

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE : FORÊTS ET INVARIANTS ASSOCIÉS EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES.

MATTHIEU PIQUEREZ

RÉSUMÉ. Les arbres couvrants d'un graphe sont des objets très étudiés depuis fort longtemps. L'un des principaux théorèmes est celui de Kirchhoff qui permet de compter le nombre de sous-arbres couvrants sous forme de déterminant.

Il se trouve que la notion d'arbre, et plus généralement de forêt, peut s'étendre assez naturellement aux complexes simpliciaux, que l'on peut voir comme des graphes en dimensions supérieures. Le théorème de Kirchhoff se généralise dans ce cadre-là.

De plus, les complexes simpliciaux permettent de faire le lien entre certains espaces géométriques ou topologiques, dits triangulables, et la théorie des graphes. Ainsi, des invariants géométriques de ces espaces peuvent être définis à partir des forêts sur les complexes simpliciaux associés.

MISE EN CONTEXTE

Tout commence en l'an de grâce 1847. Un certain Gustav Kirchhoff, de Prussie orientale, soutient alors sa thèse en physique à propos des réseaux électriques : loi des noeuds, loi des mailles (cf [7]). Ces lois donnent un avant-goût de la topologie algébrique, peut-être même ont-elles inspiré Poincaré pour établir les prémisses de cette théorie. En effet, cycles et bords sont au cœur de l'étude du réseau électrique.

Par ailleurs, le réseau électrique est naturellement modélisé par un graphe. Le théorème principal dans l'étude des arbres couvrants d'un graphe est le théorème de Kirchhoff. Celui-ci, aussi appelé « matrix-tree theorem », exprime le nombre d'arbres couvrants comme le déterminant d'un mineur principal de la matrice laplacienne du graphe. Ce théorème est très souple car des petites modifications de la matrice laplacienne permettent d'obtenir des informations bien plus précises sur les arbres couvrants. Cela en fait un outil particulièrement prisé en combinatoire et en probabilités.

Mais revenons à la topologie algébrique. Les mathématiciens comprennent depuis longtemps les objets géométriques en petites dimensions. Pour comprendre ceux en dimensions supérieures, on peut les découper en petits morceaux très simples ; et rien de plus simple que le simplexe, qui est la généralisation du triangle ou du tétraèdre. De là vient l'étude des complexes simpliciaux, qui sont obtenus en recollant des simplexes. Ces complexes possèdent beaucoup de propriétés combinatoires et algébriques qui donnent des informations sur les objets topologiques représentés. Ces propriétés sont étudiées par la topologie algébrique, fondée par Henri Poincaré entre 1895 et 1904 (dans « Analysis situs » [11], et ses cinq compléments [12], [13], [14], [15] et [16]). Finalement, on s'est rendu compte que l'on avait trop simplifié, ce qui a amené J.H.C. Whitehead à définir les CW-complexes dans [18] et [19], qui allient la souplesse de la géométrie aux propriétés combinatoires des complexes simpliciaux, si bien que notre étude des complexes simpliciaux dans cette introduction se généralise facilement aux CW-complexes. Deux objets importants dans la topologie algébrique sont les cycles et les bords. Mais qu'en est-il des arbres et des forêts, ces sous-structures acycliques ?

Étrangement, cette généralisation naturelle, que nous présenterons dans la section 2, n'apparaît que très tardivement, en 1983. Elle est introduite par Gil Kalai dans [6]. L'idée est d'exprimer les trois conditions nécessaires pour être un arbre couvrant, dans le vocabulaire de la topologie algébrique : les conditions s'appliquent ainsi automatiquement aux complexes simpliciaux (et aux CW-complexes).

Ces « forêts simpliciales » sont l'objet de nombreux articles récents, notamment [4] (2009) qui généralise le théorème de Kirchhoff et [2] (2015) qui étudie des réseaux électriques généralisés et qui calcule la torsion de Reidemester (cf sous-section 3.2) grâce au théorème de Kirchhoff généralisé. Le lecteur pourra aussi être intéressé par [1] (2015) qui présente les forêts simpliciales en détail et de manière élémentaire.

Dans cette introduction, nous verrons donc comment la notion actuelle de forêt sur les complexes simpliciaux étend naturellement, et efficacement, celle de la théorie des graphes. Comme applications, nous présenterons deux invariants sur des espaces topologiques et géométriques qui utilisent cette extension. La première est déjà connue : la torsion de Reidemester (inventée en 1935 par Kurt Reidemester [17], puis étendue par Wolfgang Franz [5] et Georges de Rham [3]) se calcule grâce aux polynômes fournis par le théorème de Kirchhoff généralisé. La seconde application s'intéressera aux polynômes de Symanzik. Portant le nom du physicien allemand Kurt Symanzik, ils sont utilisés en théorie quantique des champs pour calculer l'intégrale de Feynman. Mais ce qui nous intéresse ici est qu'ils calculent des invariants géométriques intéressants sur des objets dits triangulables.

1. RAPPELS DE THÉORIE DES GRAPHES

Avant d'introduire le cœur du sujet, nous allons rappeler quelques résultats connus depuis longtemps sur les graphes. Bien comprendre le cas des graphes, dont le lecteur a probablement déjà entendu parler, aidera celui-ci à mieux saisir les définitions et résultats analogues sur les complexes simpliciaux. En effet, l'analogie est assez complète. Une exception notable, le lien entre forêts et composantes connexes est spécifique à la dimension 1.

Un graphe simple fini $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble fini V de *sommets* et un ensemble fini E d'arêtes, chaque arête étant une paire de sommets. Notons n le nombre d'arêtes et p le nombre de sommets. Le genre de G est un nombre entier g défini par $g := |E| - |V| + 1$. Si G est connexe, un arbre couvrant de G est un sous-graphe $T = (V(T), E(T))$ (avec $V(T) \subset V$, $E(T) \subset E$) qui est couvrant (i.e., $V(T) = V$) et qui vérifie les trois conditions suivantes.

- (1) T est acyclique;
- (2) T est connexe;
- (3) $|E(T)| = |E| - g$ (ou, de manière équivalente, le genre de T est nul).

Les trois conditions sont en fait redondantes : deux suffisent pour être un arbre couvrant.

Si l'on numérote les sommets du graphe, de 1 à p , ainsi que ses arêtes, de 1 à n , et si l'on choisit une orientation des arêtes, on peut définir la matrice d'incidence du graphe G comme la matrice $Q = (\mathbf{q}_{v,e})_{v \in V, e \in E}$, que l'on peut naturellement voir comme un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{Z})$, telle que

$$\mathbf{q}_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } v \text{ est l'extrémité finale de l'arête } e, \\ -1 & \text{si le sommet } v \text{ est l'extrémité initiale de l'arête } e, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si r est le rang de la matrice Q , alors $r = p - 1$. Si l'on sélectionne un sommet quelconque $v \in V$, alors la matrice Q_{V-v} désigne la matrice de $\mathcal{M}_{p-1,n}(\mathbb{Z})$ contenant uniquement les colonnes de Q d'indice dans l'ensemble $V - v := V \setminus \{v\}$.

Voici maintenant le célèbre théorème de Kirchhoff, étroitement lié à l'étude des réseaux électriques effectué par Gustav Kirchhoff en 1847. Ce théorème, qui est central dans l'étude des arbres couvrants, est aussi nommé, à juste titre, « matrix-tree theorem ».

Théorème 1.1 (Théorème de Kirchhoff pondéré). *Avec les notations ci-dessus, si $\mathcal{ST}(G)$ désigne l'ensemble des arbres couvrants de G , et si $\underline{x} = (x_e)_{e \in E}$ est une famille de variables associées à chaque arête, alors*

$$\det(Q_{V-v} X Q_{V-v}^\top) = \sum_{T \in \mathcal{ST}(G)} \underline{x}^{E(T)},$$

où X désigne la matrice diagonale $\text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, et

$$\underline{x}^{E(T)} := \prod_{e \in E(T)} x_e.$$

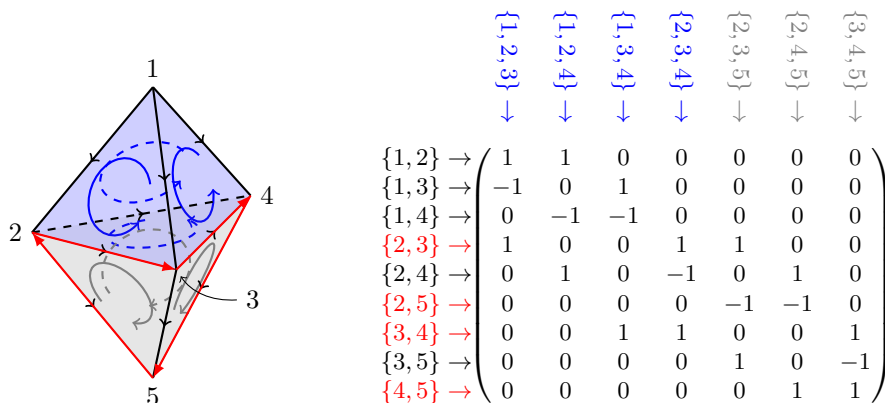


FIGURE 1. Une bipyramide et sa seconde matrice d'incidence.

Remarquez que lorsque les x_i sont tous égaux à 1, le déterminant compte le nombre d'arbres couvrants! Il existe de nombreuses preuves de ce théorème. Plusieurs utilisent un lemme technique, appelé formule de Cauchy-Binet, permettant de calculer le déterminant du produit de deux matrices rectangulaires. On obtient alors

$$\det(Q_{V-v} X Q_{V-v}^T) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ |E'|=r}} \det(Q_{V-v, E'})^2 \underline{x}^{E'},$$

où $Q_{V-v, E'}$ désigne la matrice issue de Q en ne conservant que les termes dont l'indice est dans $(V-v) \times E'$. Il reste alors à montrer que $\det(Q_{V-v, E'})$ vaut ± 1 si E' sont les arêtes d'un sous-arbre de G , 0 sinon. Cela donne lieu à de jolies démonstrations combinatoires que nous ne détaillerons pas ici.

Avant de passer aux complexes simpliciaux, nous définissons les κ -forêts d'un graphe, notion qui sera généralisée en dimensions supérieures. Même si G n'est pas connexe, pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$, on définit une κ -forêt couvrante de G comme étant un sous-graphe couvrant F vérifiant :

- (1) F est acyclique,
- (2) F possède κ composantes connexes de plus que G ,
- (3) $|E(F)| = |E| - g - \kappa$.

De nouveau les trois conditions sont redondantes dans le sens précédent.

2. FORÊTS SUR LES COMPLEXES SIMPLICIAUX

2.1. Complexes simpliciaux. Commençons par la définition ; nous verrons un exemple concret après.

Soit V un ensemble fini, par exemple $V := \{1, \dots, m\}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Un *complexe simplicial abstrait* Δ de sommets V est un ensemble de parties de V stable par inclusion, i.e., $\Delta \subset \mathcal{P}(V)$ et, pour tout $\delta \in \Delta$, si $\gamma \subset \delta$, alors $\gamma \in \Delta$. Les éléments de Δ sont appelés les *faces* de Δ . La *dimension* d'une face δ est $\dim(\delta) := |\delta| - 1$, une *facette* est une face de dimension maximale et la *dimension de* Δ , notée $\dim(\Delta)$ est égale à la dimension de ses facettes. Remarquez que Δ possède une unique face de dimension -1 : l'ensemble vide. Si d désigne la dimension de Δ , pour tout $l \in \{-1, \dots, d\}$, on note Δ_l l'ensemble des faces de dimensions l (aussi appelés l -faces).

Prenons l'exemple de la figure 1. Elle représente un complexe simplicial Δ de dimension $d = 2$ (les tétraèdres sont « creux ») appelé *bipyramide*. Le complexe Δ possède sept facettes, neuf arêtes (ou 1-faces), cinq sommets ($V = \{1, \dots, 5\}$) et une -1 -face.

On définit aussi le l -squelette de Δ comme le sous-complexe

$$\Delta_{(l)} := \bigcup_{k=-1}^l \Delta_k.$$

Comme nous avons choisi un ordre naturel sur les sommets en les numérotant de 1 à m , cela induit un ordre standard sur Δ_l , $l \in \{-1, \dots, d\}$, qui est l'ordre lexicographique. Par exemple, sur la figure 1, les arêtes sont triées de haut en bas à gauche de la matrice, et les facettes de gauche à droite au-dessus de la matrice.

Sans vouloir définir explicitement « orientation », l'ordre des sommets induit une *orientation standard* sur les faces qui est l'ordre croissant sur chaque face. Par exemple, les arêtes sont dirigées du plus petit sommet vers le plus grand, et les 2-faces sont munies d'un ordre cyclique sur leurs sommets suivant l'ordre croissant sur les sommets (cf. figure 1).

Ces orientations permettent de définir, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, le $l^{\text{ème}}$ *morphisme de bord (réduit)* définit par

$$\begin{aligned} \partial_{\Delta, l} : \quad \mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle &\rightarrow \mathbb{Z}\langle \Delta_{l-1} \rangle, \\ \{i_0, \dots, i_l\} \text{ avec } i_0 < \dots < i_l &\mapsto \sum_{j=0}^l (-1)^j \{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_l\}, \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle$ désigne le \mathbb{Z} -module libre sur l'ensemble Δ_l , c'est-à-dire le groupe des combinaisons linéaires abstraites de l -faces (muni d'une multiplication extérieure par \mathbb{Z}). Les morphismes de bord sont essentiels en topologie algébrique. Par exemple, sur la bipyramide, calculons le bord de la facette $\{1, 2, 3\}$. Cela va être une combinaison linéaire des côtés de $\{1, 2, 3\}$ (d'où le nom de morphisme de *bord*). On voit que l'orientation des arêtes $\{1, 2\}$ et $\{2, 3\}$ suit celle du triangle, tandis que $\{1, 3\}$ est contre-orientée. On obtient alors

$$\partial_{\Delta, 2}(\{1, 2, 3\}) = \{1, 2\} + \{2, 3\} - \{1, 3\}.$$

Nous notons $\mathcal{Z}_l(\Delta) := \ker(\partial_{\Delta, l})$ l'ensemble des l -cycles de Δ , et $\mathcal{B}_{l-1}(\Delta) := \text{Im}(\partial_{\Delta, l})$ l'ensemble des $(l-1)$ -bords de Δ . Par exemple, sur la bipyramide, le tétraèdre bleu orienté extérieurement (dans le sens trigonométrique en regardant depuis l'extérieur) est un 2-cycle :

$$\partial_{\Delta, 2}(\{1, 2, 3\} + \{1, 3, 4\} - \{1, 2, 4\} - \{2, 3, 4\}) = 0.$$

Le lacet rouge est à la fois un 1-bord,

$$\{2, 3\} - \{2, 5\} + \{4, 5\} + \{3, 4\} = \partial_{\Delta, 2}(\{2, 3, 5\} + \{3, 4, 5\}),$$

et un 1-cycle,

$$\partial_{\Delta, 1}(\{2, 3\} - \{2, 5\} + \{4, 5\} + \{3, 4\}) = 0.$$

En fait, un simple calcul nous montre que $\delta_{\Delta, l-1} \circ \delta_{\Delta, l} = 0$, donc les l -bords sont toujours des l -cycles. Cette remarque nous permet de définir le $l^{\text{ème}}$ groupe d'homologie $\mathcal{H}_l(\Delta) := \mathcal{Z}_l(\Delta) / \mathcal{B}_l(\Delta)$. Ces groupes d'homologie sont des invariants très importants en topologie algébrique. Nous ne détaillerons pas cela ici. Toutefois, on a toujours $\mathcal{H}_d(\Delta) = \mathcal{Z}_d(\Delta)$ et $\mathcal{H}_0(\Delta) = \mathbb{Z}^k$ où k est le nombre de composantes connexes de Δ . Dans le cas de la bipyramide, $\mathcal{H}_1(\Delta)$ est trivial : tous les 1-cycles sont en fait des 1-bords.

Enfin, le choix de l'ordre standard sur Δ_l donne une base standard de $\mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle$. Nous assimilerons les espaces $\mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle$ et $\mathbb{Z}^{|\Delta_l|}$ grâce à l'isomorphisme induit par cette base standard. On peut définir la $l^{\text{ème}}$ *matrice d'incidence de Δ* comme la matrice $Q_{\Delta, l} \in \mathcal{M}_{|\Delta_{l-1}|, |\Delta_l|}(\mathbb{Z})$ qui représente le morphisme $\partial_{\Delta, l}$ relativement aux bases standards. Ainsi, la 2nde matrice d'incidence de la bipyramide est indiquée dans la partie droite de la figure 1.

Remarquez qu'un graphe peut être vu comme un complexe simplicial de dimension 1. Les cycles orientés d'un graphe induisent des cycles du complexe simplicial, et la matrice d'incidence du graphe correspond à la 1^{ère} matrice d'incidence du complexe simplicial. Maintenant nous pouvons facilement généraliser la notion de forêt.

2.2. Forêts sur les complexes simpliciaux. Fixons un complexe simplicial Δ de dimension d , de sommets V et possédant n facettes et p $(d-1)$ -faces, pour des entiers $n, p \in \mathbb{N}^*$. Dans cette sous-section, le morphisme ∂_Δ désignera $\partial_{\Delta,d}$, et Q désignera la $d^{\text{ème}}$ matrice d'incidence de Δ . On pose aussi $r := \text{rg}(Q)$.

Il existe plusieurs définitions des forêts généralisées. Nous en présentons une qui est à la fois assez générale (tous les complexes simpliciaux ont des forêts) et assez naturelle, en suivant les définitions des articles [4] et [1]. Notamment le dernier article prolonge la définition ci-dessous en définissant la racine d'une forêt, ainsi que les « fitting orientations » sur les forêts.

Si Γ est un complexe simplicial de sommets V et tel que $\Gamma \subset \Delta$, on dit que Γ est un *sous-complexe couvrant* de Δ .

Définition 2.1. Soit $\kappa \in \mathbb{N}$, et soit Γ un sous-complexe couvrant de Δ tel que $\Gamma_{(d-1)} = \Delta_{(d-1)}$. On dit que Γ est une κ -forêt de Γ si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

- (1) $\mathcal{Z}_d(\Gamma)$ est trivial.
- (2) $\text{rg}(\mathcal{B}_{d-1}(\Gamma)) = \text{rg}(\mathcal{B}_{d-1}(\Delta)) - \kappa$.
- (3) $|\Gamma_d| = |\Delta_d| - \text{rg}(\mathcal{Z}_d(\Delta)) - \kappa$.

Remarquez que les trois conditions généralisent dans le même ordre les trois conditions des graphes (cf. (1), (2), (3)); plus exactement, les conditions coïncident dans le cas $d = 1$, si l'on voit un complexe simplicial de dimension 1 comme un graphe (en fait, le genre g d'un graphe vaut $g = \text{rg}(\mathcal{Z}_d(\Delta))$).

Comme dans le cas des graphes, n'importe quelle paire de conditions suffit pour être une forêt. Il suffit d'appliquer le théorème du rang pour le démontrer.

Comment fait-on concrètement pour trouver une κ -forêt? Ce n'est pas compliqué. Commençons par le cas $\kappa = 0$. Prenons un cycle quelconque de Δ , retirons une facette de ce cycle, puis prenons un cycle restant, retirons de nouveau une facette et continuons l'opération jusqu'à qu'il ne reste plus de cycle. On ne peut pas faire d'erreur : à la fin on obtient forcément une 0-forêt, et toutes les 0-forêts peuvent être obtenues de cette façon. En retirant κ facettes quelconques de plus, on obtient une κ -forêt. Pour bien comprendre ce phénomène, le lecteur pourra s'intéresser à la théorie des matroïdes (cf. [9]).

Par exemple, sur la bipyramide, on peut choisir une facette du cycle bleu, par exemple $\{1, 2, 3\}$, et la retirer. Le tétraèdre du bas forme toujours un cycle. Retirons par exemple $\{2, 3, 4\}$. Il n'y a plus de cycle : on obtient une 0-forêt de la bipyramide.

2.3. Décompte du nombre de 0-forêts, ou presque... Comme on peut le voir dans les articles [4] et [1], le théorème de Kirchhoff se généralise au cas des forêts des complexes simpliciaux. Nous allons l'énoncer d'une manière un peu différente de ces articles.

A priori, les colonnes de la $d^{\text{ème}}$ matrice d'incidence Q n'ont aucune raison de former une famille libre. Comme dans le cas du graphe, il faudrait choisir une sous-matrice \tilde{Q} . Mais nous allons procéder différemment. Soit $F \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{Z})$ une matrice dont les colonnes forment une base de $\text{Im}(Q)$. Il existe un unique $\tilde{Q} \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ telle que $Q = F\tilde{Q}$. Notamment, dans le cas du graphe, on peut choisir F telle que \tilde{Q} soit obtenue à partir de Q en retirant une rangée.

Si Γ est un sous-complexe de Δ , on note $\text{Fac}(\Gamma)$ l'ensemble des numéros des facettes de Δ qui sont dans Γ .

Théorème 2.2 (Théorème de Kirchhoff généralisé). *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\det(\tilde{Q}X\tilde{Q}^\top) = \sum_{\Gamma \text{ 0-forêt de } \Delta} |\mathcal{H}_{d-1}(\Gamma)/\mathcal{H}_{d-1}(\Delta)|^2 \underline{x}^{\text{Fac}(\Gamma)},$$

où $X := \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarquez que $\mathcal{H}_{d-1}(\Gamma)/\mathcal{H}_{d-1}(\Delta) \simeq \mathcal{B}_{d-1}(\Delta)/\mathcal{B}_{d-1}(\Gamma)$. Dans la définition 2.1, pour le cas $\kappa = 0$, nous avons seulement exigé que $\mathcal{B}_{d-1}(\Gamma)$ et $\mathcal{B}_{d-1}(\Delta)$ aient même rang, et non pas qu'ils soient égaux. Contrairement aux cas des graphes, il se peut qu'en effet ils ne coïncident pas. Pourtant, nous souhaitons tout de même que Γ soit une 0-forêt (notamment à cause de la construction

des 0-forêts présentée ci-dessus). Les coefficients dans le théorème précédent proviennent de ce phénomène.

Preuve rapide. La preuve de ce théorème est assez simple. En appliquant la formule de Cauchy-Binet, qui se montre facilement en développant les différents déterminants, on obtient

$$\det(\tilde{Q}X\tilde{Q}^\top) = \sum_{\substack{I \in \{1, \dots, n\} \\ |I|=r}} \det(\tilde{Q}_{*,I})^2 \underline{x}^I,$$

où $\tilde{Q}_{*,I} := \tilde{Q}_{\{1, \dots, r\}, I}$. Les sous-ensembles I de taille r dans $\{1, \dots, n\}$ sont exactement les ensembles de la forme $\text{Fac}(\Gamma)$ où Γ est un sous-complexe de Δ ayant le bon nombre de facettes pour être une 0-forêt (il vérifie la troisième condition de la définition 2.1 pour $\kappa = 0$). Si un tel Γ n'est pas une 0-forêt, cela signifie qu'il contient un cycle, i.e., les colonnes de $\tilde{Q}_{*,I}$ ne sont pas libres, i.e., $\det(\tilde{Q}_{*,I}) = 0$. Supposons que Γ est une 0-forêt, et que $I = \text{Fac}(\Gamma)$. Dans un \mathbb{Z} -module, le déterminant d'une matrice calcule la taille du quotient de l'espace par l'image de la matrice. Comme $Q_{*,I} = F\tilde{Q}_{*,I}$, $\tilde{Q}_{*,I}$ est la matrice représentant $Q_{*,I}$ dans la base des colonnes de F donc

$$\begin{aligned} |\det(\tilde{Q}_{*,I})| &= |\text{Im}(F)/\text{Im}(Q_{*,I})| \\ &= |\mathcal{B}(\Delta)/\mathcal{B}(\Gamma)| \\ &= |\mathcal{H}_{d-1}(\Gamma)/\mathcal{H}_{d-1}(\Delta)|, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Définition 2.3. Avec les mêmes notations, on définit le *polynôme de Kirchhoff* de Δ par

$$\text{Kir}(\Delta; \underline{x}) := \det(\tilde{Q}X\tilde{Q}^\top).$$

Le théorème précédent montre que la généralisation des forêts présentée est intéressante. La présence des coefficients peut paraître ennuyante, notamment car ils empêchent de compter le nombre de 0-forêts si l'on ne sait calculer le déterminant que pour $X = \text{Id}_n$. On pourrait chercher une autre formule où tous les coefficients valent 1, mais ils est peu probable qu'une telle formule existe. Toutefois la présence des coefficients n'est pas si grave que cela, comme nous allons le voir.

Premièrement, il est rare qu'ils soient différents de 1. Cela arrive par exemple lorsque l'on prend un CW-complexe où l'une des 2-cellules a pour bord deux fois le bord d'une autre cellule. Ensuite on peut facilement trianguler ce CW-complexe pour obtenir un complexe simplicial. Cet exemple est le plus simple où les coefficients ne valent pas tous un.

Deuxièmement, l'article [1] montre que le théorème compte le nombre de 0-forêts en prenant en compte une *fitting orientation*.

Finalement, grâce à des matrices avec plus de deux dimensions et aux hyperdéterminants (objets étudiés par Arthur Cayley en 1849, cf. [8]), il est possible de calculer le même polynôme où l'on remplace le carré par une puissance $k^{\text{ème}}$, pour n'importe quel entier k pair strictement positif (pour plus de détail, voir le mémoire de l'auteur [10]). Par conséquent, si l'on connaît les valeurs pour $X = \text{Id}$ et pour tous les k pairs strictement positifs, on peut retrouver la valeur pour $k = 0$, c'est-à-dire le nombre de 0-forêts.

3. INVARIANTS

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, généraliser la notion de forêt en dimensions supérieures permet de créer un nouveau lien entre l'étude des espaces topologiques triangulables et la théorie des graphes. Nous allons illustrer ce propos par deux exemples d'invariants topologiques et géométriques : la torsion de Reidemester et les polynômes de Symanzik.

Mais commençons par voir comment passer des espaces topologiques aux complexes simpliciaux.

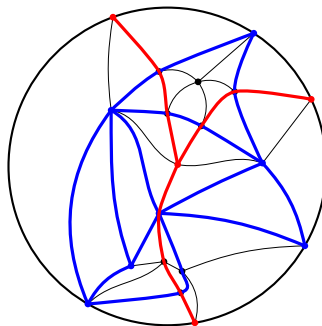


FIGURE 2. Deux triangulations du disque et une triangulation commune.

3.1. Triangulations et sous-décompositions. Soit Δ un complexe simplicial de sommets V et soit E un espace euclidien. Soit ν une application de V dans E . On peut prolonger ν aux faces de Δ par

$$\nu(\{i_0, \dots, i_l\}) := \text{conv}(\nu(i_0), \dots, \nu(i_l)),$$

où $\text{conv}(v_0, \dots, v_l)$ désigne l'enveloppe convexe de v_0, \dots, v_l . On note

$$\nu(\Delta) := \bigcup_{\delta \in \Delta} \nu(\delta).$$

Si ν est *non dégénérée*, c'est-à-dire si, pour tout $\delta \in \Delta$, $\dim(\nu(\delta)) = \dim(\delta)$ (pour la dimension affine), et si, pour tout $\delta, \gamma \in \Delta$,

$$\nu(\delta \cap \gamma) = \nu(\delta) \cap \nu(\gamma),$$

alors on dit que $\nu(\Delta)$ est une *représentation géométrique de Δ* .

Supposons que ν est non dégénérée. Si X est un espace topologique et si Φ est un homéomorphisme de $\nu(\Delta)$ vers X , on dit que (Δ, ν, Φ) est une *triangulation* de X . Si X admet une triangulation, on dit que X est *triangulable*. Par exemple, la figure 2 présente une triangulation du disque (si l'on ne tient pas compte des couleurs).

Soient Δ' un second complexe simplicial et $\nu' : \Delta' \rightarrow E$ non dégénérée vérifiant $\nu'(\Delta') = \nu(\Delta)$. Si, pour tout $\delta' \in \Delta'$, il existe $\delta \in \Delta$ telle que $\nu(\delta') \subset \nu(\delta)$, on dit que (Δ', ν') est une *sous-décomposition* de (Δ, ν) , voire que Δ' est une *sous-décomposition* de Δ . Si ν' n'est plus à image dans E mais dans un autre espace euclidien F , et si (Δ', ν', Φ') est une triangulation de X , s'il existe un homéomorphisme Ψ de $\nu'(\Delta')$ dans $\nu(\Delta)$ tel que $(\Delta', \Psi \circ \nu')$ est une sous-décomposition de (Δ, ν) , et tel que $\Phi' = \Phi \circ \Psi$, alors on dit que (Δ', ν', Φ') est une *sous-triangulation* de (Δ, ν, Φ) . Par exemple, l'ensemble des arcs de la figure 2 forme une sous-triangulation de la triangulation rouge.

Un résultat très important : les surfaces compactes sont toutes triangulables.

3.2. Torsion de Reidemester. La topologie algébrique cherche des invariants permettant de différencier deux espaces topologiques qui ne sont pas « déformables » l'un en l'autre. Toute la difficulté est de trouver un bon compromis entre calculabilité et discrimination. Par exemple, la caractéristique d'Euler-Poincaré, étroitement reliée au genre d'un graphe, est un invariant très facile à calculer, mais beaucoup d'objets différents ont la même caractéristique. À l'opposé, les groupes d'homotopie (ou, dans une moindre mesure, d'homologie) sont parfaits pour distinguer deux espaces topologiques, mais ils sont très durs à calculer. Ici nous allons étudier la torsion de Reidemester, qui est en gros une caractéristique d'Euler-Poincaré dans laquelle on prend en compte les déterminants des morphismes de bord. Elle est très bien connue dans les petites dimensions, admet beaucoup de techniques pour simplifier son calcul, et est assez discriminante à la fois.

Nous allons partir d'une définition de cette torsion qui nous arrange. Ce n'est pas la définition que l'on donne habituellement, mais il n'est pas très compliqué de démontrer qu'il s'agit de la même notion.

Prenons un complexe simplicial Δ . Pour chaque $l \in \mathbb{Z}$, choisissons une base de $\mathcal{B}_l(\Delta)$ sous forme d'une matrice $B_l \in \mathcal{M}_{|\Delta_l|, \text{rg}(\mathcal{B}_l(\Delta))}(\mathbb{Z})$. Par conséquent, les colonnes de B_l sont dans $\text{Im}(Q_{l+1})$, où Q_l est la $l^{\text{ème}}$ matrice d'incidence de Δ . Il existe donc une matrice $\tilde{B}_l \in \mathcal{M}_{|\Delta_l|, \text{rg}(\mathcal{B}_{l-1}(\Delta))}(\mathbb{Z})$ telle que $B_{l-1} = Q_l \tilde{B}_l$. Choisissons aussi une base de $\mathcal{H}_l(\Delta)$ et un représentant dans $\mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle$ pour chaque élément de cette base, ce qui nous donne une matrice $H_l \in \mathcal{M}_{|\Delta_l|, \text{rg} \mathcal{H}_l(\Delta)}(\mathbb{Z})$. Finalement, on pose M_l la matrice où l'on concatène horizontalement B_l puis H_l puis \tilde{B}_l . Les colonnes de M_l forment une base de $\mathbb{Z}\langle \Delta_l \rangle \simeq \mathbb{Z}^{|\Delta_l|}$; en effet, B_l et H_l forment une base du noyau de Q_l (par définition, $\mathcal{H}_l(\Delta)$ « complète » $\mathcal{B}_l(\Delta)$ en $\mathcal{Z}_l(\Delta)$), et \tilde{B}_l est un antécédant d'une base de l'image de Q_l . On peut donc calculer le déterminant de M_l .

Définition 3.1. Ici, la *torsion de Reidemeister* de Δ est définie par

$$\tau(\Delta, (H_l)_{l \in \mathbb{Z}}) := \prod_{l \in \mathbb{Z}} \det(M_l)^{(-1)^l}.$$

Remarquez que le produit est fini car la plupart des M_l sont triviaux (pour $l \notin \{-1, \dots, d\}$, et même pour $l = -1$ en fait). De plus, la définition est cohérente car la torsion ne dépend pas du choix de B_l et \tilde{B}_l : ajouter un élément du noyau de Q_l à \tilde{B}_l ne change rien car le déterminant est alterné ; et si l'on modifie le choix de B_l , cela va modifier $\det(M_l)$ d'un certain facteur, mais l'on va être obligé de modifier \tilde{B}_{l+1} ce qui va modifier $\det(M_{l+1})$ du même facteur, ces facteurs s'annulent car le produit est alterné. Finalement, la torsion dépend bien du choix des bases d'homologie (H_l) , mais comme nous sommes dans un \mathbb{Z} -module, un changement de base ne fait que modifier le signe, donc en fait $\tau^2(\Delta)$ ne dépend d'aucun choix. En fait, τ est même stable par sous-décomposition ($\tau(\Delta') = \tau(\Delta)$ si Δ' est une sous-décomposition de Δ), ce qui permet de définir τ sur des espaces topologiques triangulables sans trop se soucier de la triangulation choisie. Plus exactement on peut choisir une autre triangulation si les deux triangulations possèdent une sous-triangulation commune. C'est par exemple le cas pour la figure 2 où les triangulations bleues et rouges possèdent une triangulation commune.

Maintenant le résultat suivant s'ajoute aux nombreux outils de calcul de la torsion de Reidemeister.

Théorème 3.2. *Si Δ est un complexe simplicial, alors*

$$\tau^2(\Delta) := \prod_{l=0}^d \left(\frac{\eta_l}{\text{Kir}(\Delta_{(l)}; 1, \dots, 1)} \right)^{(-1)^l},$$

où η_l est explicité dans la preuve (cf. (1)).

Preuve rapide. La preuve algébrique est dans [2]. Nous la traduisons d'un point de vue matriciel. Pour l fixé, on peut choisir \tilde{B}_l dans l'orthogonal de $\mathcal{Z}_l(\Delta)$, et H_l dans l'orthogonal de $B_l \oplus \tilde{B}_l$. Si l'on calcule $\det(M_l)^2 = \det(M_l^\top M_l)$, on obtient $\det(M_l^\top M_l) = \det(B_l^\top B_l) \det(H_l^\top H_l) \det(\tilde{B}_l^\top \tilde{B}_l)$. On pose

$$(1) \quad \eta_l = \det(H_l^\top H_l).$$

On peut voir η_l comme un covolume. Si les groupes d'homologie sont assez simples, η_l est facile à calculer, et même vaut très souvent 1. La fin de la preuve consiste à montrer que

$$\frac{\det(B_{l-1}^\top B_{l-1})}{\det(\tilde{B}_l^\top \tilde{B}_l)} = \det(\tilde{Q}_l \tilde{Q}_l^\top),$$

ce qui vient du fait que $B_{l-1} = Q_l \tilde{B}_l$. □

Maintenant passons au second invariant.

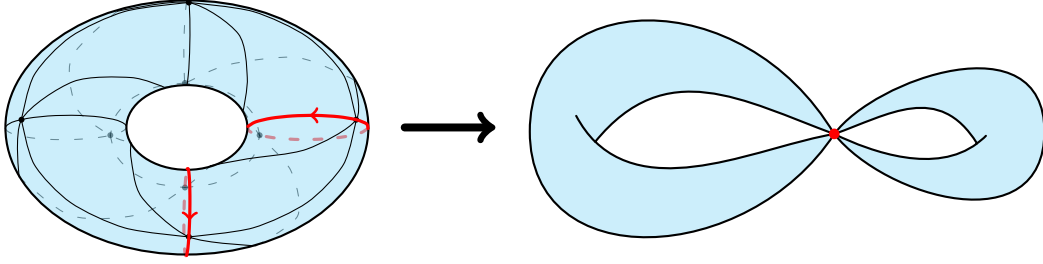


FIGURE 3. Un bord simple sur un tore triangulé, et sa contraction.

3.3. Polynômes de Symanzik. Soient Δ un complexe simplicial de dimension d , avec n facettes, Q sa $d^{\text{ème}}$ matrice d'incidence, r son rang, et soit $S \in \mathcal{M}_{n,s}(\mathbb{Z})$, $s := n - r$, une matrice dont les colonnes forment une base de $\ker(Q)$.

Soient $l \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_l \in \mathcal{B}_{d-1}(\Delta) \simeq \text{Im}(Q)$. Soient $v_1, \dots, v_l \in \mathbb{Z}^n$ tels que $Qv_i = u_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, l\}$. Soit $\tilde{S} \in \mathcal{M}_{n,s+l}$ la matrice S à laquelle on a rajouté à droite les l colonnes v_1, \dots, v_l dans cet ordre.

Définition 3.3. Avec les notations ci-dessus, le *polynôme de Symanzik de Δ de paramètres u_1, \dots, u_l* est défini par

$$\text{Sym}(\Delta; \underline{x}) = \det(\tilde{S}^\top X \tilde{S}),$$

où $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$.

La présente définition englobe en fait, de manière non évidente, les définitions originelles de premiers et seconds polynômes de Symanzik que l'on trouve en physique. Pour plus de détail sur cette définition et ses propriétés, dont celles présentées ci-dessous, on pourra regarder [10].

Tout d'abord, il y a une dualité entre polynômes de Symanzik et polynômes de Kirchhoff.

Théorème 3.4. *Dans le cas sans paramètre, on a un dual du théorème de Kirchhoff,*

$$\det(SX S^\top) = \sum_{\Gamma \text{ 0-forêt de } \Delta} |\mathcal{H}_{d-1}(\Gamma) / \mathcal{H}_{d-1}(\Delta)|^2 \underline{x}^{\text{Fac}(\Gamma)^c}.$$

Notez que l'on prend le complémentaire dans l'exposant. La preuve est de nouveau un calcul impliquant des matrices bien choisies.

Ensuite, comme pour la torsion de Reidemeister, les polynômes de Symanzik sont stables par sous-décomposition pour des paramètres additifs. C'est-à-dire que si l'on coupe une facette de variable x_1 en deux facettes de variables y_1 et y'_1 , il suffit de remplacer x_1 par $y_1 + y'_1$ pour obtenir le nouveau polynôme de Symanzik. En fait, cette propriété se voit assez bien. D'après le théorème précédent, il suffit d'étudier les 0-forêts, qu'on obtient en faisant des trous dans les cycles, ces trous étant encodés dans l'exposant de \underline{x} . Mais retirer la facette x_1 revient à retirer soit la facette y_1 soit la facette y_2 .

Cette stabilité fait des polynômes de Symanzik de bons candidats d'invariants géométriques (aussi topologiques, mais plutôt géométriques car le fait que les variables soient additives conduit naturellement à considérer des volumes). On voit toutefois que les polynômes de Symanzik vont être moins précis que la torsion de Reidemeister, car ils ne prennent en compte que les facettes, et non pas toutes les faces. Il pourrait être intéressant de voir ce qu'il se passe, par exemple, lorsqu'on prend le produit alterné des polynômes de Symanzik.

Donnons quelques exemples. On a vu qu'une surface compacte orientable est triangulable. Soit \mathcal{S} une telle surface et supposons que (Δ, ν, Φ) est une triangulation de cette surface (voir, par exemple, le tore triangulé à gauche de la figure 3). Prenons Vol une mesure finie diffuse sur \mathcal{S} : on peut par exemple voir Vol comme une forme volume qui calcule la surface de \mathcal{S} . Les 0-forêts sont très simples sur \mathcal{S} : il suffit d'enlever n'importe quelle facette. Par conséquent,

$$\text{Sym}(\Delta; \underline{x}) = x_1 + \dots + x_n.$$

Maintenant, si δ_i est la $i^{\text{ème}}$ facette de Δ , on pose $x_i \leftarrow \text{Vol}(\Phi \circ \nu(\delta_i))$. On obtient alors

$$\text{Sym}(\Delta; \text{Vol}(\Phi \circ \nu(\delta_1)), \dots) = \text{Vol}(\Phi \circ \nu(\delta_1)) + \dots = \text{Vol}(\mathcal{S}).$$

Ainsi, le polynôme de Symanzik calcule le volume total de \mathcal{S} .

Maintenant, que se passe-t-il pour des paramètres assez simples ? On rappelle que les paramètres sont des bords. Les bords coupent les espaces topologiques en différents morceaux. Ici, un bord est *simple* s'il coupe l'espace en seulement deux morceaux (cf. bord rouge dans la figure 3). Rajouter un paramètre u qui est un bord consiste à rajouter ce paramètre à la matrice S , donc aux cycles : on transforme un bord qui n'était pas un cycle en un cycle ! Mais cela revient au même que de contracter le bord en un point si le bord est simple. En effet, dans la figure 3, on voit bien que cette contraction ne rajoute qu'un seul cycle, et que ce cycle correspond à un morceau du tore dont le bord était u . On peut voir sans trop de difficulté que, comme les deux parties de surfaces ne sont collées que par un point, on peut les séparer sans changer la valeur du polynôme de Symanzik. Ce dernier vaut en fait le produit des polynômes de Symanzik de chacune des parties. On obtient finalement

$$\text{Sym}(\Delta, u; \text{Vol}(\Phi \circ \nu(\delta_1)), \dots) = \text{Vol}(\mathcal{S}_1) \text{Vol}(\mathcal{S}_2)$$

où \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 désignent les deux parties.

On peut rajouter d'autres cycles simples disjoints et l'on obtient alors le produit des volumes des parties créées.

Que se passe-t-il maintenant si les surfaces sont plus compliquées ? A priori l'étude des polynômes de Symanzik en tant qu'invariants n'a jamais été faite auparavant, donc nos connaissances sont encore faibles dessus. Toutefois, une motivation est fournie par le fait que l'on connaît très bien la valeur du polynôme de Symanzik sans paramètre d'un graphe métrique : c'est le volume d'un tore nommé le Jacobien tropical. Il y a de bons espoirs que cet exemple se généralise en dimension supérieures.

D'autres méthodes de calcul pourraient aussi apparaître, comme des moyens de découper les espaces topologiques en petits bouts pour calculer plus facilement le polynôme.

De plus, les polynômes de Symanzik possèdent plusieurs autres propriétés utiles en physique, en théorie de Hodge asymptotique et peut-être bientôt en probabilités. Cela motive d'autant plus l'approfondissement de leur étude.

CONCLUSION

Finalement, les complexes simpliciaux sont des objets très combinatoires, particulièrement lorsqu'on les voit comme des généralisations des graphes. Nous espérons que cette introduction à convaincu le lecteur du bien-fondé de cette généralisation. Les différents théorèmes énoncés ont en fait des preuves assez simples, bien que très calculatoires, et c'est le cas d'autres résultats intéressants sur les forêts des complexes simpliciaux. Cela n'empêche pas les complexes simpliciaux s'être étroitement reliés aux objets géométriques et topologiques, impliquant des résultats sur ces objets qu'il aurait été pénible de montrer, et même d'énoncer, directement dans le cadre géométrique. Pour conclure, l'étude des forêts sur les complexes simpliciaux, notamment par le biais des polynômes de Symanzik, ouvrent des pistes de recherche sur les invariants géométriques, mais aussi dans d'autres domaines des mathématiques.

RÉFÉRENCES

- [1] O. Bernardi, C. J. Klivans, Directed rooted forests in higher dimension, Preprint, available at <https://arxiv.org/abs/1512.07757> (2015)
- [2] M. J. Catanzaro, V. Y. Chernyak, J. R. Klein, Kirchhoff's theorems in higher dimensions and Reidemeister torsion, *Homology, Homotopy and Applications*, vol. 17(1), 2015, 165–189
- [3] G. de Rham, Sur les nouveaux invariants de M. Reidemeister, *Mat. Sb.*, 1 (5) : 737–743, (1936)
- [4] A. Duval, C. Klivans, and J. Martin, Simplicial matrix-tree theorems, *Transactions of the American Mathematical Society*, 361 (2009), no. 11, 6073–6114
- [5] W. Franz, Ueber die Torsion einer Ueberdeckung, *J. Reine Angew. Math.*, 173 : 245–254, (1935)
- [6] Gil Kalai, Enumeration of Q-acyclic simplicial complexes, *Israel J. Math.* 45, no. 4 (1983), 337–351

- [7] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen der Physik* **148** (1847), no. 12, 497–508.
- [8] A. Cayley, On the theory of determinants, *Trans. Cambridge Phil Soc.* VIII : 1–16, 1849.
- [9] J. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, 1992
- [10] M. Piquerez, A generalization of Symanzik Polynomials, disponible sur la page de l'auteur <https://www.eleves.ens.fr/home/piquerez/>
- [11] H. Poincaré, Analysis Situs, *Journal de l'École Polytechnique*, t. 1, 1895, p.1—121.
- [12] H. Poincaré, Complément à l'Analysis Situs, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 13, p. 285—343 (1899)
- [13] H. Poincaré, Second complément à l'Analysis Situs, *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. 32, p. 277—308 (1900)
- [14] H. Poincaré, Sur certaines surfaces algébriques ; Troisième complément à l'Analysis Situs, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. 30, p. 49—70 (1902)
- [15] H. Poincaré, Sur les cycles des surfaces algébriques ; Quatrième complément à l'Analysis Situs, *Journal de Mathématiques*, t. 8, p. 169—214 (1902)
- [16] H. Poincaré, Cinquième complément à l'Analysis Situs, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 18, pp. 45—110 (1904)
- [17] K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 : 102–109 (1935)
- [18] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy. I, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, 1949, p. 213–245
- [19] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy. II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 55, 1949, p. 453–496