? La réponse est évidente, elle est négative : sinon, soit u le mot sans carré. Sans perte de généralité, on peut supposer que le mot commence par un 0, il est alors nécessairement suivi d'un 1, lui même suivi d'un 0, lui-même suivi d'un 1 : on a alors $0101 = (01)^2$ et le mot contient un carré. Ayant résolu cette question, il est alors naturel de se poser la question pour les cubes : existe-t-il un mot sans cube ? Plus précisément, si $\mathbf{u}$ est un mot infini, un facteur v de $\mathbf{u}$ est un mot constitué de lettres consécutives de $\mathbf{u}$, autrement dit $\mathbf{u} = xv\mathbf{y}$ avec x un mot fini et $\mathbf{y}$ un mot infini. La question est alors : existe-t-il un mot tel qu'aucun facteur ne se répète trois fois de suite ?

La réponse à cette question (oui) est bien plus complexe à montrer, elle a été résolue par Axel Thue (qui fonda au passage le domaine de la combinatoire des mots) grâce à l'introduction de la suite de Prouhet-Thue-Morse, qui se définit comme suit :
Soit φ le morphisme de $\{0;1\}$ qui à 0 associe 01 et à 1 associe 10. On définit alors la suite PTM (Prouhet-Thue-Morse) par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \varphi^\infty(0).$$

Cette définition a un sens, puisque $\varphi(0)$ commence par 0 ; on a donc $\varphi^{n+1}(0) = \varphi^n(0).\varphi^n(1)$ et on peut passer n à la limite, cela définit une suite dont les 2^n premiers termes sont donnés par $\varphi(0)$. Pour ne pas alourdir considérablement le propos, je ne vais pas entrer dans les détails de la topologie mise sur l'ensemble des mots, disons simplement qu'une suite de mots finis ou non converge vers un mot fini ou non si pour tout entier n les mots sont les mêmes sur les n premières lettres à partir d'un certain rang.

Donnons les premiers termes de PTM :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = 0110100110010110...$$

La suite se construit à la main de la façon suivante : en écrivant $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ l'opérateur de conjugaison, on a $u_{2^n+1}...u_{2^{n+1}} = \overline{u_1...u_{2^n}}$.

Il est alors possible de montrer que cette suite est sans chevauchement c'est-à-dire sans facteur de la forme $aAaAa$ où a est une lettre (donc 0 ou 1) et A est un mot. Ceci entraîne alors que PTM est sans cube, puisque s'il contenait un facteur AAA en notant a la première lettre de ce facteur, $A = aB$, on aurait comme facteur de PTM le mot $aBaBa$ qui est un chevauchement.

Cette suite PTM vérifie une propriété intéressante : elle est point fixe du morphisme φ défini précédemment puisque $\varphi(\varphi^\infty(0)) = \varphi^\infty(0)$. Cela amène à se poser la question suivante : peut-on caractériser de telles suites ? Si l'on rajoute la condition que le morphisme est k-uniforme, c'est-à-dire que l'image de chaque lettre est un mot de longueur (i.e. de nombre de lettres) k, de telles suites sont exactement les suites k-automatiques, c'est-à-dire les suites engendrées par un k-automate fini (théorème de Cobham). On va prouver ce résultat avant de passer plus précisément à ce que j'ai fait en stage.

Donnons maintenant quelques définitions :

Définition 1.1. *Un k-**automate** est un automate fini où l'on peut à chaque état donner des instructions $0, ..., k-1$ qui envoient l'automate dans un nouvel état (peut-être le même).*

Définition 1.2. *Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite k-**automatique** si elle est engendrée par un k-automate fini, autrement dit si, en écrivant $n = \epsilon_1...\epsilon_t$ en base k, on a a_n qui est donné par la lecture de la suite d'instructions $\epsilon_1, ..., \epsilon_t$ par l'automate. Plus précisément, on muni l'ensemble des états de l'automate d'une fonction θ dans l'alphabet considéré (dans notre exemple de PTM, $\{0; 1\}$) et on a $a_n = \theta(i)$ ou i est l'état dans lequel l'automate termine après avoir lu $\epsilon_1, ..., \epsilon_t$.*

Définition 1.3. *Le $k-$**noyau** d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble de suites*

$$\{(a_{k^r n+j})_{n\in\mathbb{N}} \mid r \in \mathbb{N}^*, 0 \le j < k^r\}.$$

Nous avons maintenant suffisamment de matériel pour passer aux résultats importants sur les suites automatiques.

2 Résultats sur les suites automatiques

Énonçons le résultat fondamental sur les suites automatiques :

Théorème 2.1. *On a les équivalences suivantes qui donnent trois définitions équivalentes des suites automatiques :*

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } k\text{-automatique ;} && (1)\\ \Leftrightarrow\ & (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est l'image d'un point fixe d'un morphisme } k\text{-uniforme ;} && (2)\\ \Leftrightarrow\ & \text{le } k\text{-noyau de } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est fini.} && (3) \end{aligned}$$

Preuve. Je ne montre ici qu'une implication qui est facile : (1) $\Rightarrow$ (3). En effet, si la suite est k-automatique, alors il existe un k-automate lisant n dans l'autre sens qui donne aussi a_n (il suffit pour le voir de construire un tel automate, en prenant un ensemble d'états beaucoup plus gros : les fonctions de l'ensemble d'états du premier automate dans l'alphabet de lecture). Cet automate donne facilement la finitude du k-noyau. En effet pour lire $k^r n+j$ on lit j écrit sur une longueur r, donc peut être avec des 0 au début, on arrive dans un état i et ensuite on lit n. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'états i qui sont les nouveaux "états initiaux", le k-noyau est fini. Les autres implications sont plus longues à montrer, je vous encourage à aller voir les preuves dans *Automatic Sequences* de Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, livre autocontenu et très bien écrit [1]. $\square$

Il y a beaucoup de résultats et de choses à dire sur les suites automatiques, en particulier que beaucoup de suites qui apparaissent concrètement en mathématiques en sont (PTM dont j'ai déjà parlé, la suite dite de Rudin-Shapiro, celle obtenue en regrdant l'orientation des angles lors d'un pliage de papier,...). Mais j'aimerais évoquer ici quelques autres résultats qui donnent une certaine raison d'être à l'étude des suites automatiques :- ce concept est robuste : si l'on prend deux suites k-automatiques par exemple, leur somme, leur produit sont aussi k-automatiques, certaines de leurs sous-suites le sont, et à l'inverse en choisissant bien ces sous-suites, on peut remonter à la k-automaticité de la suite initiale,
-ce concept est intimement lié à la périodicité : nous le verrons dans la partie suivante, mais de plus si une suite est k-automatique on peut montrer que certaines de ses sous-suites sont ultimement périodiques,
-enfin le résultat fondamental énoncé plus haut suffit lui seul à voir l'intérêt de l'étude de ces objets, puisque les morphismes intéressent toujours beaucoup en maths, et la combinatoire des mots ne fait pas exception.

J'ai maintenant assez de matériel pour aborder mes deux sujets de stage : un article sur les fonctions automatiques multiplicatives et un sur les ensembles libres de somme (et leur relation avec la notion d'automaticité, ou une version plus faible que nous appellerons la régularité).

3 Fonctions complètement multiplicatives automatiques

Commençons par le premier article [3] : on y démontre que toute fonction complètement multiplicative qui ne s'annule pas est limite de fonctions périodiques. Plus formellement, commençons par énoncer les définitions suivantes :

Définition 3.1. *Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est dite complètement multiplicative si :*

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, f(mn) = f(m) * f(n)$$

Définition 3.2. *Une fonction est dite q-automatique si elle est engendrée par un q-automate, c'est-à-dire que si $m = \sum_{i=0}^{n} a_i * q^i$, on a f(m) qui est l'image de l'état dans lequel l'automate termine après avoir lu la chaîne $a_n a_{n-1} \ldots a_0$. Plus généralement, une fonction f est dite automatique s'il existe un entier q tel que f est q-automatique*

Définition 3.3. *Une fonction est dite presque périodique s'il existe une suite de fonctions périodiques $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que la densité de l'ensemble $\{n : f(n) \neq f_i(n)\}$ tende vers 0 quand i tend vers ∞, où l'on définit la densité d'un ensemble $A \subset \mathbb{N}$ comme, si elle existe, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{A \bigcap \{1, \cdots, n\}}{n}$*

Avec ces définitions, le résultat annoncé s'écrit :

Théorème 3.4. *Soit f une fonction complètement multiplicative automatique qui ne s'annule pas. Alors f est presque périodique.*

La preuve de ce théorème est particulièrement belle, elle repose sur deux théorèmes ne traitant pas du tout du même sujet, le théorème de coloriage de van der Waerden, et le théorème de Wirsing-Halasz.

Le premier s'énonce comme suit :

Théorème 3.5. *Soit N un entier, S un ensemble fini, $\chi : \mathbb{N} \to S$ un coloriage. Alors il existe une séquence de progression arithmétique de longueur N+1 dont tous les termes sont coloriés de la même façon, c'est-à-dire :*

$$\exists\ a, D \in \mathbb{N} \text{ tels que } \chi(a) = \chi(a + D) = \ldots = \chi(a + ND)$$

Comme ce théorème est très combinatoire, que c'est en rapport avec mon projet de thèse, que je le trouve très beau et que j'ai passé un long moment à essayer de le prouver pendant mon stage, je voudrais toucher deux mots ici de sa preuve (on peut regarder [**?**] pour une preuve complète) :

Preuve. En fait, nous allons montrer quelque chose de plus fort : nous allons montrer que pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ il existe $W(k, l) \in \mathbb{N}$ tel que tout segment de longueur $W(k, l)$ contienne au moins une progression arithmétique monochrome de longueur l si le coloriage a au plus k couleurs.

La première ruse de la preuve, qui est en fait tout le temps utilisée dans les coloriages de mots (on peut voir $\mathbb{N}$ comme un mot infini), est de définir la coloration d'un segment de $\mathbb{N}$, en utilisant autant de couleurs qu'il y a de possibilités de coloriages possibles (rouge blanc rouge donne une nouvelle couleur sur les ensembles de trois lettres par exemple). L'idée est alors de faire une récurrence sur la taille de la progression arithmétique (l). Pour passer du rang l au rang $l+1$, l'idée va être de considérer une suite monochromatique de longueur l d'intervalles qui contiendra une suite monochromatique de longueur l d'intervalles plus petits et ainsi de suite k fois, la k-ième suite étant constituée d'éléments (intervalles de longueur 1).

Ensuite, on regarde les $l+1$-èmes éléments des progressions arithmétiques : celui qui correspond au $l+1$-ème élément du $l+1$-ème intervalle du $l+1$-ème intervalle... du $l+1$-ème intervalle, puis de même mais avec le $l+1$-ème élément du $l+1$-ème intervalle du $l+1$-ème intervalle... du premier intervalle, et ainsi de suite. Formellement, sans rentrer dans les détails,

$$\begin{cases} a_0 & = & \Delta_{l+1,l+1,\ldots,l+1} \\ a_1 & = & \Delta_{1,l+1,\ldots,l+1} \\ a_2 & = & \Delta_{1,1,l+1,\ldots,l+1} \\ \vdots & & \\ a_k & = & \Delta_{1,1,\ldots,1} \end{cases}$$

Donnons un exemple pour expliciter ceci : prenons $l = 3$, et supposons que $k = 2$ et qu'on a 3 couleurs, c, r et b. Supposons que notre suite donne sur les premiers termes :

$$
\begin{aligned}
&rbbcrbcrrcbb\\
&\overbrace{bcbbrrbccbccrbbrbrrbccbccrcbbbrrbccbccrbrcbbcrbcrrbc}^{\Delta_1}brbbr\\
&\overbrace{bcbbrrbccbccrbbrbrrbccbccrcbbbrrbccbccrbrcbbcrbcrrbc}^{\Delta_2}bbrbb\\
&\overbrace{bcbbrrbccbccrbbrbrrbccbccrcbbbrrbccbccrbrcbbcrbcrrbc}^{\Delta_3}brbrr\\
&\overbrace{rbbrbrbrbrrrrbbcbbcbrcccrbcrbrcbrcbrbcrbcrcbrccbrrbc}^{\Delta_4}\dots
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$\Delta_1 = bcb\overbrace{brrbccbccr}^{\Delta_{1,1}}bbr\overbrace{brrbccbccr}^{\Delta_{1,2}}cbb\overbrace{brrbccbccr}^{\Delta_{1,3}}brc\overbrace{bbcrbcrrbc}^{\Delta_{1,4}}$$

puis :

$$\Delta_{1,1} = \overbrace{b}^{\Delta_{1,1,1}}rr\overbrace{b}^{\Delta_{1,1,2}}cc\overbrace{b}^{\Delta_{1,1,3}}cc\overbrace{r}^{\Delta_{1,1,4}}$$

On a alors :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & c\\ a_1 & = & c\\ a_2 & = & r\\ a_3 & = & b \end{array}\right.$$

On en a $k+1$ et donc par le principe des tiroirs deux sont coloriés identiquement, ils permettent de construire la progression arithmétique cherchée. Le point important pour que ça marche est d'avoir les a_i dans les intervalles de taille supérieure, mais on peut se le permettre puisque par récurrence on a défini $W(k,l)$ pour tout k.

Explicitons sur notre exemple : on a $a_0 = a_1 = c$ et donc on considère la progression $(\Delta_{1,4,4}, \Delta_{2,4,4}, \Delta_{3,4,4}, \Delta_{4,4,4})$. Cette progression est monochromatique (ici de couleur c) : les trois premiers éléments sont de la couleur de a_0 car les intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont de la même couleur (i.e tous les éléments à la même place sont de la même couleur), le dernier par notre choix via le principe des tiroirs vérifie aussi l'égalité à a_0. $\square$

On peut maintenant énoncer l'autre théorème clé, le théorème de Wirsing-Halasz, qui est un résultat classique d'analyse, assez lourd à prouver : l'intéressé pourra aller voir une preuve d'un théorème un peu plus fort par Hubert Delange dans *Acta Arithmetica 1983* [2].

Voici le théorème, précédé d'une définition nécessaire à sa compréhension :

Définition 3.6. *La* valeur moyenne *d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, notée $M(f)$, est la valeur, si elle existe,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} f(n) = M(f)$$

Théorème 3.7. *Soit f une fonction complètement multiplicative à valeurs complexes avec, $\forall n$, $\mid f(n) \mid \leq 1$. Alors il existe un réel t tel que $n \to n^{it} f(n)$ a une valeur moyenne. De plus, si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{\mathrm{Re}(1-p^{it}f(p)}{p}$ diverge, alors la valeur moyenne de $n \to n^{it} f(n)$ est 0 pour tout réel t. Sinon, la série converge pour un réel t, pour ce réel la valeur moyenne existe et n'est pas nulle.*

Maintenant, comme les fonctions considérées sont automatiques, et que l'automate est fini, on voit qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs prises par f, et par multiplicité f est à valeurs dans les racines de l'unité (ou 0, mais ce cas est exclu par hypothèse).

Ceci, combiné au théorème de Wirsing-Halasz, nous permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 3.8. *Soit f une fonction complètement multiplicative ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors pour tout m et a dans $\mathbb{N}$ la quantité*

$$M(m,a) := \lim_{x\to\infty} \frac{m}{x} \sum_{\substack{n\leq x \\ n\equiv a \pmod m}} f(n)$$

existe, et de plus, s'il existe m et a tels que $|M(m,a)| = 1$, alors on a $f(n) = 1 \ \forall n \equiv 1 \pmod m$

Enfin ce lemme permet, combiné au théorème de Van der Waerden, de montrer la proposition qui donne facilement le théorème recherché :

Proposition 3.9. *Soit $q \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et f une fonction complètement multiplicative q-automatique, qui ne s'annule pas.*
Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que si n_1, n_2, l sont des entiers vérifiant $\text{pgcd}(n_1, q^{l+1})|q^l$, et $n_1 \equiv n_2 \pmod{q^{k+l}}$ alors $f(n_1) = f(n_2)$.

Le résultat que nous avons atteint est assez fort, car la notion de convergence définie ici, si elle n'est pas classique, n'en est pas moins assez intuitive, et la notion de presque périodicité décrite ici semble assez bien choisie.

Mon deuxième sujet d'étude [4], toujours en lien avec les suites automatiques, fut les ensembles libres de somme :

4 Ensembles réguliers libres de somme

Bien que cet article présente des liens entre le fait d'être libre de somme et automatique, la notion centrale de l'article n'est pas l'automaticité. C'est une notion un peu plus vaste que je voudrait définir maintenant : on a vu dans notre résultat principal sur les suites automatiques qu'être k-automatique équivalait à avoir un k-noyau fini. Cette notion est assez restrictive, ne permettant par exemple pas de parler de suites à valeurs dans un espace infini. Une bonne extension de la notion d'automaticité est la notion de régularité :

Définition 4.1. *Une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* ***k-régulière*** *s'il existe m sous-suites de n, $\{(n_l^{(j)})_{l\in\mathbb{N}}\}_{(0\leq j\leq m-1)}$, qui satisfont pour tout $i, i \geq 0$ et b tel que $0 \leq b \leq k^i$, la sous-suite $(t_{k^i n+b})_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathbb{Z}$-combinaison linéaire des $(t_{n_l^{(j)}})_{l\in\mathbb{N}}$.*
Cette définition ressemble à la définition par le q-noyau d'une suite q-automatique, à ceci près qu'ici, on autorise les combinaisons linéaires, donnant une infinité de sous-suites au lieu d'un nombre fini.

Là encore, ce concept est stable par certaines opérations, nous avons d'ailleurs besoin du résultat suivant dans une preuve :

Théorème 4.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux k-régulières, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sum_{i=0}^{n} u_i)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont aussi.*

L'autre concept central de l'article, c'est évidemment les ensembles libres de somme :

Définition 4.3. *Un ensemble S d'entiers positifs est libre de somme si $(S+S)\cap S=\emptyset$. Puisque S est un ensemble d'entiers, on numérote ses éléments, et on obtient $S=(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Nous introduisons deux nouvelles suites, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui permettent d'étudier plus facilement certaines propriétés de S :

$$v_n=\{1 \text{ si } n\in S;\ * \text{ si } n\in S+S;\ 0 \text{ sinon}\}.$$

O construit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en supprimant les $*$; l'identification $\theta:(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\to(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une bijection : en partant d'une suite de 0 et de 1, il suffit de rajouter les $*$ à partir du début, ce qui donne une unique suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et ce de façon injective. Dans l'autre sens toute suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne une unique suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a donc une bijection entre ces deux ensembles de suites, et donc entre les ensembles libres de somme et les suites de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$:

$$\varsigma:\{0;1\}^{\mathbb{N}}\to\{\text{Ensembles libres de somme}\}. \tag{4}$$

On peut alors définir, pour un ensemble libre de somme donné, deux suites, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui sont le nombre de 0 (resp.d'étoiles) entre deux 1 successifs. Ces deux suites se voient aussi directement sur l'ensemble S comme le nombre d'éléments de $S+S$ entre deux éléments de S et le nombre d'éléments qui ne sont pas dans S alors qu'ils pourraient entre deux éléments de S.

On peut alors énoncer un premier théorème, qui décrit l'ensemble S de façon simple sous réserve d'une condition sur $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

Théorème 4.4. *Soit $c:=1\overbrace{0...0}^{\mu_1}1\overbrace{0...0}^{\mu_2}1....$ Par le procédé décrit en (4), on peut faire correspondre un ensemble $S=(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \mu_{2^m} > \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2^m-1}\mu_i\right)+2^m+\dfrac{3^m-1}{2} \\ \mu_{2^m+k}=\mu_k, \quad \forall 0<k<2^m \end{cases} \tag{5}$$

alors pour tout entier $n\geq 1$ on a, en notant $n=2^k(2j+1)$:

$$\alpha_n=\frac{3^k+1}{2}. \tag{6}$$

Si n s'écrit $\epsilon_m ... \epsilon_1$ en base 2, on a

$$S_n = 1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\epsilon_n \left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} \alpha_i + \mu_i \right) + 2^{n-1} \right) \tag{7}$$

Ce théorème, associé au théorème de stabilité évoqué sur les suites régulières, donne le résultat suivant :

Théorème 4.5. *Si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est 2-régulière et qu'on a (5), alors la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est aussi 2-régulière.*

Les conditions imposées peuvent paraître lourdes, mais il existe des suites mathématiques intéressantes, les suites de type Cantor par exemple, qui codent des ensembles ressemblant aux ensembles de Cantor dans $\mathbb{N}$, qui vérifient ces hypothèses.

Enfin, un autre résultat important sur les ensembles libres de somme en rapport avecc l'automaticité est le suivant :

Théorème 4.6. *Soit $b \geq 2$, $n \geq 0$. On définit alors $S = (S_n)_{n\geq 0}$ par $S_n = \sum_{i=0}^{m} \epsilon_i (2b-1)^{i+1} + 1$ où $\epsilon_m ... \epsilon_0$ est l'écriture de n en base b. L'ensemble S ainsi défini est un ensemble libre de somme et est de plus $(2b-1)$-automatique.*

Cet ensemble donne une autre suite $(2b-1)$-automatique : la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème 4.7. *Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de 0 et de 1 obtenue à partir de l'ensemble S ci-dessus, en le regardant comme un ensemble libre de somme, et en supprimant les $*$. Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(2b-1)$-automatique.*

5 Conclusion

On a donc vu à travers ces deux exemples divers aspects des suites automatiques : elles apparaissent naturellement, comme on l'a vu dans la partie 5, dans certains problèmes mathématiques, et, comme on l'a vu en partie 4, leur étude peut amener des informations sur les suites considérées.

Merci d'avoir lu ce rapport, et merci à mon encadrant de stage, Jean-Paul Allouche, de m'avoir introduit à ce domaine, et de m'avoir aidé au cours de mon stage.

Références

[1] Jean-Paul Allouche and Jeffrey Shallit. *Automatic Sequences.* Cambridge University Press, 2003.

[2] Hubert Delange. Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives de module ≤ 1. *Acta Arithmetica*, 1983.

[3] A. Y. Khinchin. *Three Pearls of Number Theory.* Dover, 1952.

[4] Jan-Christoph Schlague-Puchta. Completely multiplicative automatic functions. *Integers 11*, 2011.

[5] Zhi-Xiong Weng, Jie-Meng Zhang, and Wen Wu. On the regular sum free sets. *European Journal of combinatorics*, mar 2015.