

Introduction au domaine de recherche Marche aléatoire parmi des conductances aléatoires

Rémy Poudevigne-Auboiron

6 janvier 2017

Les marches aléatoires sont une bonne modélisation des processus de diffusion. Lorsque le milieu dans lequel le processus de diffusion vit est fortement irrégulier, il peut être intéressant de modéliser le milieu par un milieu aléatoire. Un des modèles de marches aléatoires en milieu aléatoire est celui de la marche aléatoire parmi des conductances aléatoires dont le principal intérêt est que la marche qui en résulte est réversible, ce qui simplifie grandement son étude.

Table des matières

1	Présentation du modèle et premiers résultats	3
1.1	Définitions	3
1.2	Utilité de la réversibilité	4
1.3	Point de vue de la particule	5
2	Résultats limites	6
2.1	Cas uniformément elliptique	7
2.2	Cluster de percolation	8
2.3	Cas borné supérieurement	9
	Références	11

1 Présentation du modèle et premiers résultats

1.1 Définitions

Tout d'abord on s'intéresse à la marche dans un environnement donné ω .

Définition 1. *Un environnement est un graphe (V, E) auquel on associe une valeur positive w_e pour chaque arête $e \in E$ que l'on appelle conductance. Si $e \notin E$, on pose $w_e = 0$.*

À chaque point $x \in V$ on associe la valeur $\pi_x = \sum_{y \in V} w_{(xy)}$.

On peut maintenant définir deux marches aléatoires associées à cet environnement :

Définition 2. *On appelle marche aléatoire discrète (X_n) la marche aléatoire définie par la relation :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0, X_1, \dots, X_n) = \frac{w_{X(n),y}}{\pi_{X(n)}}.$$

On appelle marche aléatoire continue à vitesse constante (\tilde{X}_t) la marche aléatoire précédente qui attend des temps qui sont des variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, indépendantes au lieu d'attendre un temps 1.

Le point de départ de la marche sera spécifié de la façon suivante : $\mathbb{P}_x(A)$ désignera la probabilité de l'évènement A , la marche commençant en x .

Remarque :

Au vu des définitions de ces deux marches on peut s'attendre à ce qu'elles aient des comportements similaires. Cependant la marche continue est plus simple à étudier pour deux raisons : la première est que la plupart des quantités la concernant sont C^∞ , la seconde est qu'il est assez simple de déduire un résultat pour la marche continue à partir d'un résultat sur la marche discrète car on a la formule explicite suivante :

$$\forall \omega \forall x, y \in V, \forall t \in \mathbf{R}^+, \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) = \sum_{k \in \mathbf{N}} \exp(-t) \frac{t^k}{k!} \mathbb{P}_x(X_k = y).$$

Maintenant, on peut passer à l'environnement, plusieurs choix sont possibles mais l'un des plus intuitifs est de considérer que le graphe est \mathbf{Z}^d , deux points étant reliés s'ils sont voisins. Les conductances sont choisies de façon iid selon une loi μ (sauf mention contraire, on considèrera que $\mathbb{P}(w_e = 0) = 0$ pour éviter les problèmes de définition de la marche). On note \mathbb{A} la probabilité sur les environnements qui en résulte.

1.2 Utilité de la réversibilité

Définition 3. On dit qu'une chaîne de Markov $(Z_i)_{i \in \mathbf{N}}$ dont les probabilités de transitions sont données par $P(x, y) = \mathbb{P}_x(Z_1 = y)$ est réversible s'il existe une loi μ sur V telle que :

$$\forall x, y \in V, \mu(y)P(x, y) = \mu(x)P(y, x).$$

Dans notre modèle on a également la propriété suivante :

Proposition 1.2.1. Pour un environnement donné, la marche aléatoire est réversible pour la loi μ donnée par :

$$\mu(x) = \pi_x.$$

Dans cette section, on donne deux résultats qui découlent de la réversibilité du modèle et on explique en quoi ils simplifient l'étude du modèle.

Proposition 1.2.2. Pour tout $x, y \in V$, pour tout $t \in \mathbf{R}^+$, on a :

$$\mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) \leq \sqrt{\frac{\pi_y}{\pi_x} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = x) \mathbb{P}_y(\tilde{X}_t = y)}.$$

Démonstration. On commence par remarquer que pour tout $x, y \in V$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi_y} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) &= \sum_{z \in V} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t/2} = z) \frac{1}{\pi_y} \mathbb{P}_z(\tilde{X}_{t/2} = y) \\ &= \sum_{z \in V} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t/2} = z) \frac{1}{\pi_z} \mathbb{P}_y(\tilde{X}_{t/2} = z) \text{ par réversibilité.} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, si $x = y$:

$$\frac{1}{\pi_x} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = x) = \sum_{z \in V} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t/2} = z)^2 \frac{1}{\pi_z}.$$

Maintenant, si on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à :

$$\sum_{z \in V} \sqrt{\frac{1}{\pi_z} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{t/2} = z)} \sqrt{\frac{1}{\pi_z} \mathbb{P}_y(\tilde{X}_{t/2} = z)},$$

on trouve :

$$\frac{1}{\pi_y} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) \leq \sqrt{\frac{1}{\pi_x} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = x) \frac{1}{\pi_y} \mathbb{P}_y(\tilde{X}_t = y)}.$$

□

Cette propriété permet donc de déduire des bornes supérieures pour les probabilités de transition, simplement en connaissant les probabilités de retour. On a le même résultat pour la marche discrète pour les entiers pairs, pour les entiers impairs il faut rajouter des $+1$ et des -1 mais on a un résultat similaire. En pratique cette inégalité donne de bons résultats tant que les points sont à une distance inférieure à \sqrt{t} .

On a un résultat concernant les probabilités de retour en un point, valable pour tout environnement, qui simplifie son étude dans certains cas.

Proposition 1.2.3. *Pour tout $x \in V$, $\mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = x)$ est décroissante en t .*

Démonstration. On utilise le fait que :

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{2t} = y) = \sum_{z, (yz) \in E} \left(\frac{\mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = z)}{\pi_z} - \frac{\mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y)}{\pi_y} \right) w_{yz}.$$

Puis que

$$\frac{1}{\pi_x} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{2t} = x) = \sum_{z \in V} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = z)^2 \frac{1}{\pi_z}.$$

On dérive dans la somme et on finit par montrer que :

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_{2t} = y) = - \sum_{(zy) \in E} \left(\frac{\mathbb{P}_x(\tilde{X}_{2t} = z)}{\pi_z} - \frac{\mathbb{P}_x(\tilde{X}_{2t} = y)}{\pi_y} \right)^2 w_{yz}.$$

D'où le résultat. □

1.3 Point de vue de la particule

Dans cette section, on peut considérer que la loi \mathbb{A} est seulement invariante par translation, on n'a pas besoin qu'elle soit exactement égale à ce qui a été donné dans la première section. Les deux marches aléatoires peuvent être vues d'un point de vue différent : le point de vue de la particule. Au lieu de considérer une particule se déplaçant dans un environnement, on regarde la suite des environnements obtenus en remplaçant la position actuelle de la particule au milieu, c'est-à-dire (en notant τ_u la translation de vecteur u) :

$$\omega_n = \tau_{-X_n}(\omega);$$

ω est l'environnement dans lequel la particule se déplace. On a la même définition dans le cas de la marche continue à vitesse constante. On obtient ainsi une chaîne de Markov que l'on notera $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. On peut facilement montrer la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *si π_0 est intégrable sous \mathbb{A} , la loi donnée par la relation suivante est réversible :*

$$\mathbb{Q}(B) = \mathbb{E}_{\mathbb{A}}(\pi_0 1_B), \text{ pour tout évènement } B.$$

Ce résultat a plusieurs avantages. Le premier est que les lois \mathbb{A} et \mathbb{Q} sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et donc que tout évènement presque sûr pour l'une est presque sûr pour l'autre. L'autre est que la loi \mathbb{Q} est assez explicite, il est donc aisé de faire des calculs l'utilisant. Maintenant, en appliquant le théorème ergodique de Birkhoff, on trouve :

Proposition 1.3.2. *Soit f une fonction \mathbb{Q} intégrable, \mathbb{Q} p.s et donc \mathbb{A} p.s, la limite suivante existe et est finie :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(Z_k).$$

Remarque :

On peut également prouver, de la même façon que la proposition reste vraie si f dépend de $Z_k, Z_{k+1}, Z_{k+2}, \dots, Z_{k+a}$ pour un certain a . On a ainsi une version un peu faible de la loi forte des grands nombres. On peut cependant montrer certain résultat utile comme :

Proposition 1.3.3. *Dans le cas où les conductances sont iid, et que π_0 est intégrable selon \mathbb{A} , on a que pour \mathbb{A} presque tout environnement :*

$$\frac{|X_n|}{n} \rightarrow 0, \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

Démonstration. On peut trouver une fonction f telle que pour presque tout environnement :

$$X_{n+1} - X_n = f(w_{-\tau(X_n)}, w_{-\tau(X_{n+1})}).$$

Ensuite le résultat précédent nous donne que $\frac{|X_n|}{n}$ converge presque sûrement vers une limite finie. On peut ensuite utiliser une loi du 0 – 1 pour montrer que cette limite est presque sûrement constante. Et enfin on utilise la symétrie du modèle pour montrer que cette limite est 0. \square

2 Résultats limites

On fixe la dimension d . Une question que l'on peut se poser est de savoir pour quelles mesures μ les marches se comportent comme la marche simple dans \mathbf{Z}^d . Par exemple est-ce que la marche tend vers un mouvement brownien une fois renormalisée ? Plusieurs résultats ont été démontrés dans ce sens.

2.1 Cas uniformément elliptique

Définition 4. On dit qu'une mesure de probabilité μ sur \mathbf{R} est uniformément elliptique s'il existe $1 \geq \epsilon > 0$ tel que :

$$\mu \left(\left[\epsilon, \frac{1}{\epsilon} \right] \right) = 1.$$

Le cas où la mesure est uniformément elliptique est probablement le cas le mieux compris. Un des principaux résultats, dû à Delmotte [5], est le suivant :

Théorème 1. Il existe des constantes strictement positives C_1, C_2, c_1, c_2 telles que pour tout t et pour presque tout environnement on ait :

$$\forall x, y \in \mathbf{Z}^d, \frac{C_1}{t^{-d/2}} \exp \left(-c_1 \frac{d(x, y)^2}{t} \right) \leq \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) \leq \frac{C_2}{t^{-d/2}} \exp \left(-c_2 \frac{d(x, y)^2}{t} \right).$$

Remarque :

On a un résultat similaire pour la marche X_n . Les seules différences sont que la borne inférieure n'est vraie que si n est de la bonne parité et que $d(x, y) \leq n$ où d représente la distance du graphe.

La preuve de cette proposition est assez longue et non triviale, l'idée générale est de montrer une inégalité de Poincaré, c'est à dire qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction f de \mathbf{Z}^d dans \mathbf{R} et toute boule $B(x, R)$ on ait :

$$\sum_{y \in B(x, R)} \pi_y |f(y) - \bar{f}| \leq CR^2 \sum_{y_1, y_2 \in B(x, R)} w_{y_1 y_2} (f(y_1) - f(y_2))^2$$

où \bar{f} est la moyenne de f sur B pondérée par π_z , c'est-à-dire que :

$$\bar{f} = \left(\sum_{y \in B(x, R)} \pi_y \right)^{-1} \sum_{y \in B(x, R)} \pi_y f(y).$$

Cette inégalité permet de montrer que la marche se répartit sur la boule $B(0, \sqrt{t})$ en temps t . Puis, en regardant le volume de cette boule, on peut conclure pour des distances plus petites que \sqrt{t} . Les raisonnements sont plus subtils pour obtenir les bornes au-delà.

Un autre résultat dans le même esprit a été montré par Sidoravicius [6] en 2004 :

Théorème 2. Pour presque tout environnement, $\frac{1}{\sqrt{s}} X_{\lfloor sn \rfloor}$ converge en loi vers un mouvement Brownien quand s tend vers l'infini.

On voit donc que dans le cas uniformément elliptique les comportements sont proches de ceux que l'on a pour la marche simple dans \mathbf{Z}^d .

2.2 Cluster de percolation

Définition 5. *Le modèle de percolation en dimension d et de paramètre p est le suivant : à chaque arête de \mathbf{Z}^d on associe de façon iid la valeur 'ouverte' avec probabilité p ou 'fermée' sinon.*

Le cluster associé à un point x est l'ensemble des points reliés à x par un chemin d'arêtes ouvertes.

On sait que pour chaque dimension il existe une valeur critique du paramètre que l'on notera p_c^d telle que si $p < p_c^d$ alors presque sûrement tous les clusters sont finis et si $p > p_c^d$ alors presque sûrement il existe un cluster infini et il est unique. Le comportement pour $p = p_c^d$ n'est pas encore très bien compris pour toutes les dimensions (on ne le connaît pas pour les dimensions comprises entre 3 et 18 incluses) mais on conjecture que pour toutes les dimensions, au point critique, presque sûrement, tous les clusters sont finis.

On peut maintenant regarder les lois μ telles que $\mu(\{0, 1\}) = 1$ et telles que si l'on considère que les arêtes de conductance 1 sont ouvertes et celles de conductance 0 sont fermées alors on a presque sûrement un cluster infini. Pour éviter les problèmes de définition de la marche et les cas dégénérés, on conditionne au fait que 0 soit dans le cluster infini. Cette loi peut être considérée soit comme étant fondamentalement non-elliptique puisque la valeur 0 est autorisée soit au contraire si l'on considère que le graphe sur lequel on se déplace n'est pas \mathbf{Z}^d mais le cluster infini, comme l'exemple même d'une loi uniformément elliptique puisque toutes les arêtes ont la même conductance.

On a alors des résultats similaires au cas uniformément elliptique, à une subtilité près : les résultats ne sont valables qu'après un temps aléatoire (dont tous les moments sont finis). Plus précisément, Barlow [2] a prouvé le résultat suivant :

Théorème 3. *Il existe un temps aléatoire T ayant tous ses moments et des constantes C_1, C_2, c_1, c_2 telles que pour tout $t > T$ on ait :*

$$\forall x, y \in \mathbf{Z}^d, \frac{C_1}{t^{-d/2}} \exp\left(-c_1 \frac{d(x, y)^2}{t}\right) \leq \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) \leq \frac{C_2}{t^{-d/2}} \exp\left(-c_2 \frac{d(x, y)^2}{t}\right).$$

Le temps T vient du fait que, localement, le cluster de percolation peut avoir des comportements non typiques, par exemple être localement isomorphe à $\mathbf{Z}^{d'}$ avec $d \neq d'$. Les bornes ne peuvent donc pas être correctes dans ce cas.

On a toujours la convergence vers un mouvement Brownien, cette propriété ayant aussi été prouvée dans le même article [6] pour le cas uniformément elliptique.

2.3 Cas borné supérieurement

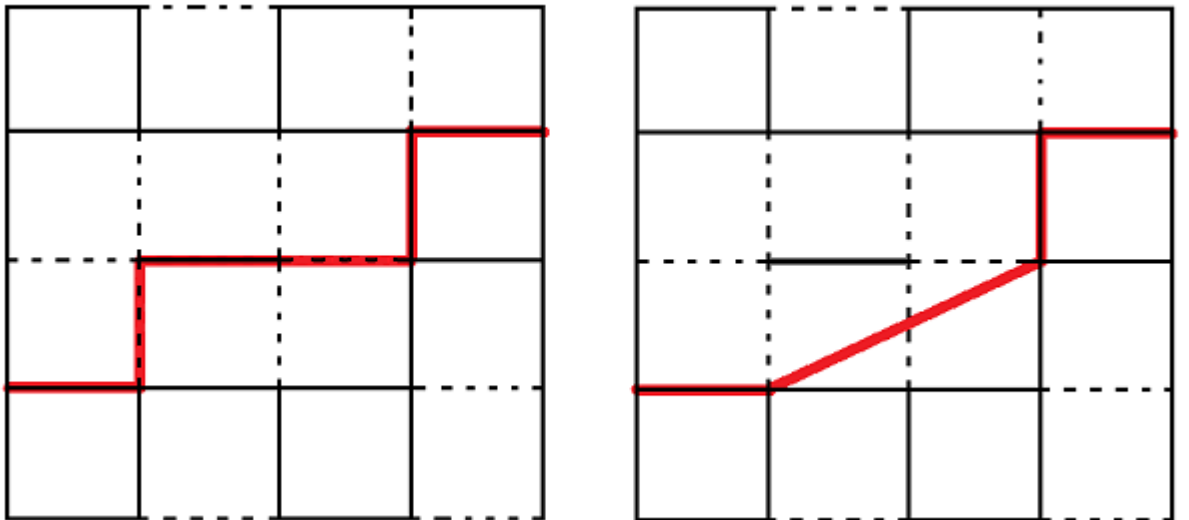
On considère maintenant le cas où $\mu((0, 1]) = 1$ (s'il existe C telle que $\mu((0, C]) = 1$, il suffit de diviser toutes les conductances par C pour se ramener au cas étudié). Dans ce cas on ne peut pas directement appliquer les méthodes de Delmotte [5] ou Barlow [2], d'ailleurs il a été prouvé [1] que la probabilité de retourner en 0 peut être rendue arbitrairement proche de n^{-2} (seulement pour une infinité de temps, pas pour tous et la probabilité doit rester négligeable devant n^{-2}) pour des dimensions $d \geq 5$. Cependant, si la queue de la loi n'est pas trop lourde, on s'attend à retrouver des résultats similaires aux deux cas précédents. Pour prouver de tels résultats, la méthode employée est de considérer un seuil ξ tel que presque sûrement les clusters obtenus en reliant les points par des chemins ne contenant que des arêtes de conductances inférieures à ξ soient de taille finie. On veut aussi que la taille du cluster (le nombre de points de ce cluster) contenant 0 ait un moment exponentiel. On note alors \mathcal{C} le cluster infini des points pouvant être reliés par des arêtes de conductances supérieures ou égales à ξ . Un tel seuil n'existe que pour des dimensions $d \geq 2$.

Définition 6. On définit la marche Y_n comme la marche X_n dont on ne retient que les passages dans \mathcal{C} . Plus précisément on définit par récurrence la suite de temps N_n comme suit :

$$N_0 = \min \{n, X_n \in \mathcal{C}\} \text{ et } N_{n+1} = \min \{n > N_n, X_n \in \mathcal{C}\}.$$

Ensuite on prend $Y_n = X_{N_n}$.

Dans la figure suivante, les traits pleins correspondent aux arêtes de conductances supérieures ou égales à ξ et les traits en pointillés aux arêtes de conductances strictement inférieures à ξ . Les traits rouges correspondent aux déplacements des marches X_n pour la première figure et Y_n pour la seconde.



On définit de façon similaire la marche \tilde{Y}_t associée à \tilde{X}_t . Ces deux nouvelles marches sont toujours réversibles et on peut les voir comme les marches que l'on a définies mais sur un graphe légèrement différent dont il n'est pas aisé de calculer toutes les conductances. Pour ces nouvelles marches on peut appliquer les méthodes de Delmotte et Barlow et on retrouve les décroissances que l'on souhaite pour les probabilités de retour en un point (après un temps aléatoire ayant tous ses moments pour des raisons similaires au cas du cluster de percolation).

L'utilisation de ces deux nouvelles marches a permis de prouver plusieurs résultats, notamment [4] :

Théorème 4. *Il existe $\sigma^2 > 0$ tel que, en notant $B_t^{\sigma^2}$ le mouvement Brownien en dimension d de covariance $\sigma^2 I_d$ on ait pour presque tout environnement :*

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \tilde{X}_{st} \rightarrow B_t^{\sigma^2}.$$

Démonstration. L'idée de la preuve consiste à considérer des seuils de plus en plus proches de 0 et d'utiliser le fait que pour chaque seuil, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{s}} \tilde{Y}_{st}\right)$ est tendue pour en déduire que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{s}} \tilde{X}_{st}\right)$ est tendue. Puis il suffit de montrer que la limite est un mouvement brownien en utilisant le fait que pour des seuils suffisamment petits $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ et $(\tilde{y}_t)_{t \in \mathbf{R}}$ sont 'proches'. \square

Des bornes supérieures ont également été démontrées, par Boukhadra [3], dans le cas où la loi μ a une queue polynomiale pas trop lourde.

Théorème 5. *Si μ vérifie $\mu((0, x]) = x^\gamma(1 + o(1))$ avec $\gamma > \frac{1}{8} \frac{d}{d-1/2}$ alors il existe $c_1, c_2, \delta > 0$ tels que pour tout t suffisamment grand (plus grand qu'une variable aléatoire T presque sûrement finie), pour tout $x, y \in B(0, t^{(1+\delta)/2})$ tels que $d(x, y) \leq \sqrt{t}$ on ait :*

$$c_1 t^{-d/2} \leq \frac{1}{\pi_y} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_t = y) \leq c_2 t^{-d/2}.$$

Démonstration. La démonstration de la borne inférieure est un peu technique. En revanche pour la borne supérieure, en utilisant les résultats de la section 1.2, on voit qu'il 'suffit' de montrer que pour tout $x \in B(0, t^{(1+\delta)/2})$:

$$\frac{1}{t} \int_{t/2}^t \frac{1}{\pi_x} \mathbb{P}_x(\tilde{X}_s = x) ds \leq ct^{-d/2}.$$

Pour cela on regarde la probabilité de rester un temps de l'ordre de t dans le complémentaire de \mathcal{C} pour \tilde{Y}_s . On peut montrer (cela nécessite quelques lemmes techniques) que dans le cas des mesures considérées, il existe une constante C tel que cette probabilité est négligeable devant $t^{-d/2}$ si $s < Ct$. Sinon, si $s \geq Ct$, alors $\mathbb{P}_x(\tilde{Y}_s = x)$ est de l'ordre de grandeur souhaité. \square

Références

- [1] N. Berger, M. Biskup, C.E. Hoffman, and G. Kozma. Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances. *Ann.Inst.Henri.Poincare*, 274(2) :374–392, 2008.
- [2] M.T.Barlow. Random walks on the supercritical percolation clusters. *Ann.Probab*, 32(4) :3024–3084, 2004.
- [3] O.Boukhadra, T.Kumagai, and P.Mathieu. Harnack inequalities and local central limit theorem for the lower tail random conductance model. *J.Math.Soc.Japan*, 67(4) :1413–1448, 2015.
- [4] P.Mathieu. Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *J Stat Phys*, 130(5) :1025–1046, 2008.
- [5] T.Delmotte. Parabolic harnack inequalities and estimates of markov chains on graphs. *Rev.Mat.Iberoamericana*, 15 :181–232, 1999.
- [6] V.Sidoravicius and A-S.Sznitman. Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances. *Probab.Theory Relat.Fields*, 129 :219–244, 2004.