Introduction au domaine de recherche
Régularité uniforme des solutions de NLS intégrable

Ruoci Sun
sous la direction de
Patrick Gérard

06/10/2016

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à présenter ici mes sincères remerciements à monsieur Patrick Gérard, mon directeur de mémoire et de thèse, pour tous les conseils qu'il m'a donnés sur le domaine de mathématiques et sur le domaine de la langue française. Je suis reconnaissant également à ma famille et à tous les professeurs et camarades que j'ai rencontrés aux universités parisiennes et à l'ENS.

1 Introduction

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger 2π-périodique

$$\text{(NLS)} \quad \begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) = 2|u(t,x)|^2 u(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{T} \tag{1}$$

où $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont prouvées par la méthode de point fixe et par la persistance de régularité. Si la donnée initiale $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T})$, alors l'équation (1) admet une unique solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$ qui vérifie la formule de Duhamel :

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) - 2i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s,x)|^2 u(s,x)\mathrm{d}s, \qquad \forall x \in \mathbb{T} \tag{2}$$

où la famille $(e^{it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe des opérateurs unitaires $H^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{T})$, pour tout $p \geq 0$, qui est défini par

$$e^{it\Delta}u(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-itk^2}\hat{u}(k)e^{ikx}, \qquad \forall u \in H^p(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si la donnée initiale u_0 est analytique, on peut prouver que l'unique solution de l'équation (1) reste spatialement analytique en tout temps. De plus on trouve une minoration du rayon d'analyticité de la solution qui tend vers 0 en grand temps. En revanche, on ne sait pas si le rayon de convergence tend vers 0 lorsque $|t| \to +\infty$. Pour résoudre ce problème, on utilise l'intégrabilité de l'équation (1) pour détecter s'il existe une borne inférieure qui minore tous les rayons d'analyticité spatiale de la trajectoire u.

Le but de ce texte est d'introduire une méthode pour trouver un nombre infini de lois de conservation de l'équation (1) qui contrôle toutes les normes de Sobolev $H^p(\mathbb{T})$, $\forall p \geq 1$. Ensuite, on les utilise pour étudier la régularité analytique uniforme.

En 1971, deux mathématiciens russes, V.E.Zakharov et A.B.Shabat, ont trouvé que l'équation (1) admet une paire de Lax, qui consiste en deux opérateurs non bornés agissant sur $\{H^p(\mathbb{T})\}_{p\in\mathbb{R}}$

$$L_u := \begin{pmatrix} -D & u \\ \bar{u} & D \end{pmatrix}, \qquad B_u := \begin{pmatrix} 2i\partial_x^2 - i|u|^2 & u' + 2u\partial_x \\ \bar{u}' + 2\bar{u}\partial_x & -2i\partial_x^2 + i|u|^2 \end{pmatrix}, \qquad \forall u \in C^\infty(\mathbb{T}) \tag{3}$$

où $D := -i\partial_x$, tels que si $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$, u résout l'équation (1) si et seulement si $\frac{d}{dt}L_{u(t)} = [B_{u(t)}, L_{u(t)}]$. Dans le théorème 2.3, la paire de Lax déduit l'existence d'une suite de lois de conservation un nombre infini de lois de conservation $(E_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de cette équation. L'équation (1) peut être résolue explicitement à l'aide des coordonnées d'action-angle construites dans le livre de B. Grébert et T.Kappeler [4].

Définition 1.1. *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, on dit que f est analytique s'il existe une constante $\delta > 0$ et une fonction holomorphe $\tilde{f}$ définie sur le domaine $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \delta\}$ telle que $\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f$.*

La fonction $\tilde{f}$, si elle existe, est forcément 2π-périodique, grâce à l'unicité du prolongement analytique de la fonction $z \mapsto \tilde{f}(z+1) - \tilde{f}(z)$, qui est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.1. *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, alors on a l'équivalence entre*
(1) *f est analytique.*
(2) *Il existe deux constantes $\eta > 1$ et $M > 0$ telles que*

$$\sup_{x\in\mathbb{T}} |f^{(p)}(x)| \leq M\eta^p p!, \qquad \forall p \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

(3) *Il existe deux constantes $\eta' > 1$ et $M' > 0$ telles que*

$$\|\partial_x^{p-1}|f|^2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\partial_x^p f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq M'{\eta'}^{2p}(p!)^2, \qquad \forall p \geq 1.$$

Lorsque u_0 est analytique, il existe $R_0 > 1$ et $M_0 > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{T}$,

$$\|\partial_x^{p-1}|u_0|^2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\partial_x^p u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq M_0 R_0^{2p}(p!)^2, \qquad \forall p \geq 1.$$

La stratégie de recherche est d'utiliser la récurrence par rapport à p pour montrer qu'il existe $R > 1$ et $M > 0$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\partial_x^p u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq M R^{2p}(p!)^2, \qquad \forall p \geq 1$$

si u est la solution de l'équation (1) associée à la donnée initiale u_0. Comme la loi de conservation E_p est sous la forme

$$E_p(u(t)) = \int_{\mathbb{T}} \partial_x^{p-1}|u(t,x)|^2 + |\partial_x^p u(t,x)|^2 + F\left(u(t,x), \overline{u(t,x)}, \cdots, u^{(p-1)}(t,x), \overline{u^{(p-1)}(t,x)}\right) \mathrm{d}x$$

avec F un polynôme qui est au plus quadratique par rapport aux variables $u^{(p-1)}, \overline{u^{(p-1)}}$, on va essayer d'utiliser E_p pour boucler la récurrence et trouver le lien entre R et R_0.

Pour cela, on va estimer la partie principale de F dans la section 3 en utilisant la méthode de série génératrice et la méthode de la symétrisation. On va essayer de boucler la récurrence dans la section 4. Après avoir obtenu le résultat négatif, on affaiblit la condition sur u_0 pour que la récurrence puisse être bouclée et on arrive à la première étape vers un résultat de régularité uniforme en grand temps dans une classe plus faible des fonctions lisses.

2 Paire de Lax

Définition 2.1. *Soit $(X_0, \langle\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable avec une base hilbertienne $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Alors $u \mapsto (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme de X_0 vers $l^2(\mathbb{Z})$, si $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\epsilon_n$. Soit une suite strictement positive $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\theta_{-n} = \theta_n$ et $\theta_n \to +\infty$ si $|n| \to +\infty$. Soit*

$$l_s^2 := \{(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2\theta_n^{2s} < +\infty\} \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

On définit $X_s := \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\epsilon_n : (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_s^2\}$, qui admet une base hilbertienne $(\theta_n^{-s}\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_s := \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\bar{v}_n\theta_n^{2s} \qquad \text{si} \qquad u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\epsilon_n \quad v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\epsilon_n \tag{5}$$

Alors on appelle $\{X_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ une échelle des espaces de Hilbert.

Et on définit $X_\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} X_s$ et $X_{-\infty} := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} X_s$. $\{H^p(\mathbb{T})\}_{p\in\mathbb{Z}}$, $\{H^p(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)\}_{p\in\mathbb{Z}}$ sont deux échelles des espaces de Hilbert utiles dans ce texte, où $H^p(\mathbb{T};\mathbb{C}^2) = H^p(\mathbb{T}) \times H^p(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert avec une base hilbertienne $\{\frac{e_n^+}{\langle n\rangle^p}, \frac{e_n^-}{\langle n\rangle^p}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n^+(x) = e^{inx}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $e_n^-(x) = e^{inx}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\forall p$.

Remarque 2.1. $\bigcap_{p\in\mathbb{R}} H^p(\mathbb{T}) = C^\infty(\mathbb{T})$.

Définition 2.2. *Soient deux échelles des espaces de Hilbert $\{X_s\}$, $\{Y_s\}$ et une application linéaire $L : X_\infty \to Y_{-\infty}$, on dit que L est un morphisme d'ordre d de $\{X_s\}$ à $\{Y_s\}$ s'il existe $s_0, s_1 \in [-\infty, \infty]$ tels que $L \in B(X_s, Y_{s-d})$ pour tout $s \in [s_0, s_1]$.*

Par exemple, les opérateurs pseudo-différentiels sont des morphismes de $\{H^p(\mathbb{T})\}_{p\in\mathbb{R}}$ vers $\{H^p(\mathbb{T})\}_{p\in\mathbb{R}}$. Les deux notions 'ordre' coïncident.

Soit $\{Z_s\}$ une échelle des espaces de Hilbert, s'il existe $s_* \geq 0$ et une forme symplectique ω bien définie sur Z_s, $\forall s \geq s_*$, on dit que $(\{Z_s\}, \omega)$ est une échelle des espaces de Hilbert symplectique. Soit H une fonctionnelle de classe C^1 définie sur Z_s pour un certain $s \geq s_*$, alors pour tout $u \in Z_s$, il existe un unique vecteur $\nabla_\omega H(u) \in Z_{-s}$ tel que

$$\omega(\nabla_\omega H(u), v) = \langle \mathrm{d}H(u), v\rangle_{Z_{-s}, Z_s} \qquad \forall v \in Z_s \tag{6}$$

parce que ω est non-dégénérée. On appelle $\nabla_\omega H$ le gradient symplectique de H.

Une équation de type Hamiltonienne générale dans l'échelle des espaces de Hilbert symplectique $(\{Z_s\}, \omega)$ est sous la forme

$$\partial_t u(t) = \nabla_\omega H(u(t)) \tag{7}$$

où $u(t) \in Z_s$ et $\partial_t u(t) \in Z_{-s}$, $s \geq s_* \geq 0$.

Proposition 2.1. *L'équation (1) admet une structure Hamiltonienne dans l'échelle des espaces de Hilbert symplectique $(\{H^p(\mathbb{T})\}, \omega)$ avec $\omega(u, v) := \mathrm{Im} \int_{\mathbb{T}} \overline{u(x)} v(x) \mathrm{d}x$, avec l'énergie*

$$H(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^4 \mathrm{d}x$$

définie sur $H^1(\mathbb{T})$.

Définition 2.3. *Une loi de conservation de l'équation (1) est une fonctionnelle E définie sur l'espace des phases où l'équation (1) est (au moins localement) bien posée, qui reste invariante le long de la trajectoire de l'équation (1), c'est-à-dire*

$$E(u(t)) = E(u_0) \qquad \forall t \in I_{max, u_0}$$

si u résout l'équation (1).

Remarque 2.2.

$$E_0(u(t)) = \int_{\mathbb{T}} |u(t, x)|^2 \mathrm{d}x$$

et

$$E_1(u(t)) = \int_{\mathbb{T}} |\partial_x u(t, x)|^2 + |u(t, x)|^4 \mathrm{d}x$$

sont respectivement les conservations de la masse et de l'énergie de l'équation de Schrödinger cubique (NLS).

2.1 Opérateurs de Zakharov-Shabat

Définition 2.4. *On dit que l'équation (7), qui est définie dans une certaine échelle des espaces de Hilbert symplectique* $(\{Z_s\},\omega)$*, admet une paire de Lax* $\{\mathcal{L},\mathcal{B}\}$ *s'il existe deux applications* $\mathcal{L}:u\mapsto\mathcal{L}_u$, $\mathcal{B}:u\mapsto\mathcal{B}_u$ *et deux nombres réels* s_0, d *tels que*
(a). $\forall s\geq s_0$, $\forall u\in Z_s$, $\mathcal{L}_u$ *et* $\mathcal{B}_u$ *sont des morphismes d'ordre* d *d'une échelle des espaces de Hilbert additionnelle* $\{\mathfrak{Z}_s\}$*, de plus si* $d\leq r\leq s$, $\mathcal{L}$: $Z_s\to B(\mathfrak{Z}_r;\mathfrak{Z}_{r-d})$, $\mathcal{B}$: $Z_s\to B(\mathfrak{Z}_r;\mathfrak{Z}_{r-d})$ *sont lisses.*
(b). $\forall u\in Z_\infty$, u *est une solution de l'équation (7) si et seulement si*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{u(t)}=[\mathcal{B}_{u(t)},\mathcal{L}_{u(t)}],\qquad\forall t\tag{8}$$

L'équation hamiltonnienne (7) peut avoir plusieurs paires de Lax, si on rajoute des différentes $\{\mathfrak{Z}_s\}$. Dans ce cas, on va étudier ce qui est la plus simple et non-triviale.

Proposition 2.2. *Supposons que l'équation (7) admette une paire de Lax et il existe* $\chi_0\in\mathfrak{Z}_\infty$ *et* $\lambda\in\mathbb{C}$ *tel que* $\mathcal{L}_{u(0)}\chi_0=\lambda\chi_0$*. Supposons aussi que l'équation différentielle ordinaire*

$$\begin{cases}\chi'(t)=\mathcal{B}_{u(t)}\chi(t)\\ \chi(0)=\chi_0\end{cases}\tag{9}$$

admet une unique solution $\chi(t)\in\mathfrak{Z}_\infty$*. Alors*

$$\mathcal{L}_{u(t)}\chi(t)=\lambda\chi(t)$$

pour tout t*.*

Théorème 2.1. *L'équation (1) admet une paire de Lax qui consiste en les opérateurs de Zakharov-Shabat* (L,B)*, qui sont définies dans la formule (3).*

Pour tout $u\in H^2(\mathbb{T})$, les opérateurs L_u et iB_u sont auto-adjoints non bornés dans $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$. De plus, l'opérateur L_u^2 est maximal monotone et l'opérateur $\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)}+h^2L_u^2$ est donc bijectif de $H^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ à $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$, pour tout $h>0$. Comme l'identité $\mathrm{Id}_{H^s(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)}:H^s(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)\hookrightarrow H^{s-1}(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt, $\forall s\in\mathbb{R}$, $(\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)}+h^2L_u^2)^{-1}$ est donc un opérateur à trace dans $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ pour $h>0$.

Proposition 2.3. *Si* $u_0\in C^\infty(\mathbb{T})$, u *est la solution globale de l'équation (1). On rappelle que* $B_{u(t)}=\begin{pmatrix}2i\partial_x^2-i|u|^2 & u'+2u\partial_x\\ \bar{u}'+2\bar{u}\partial_x & -2i\partial_x^2+i|u|^2\end{pmatrix}$ *est un opérateur anti-adjoint défini sur* $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ *pour tout* $t\in\mathbb{R}$ *et* $t\to B_{u(t)}$ *est continue* $\mathbb{R}\to B(H^s(\mathbb{T};\mathbb{C}^2);H^{s-2}(\mathbb{T};\mathbb{C}^2))$*. Alors pour tout* $h_0\in L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$*, l'équation différentielle*

$$\begin{cases}\partial_t h(t)=B_{u(t)}h(t)\\ h(0)=h_0\end{cases}\tag{10}$$

admet une unique solution $h\in C_w(\mathbb{R};L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2))\cap C_w^1(\mathbb{R};H^{-2}(\mathbb{T};\mathbb{C}^2))$*. Et on définit* $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille des opérateurs dans* $L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)$ *telle que* $U(t)h_0:=h(t)$*. Alors* $U(t)$ *est unitaire pour tout* $t\in\mathbb{R}$*.*

Remarque 2.3. *Si* H *est un espace de Hilbert, l'espace* $C_w(\mathbb{R};H)$ *consiste en toutes les fonctions continues de* $\mathbb{R}$ *vers* H *où* H *est muni de sa topologie faible. Alors* $f\in C_w(\mathbb{R};H)$ *si et seulement si* $t\mapsto\langle f(t),v\rangle_H$ *est continue,* $\forall v\in H$*.* $C_w^1(\mathbb{R};H)=\{f\in C_w(\mathbb{R};H):t\mapsto\langle f(t),v\rangle_H\in C^1(\mathbb{R})\}$*.*

Théorème 2.2. *Si* $u_0\in C^\infty(\mathbb{T})$*,* u *est la solution globale de l'équation (1) associée à* u_0*, alors l'opérateur* $L_{u(t)}$ *est unitairement équivalent à* L_{u_0}*. La quantité* $\mathrm{Tr}[(\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)}+h^2L_u^2)^{-1}]$ *est donc une loi de conservation de l'équation (1), pour tout* $h>0$*.*

2.2 Construction des lois de conservation

On a obtenu que $(\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)} + h^2 L_u^2)^{-1}$ est un opérateur à trace. A l'aide du calcul pseudo-différentiel semi-classique, la quantité $\mathrm{Tr}[(\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)} + h^2 L_u^2)^{-1}]$ se développe en série entière de h lorsque $0 < h \ll 1$ et la coefficient de chaque terme h^{2p+2} est une loi de conservation de l'équation (1), qui contrôle la norme H^p de la solution.

Le symbole de l'opérateur différentiel semi-classique

$$\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)} + h^2 L_u^2 = \begin{pmatrix} 1 - h^2\partial^2 + h^2|u|^2 & h^2[u, D] \\ h^2[D, \bar{u}] & 1 - h^2\partial_x^2 + h^2|u|^2 \end{pmatrix} = (1 + h^2 D^2)\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)} + h^2 M(x)$$

est $Q(x, \xi, h) = (1 + \xi^2)I_2 + h^2 M(x)$, où $M(x) = \begin{pmatrix} |u(x)|^2 & i\partial_x u(x) \\ -i\partial_x \bar{u}(x) & |u(x)|^2 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.4. *Ici u dépend à la fois de t et de x. Mais on néglige t dans la formule pour simplifier. De même pour M. La plupart des résultats dans cette sous-section ne dépendent pas explicitement de t sauf les résultats concernant la loi de conservation.*

Proposition 2.4. *Il existe une suite des matrices de symbole $A_k(x,\xi) = \begin{pmatrix} A_k^{11}(x,\xi) & A_k^{12}(x,\xi) \\ A_k^{21}(x,\xi) & A_k^{22}(x,\xi) \end{pmatrix}$ où $A_k^{ij}(x, hD) \in \Psi^{-k-2}(\mathbb{T})$ pour $1 \leq i, j \leq 2$ et $k \in \mathbb{N}$, telles que*

$$(\mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{T};\mathbb{C}^2)} + h^2 L_{u(t)}^2)^{-1} \sim \sum_{k \geq 0} h^k A_k(x, hD) \tag{11}$$

et

$$A_k(x,\xi) = \frac{2i\xi}{1+\xi^2}\partial_x A_{k-1}(x,\xi) + \frac{1}{1+\xi^2}(\partial_x^2 - M(x))A_{k-2}(x,\xi), \qquad \forall k \geq 2. \tag{12}$$

Lemme 2.1. *$\forall k \geq 2$, il existe des fonctions lisses $c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r} \in S^{-k-2}$ avec $r \geq 1$ et $\alpha_j \geq 0$, tels que*

$$A_k(x,\xi) = \sum_{r\geq 1} \sum_{2r+\alpha_1+\cdots+\alpha_r = k} c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi)\partial_x^{\alpha_1} M(x)\partial_x^{\alpha_2} M(x)\ldots\partial_x^{\alpha_r} M(x) \tag{13}$$

et

$$c_{k+2}(\xi) = \frac{2i\xi}{1+\xi^2}c_{k+1}(\xi) + \frac{1}{1+\xi^2}c_k(\xi) \quad \text{avec} \quad c_k(\xi) := c_{k,k-2}(\xi). \tag{14}$$

Corollaire 2.1.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi = -\frac{2p+1}{2^{2p+2}}, \qquad \forall p \geq 1 \tag{15}$$

Lemme 2.2. *La quantité*

$$T_k(u) := \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} \mathrm{tr} A_k(x,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x$$

est une loi de conservation de l'équation (1), pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.5. *$T_{2p+1}\equiv 0$ car $A_{2p}(x,-\xi)=A_{2p}(x,\xi)$ et $A_{2p+1}(x,-\xi)=-A_{2p+1}(x,\xi)$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$, $\forall p\geq 1$, qui est prouvé par récurrence à l'aide de la formule (12).*

Théorème 2.3. *Pour tout $p\geq 1$ entier, il existe un polynôme $F_p=F_p\left(z_0,\overline{z_0},\cdots,z_{p-1},\overline{z_{p-1}}\right):\mathbb{R}^{2p}\to\mathbb{R}$, qui est au plus quadratique par rapport aux variables z_{p-1} et $\overline{z_{p-1}}$ et*

$$E_p(u):=\int_{\mathbb{T}}\left[|u^{(p)}(x)|^2+F_p\left(u(x),\overline{u(x)},\cdots,u^{(p-1)}(x),\overline{u^{(p-1)}(x)}\right)\right]\mathrm{d}x$$

est une loi de conservation de l'équation (1).

Démonstration. $\forall p\geq 1$, en utilisant les formules (12), (13) avec $\int_{\mathbb{T}}\partial_x A_{2p+1}(x,\xi)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{T}}\partial_x^2 A_{2p}(x,\xi)\mathrm{d}x=0$, on obtient que

$$\begin{aligned}T_{2p+2}(u)&=-\frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}}\frac{\mathrm{tr}[M(x)A_{2p}(x,\xi)]}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&=-\sum_{\substack{2r+\alpha_1+\cdots+\alpha_r=2p\\1\leq r\leq p}}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}}\frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi)}{2\pi(1+\xi^2)}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)\ldots\partial_x^{\alpha_r}M(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi\\&=:\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3\end{aligned}$$

où on applique le corollaire (2.1) à $\mathcal{I}_1$

$$\mathcal{I}_1=-\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{2p-2}M(x)]\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}}\frac{c_{2p,2p-2}(\xi)}{2\pi(1+\xi^2)}\mathrm{d}\xi=(-1)^{p-1}\frac{2p+1}{2^{2p+1}}\int_{\mathbb{T}}(\partial_x^{p-1}(|u(x)|^2))^2+|\partial_x^p u(x)|^2\mathrm{d}x$$

parce que $\partial_x^{p-1}M(x)=\begin{pmatrix}\partial_x^{p-1}|u(x)|^2 & i\partial_x^p u(x)\\ -i\partial_x^p\bar{u}(x) & \partial_x^{p-1}|u(x)|^2\end{pmatrix}$ et $\sigma(\partial_x^{p-1}M(x))=\{\partial_x^{p-1}|u(x)|^2\pm|\partial_x^p u(x)|\}$. En faisant l'intégration par partie,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2=&\sum_{\alpha_1+\alpha_2=2p-4}C_{2p,\alpha_1,\alpha_2}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)]\mathrm{d}x\\=&C(p)\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)(\partial_x^{p-2}M(x))^2]\mathrm{d}x+\sum_{\substack{s+q+r=2p-4\\s,q,r\leq p-3}}C(s,q,r)\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^s M(x)\partial_x^q M(x)\partial_x^r M(x)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{I}_2=\int_{\mathbb{T}}H\left(u(x),\overline{u(x)},\cdots,u^{(p-1)}(x),\overline{u^{(p-1)}(x)}\right)\mathrm{d}x$ avec H est un polynôme qui est au plus quadratique par rapport aux termes $u^{(p-1)}(x)$ et $\overline{u^{(p-1)}(x)}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3=&\sum_{\substack{2r+\alpha_1+\cdots+\alpha_r=2p\\3\leq r\leq p}}C_{2p,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)\ldots\partial_x^{\alpha_r}M(x)]\mathrm{d}x\\=&\sum_{3\leq r\leq p}\sum_{\substack{2r+\beta_0+\cdots+\beta_r=2p\\\beta_i\leq p-3}}C(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_r)\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^{\beta_0}M(x)\partial_x^{\beta_1}M(x)\partial_x^{\beta_2}M(x)\ldots\partial_x^{\beta_r}M(x)]\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{T}}G\left(u(x),\overline{u(x)},\cdots,u^{(p-2)}(x),\overline{u^{(p-2)}(x)}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

où G est un polynôme. Alors on définit $E_p(u) := (-1)^{p-1}\frac{2^{2p+1}}{2p+1}T_{2p+2}(u)$.

□

Remarque 2.6. *$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$ est la partie principale de la loi de conservation E_p. $\mathcal{I}_2$ est étudiée en détail dans la section suivante.*

Corollaire 2.2. *Soit $p \geq 1$ entier, $\forall u_0 \in H^p(\mathbb{T})$, alors la famille $\{u(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ reste bornée dans l'espace $H^p(\mathbb{T})$ où u est la solution globale de l'équation (1).*

Corollaire 2.3. *Si $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T})$, alors $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$.*

3 Partie principale de E_p

La suite de lois de conservation $\{E_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ construite dans la section précédente peut contrôler les normes de Sobolev de $u(t)$ pour tout t en fonction des normes de Sobolev de donnée initiale $u(0)$. Certains problèmes d'évolution pourraient être résolus par ces lois de conservation. Avant de commencer les études de la régularité analytique uniforme de la solution, il faut obtenir et simplifier la formule explicite de la partie principale de chaque E_p qui détermine le comportement de croissance E_p. $\forall p \geq 1$,

$$\begin{aligned} E_p(u) =& \|\partial_x^{p-1}|u|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &+ \frac{(-4)^p}{(2p+1)\pi}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=2p-4}\int_{\mathbb{R}}\frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2}(\xi)\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)]\mathrm{d}x \\ &+ \frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}}{2p+1}\int_{\mathbb{T}} G\left(u(x),\overline{u(x)},\cdots,u^{(p-2)}(x),\overline{u^{(p-2)}(x)}\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{16}$$

On appelle les premières deux lignes la partie principale de E_p :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pr}E_p(u) \\ :=& \|\partial_x^{p-1}|u|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{(-4)^p}{(2p+1)\pi}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=2p-4}\int_{\mathbb{R}}\frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2}(\xi)\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Comme $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r = 2p-2r$, lorsque r est grand, la somme $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$ devient petite. Après l'intégration par partie, on peut donc supposer que le terme

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}}{2p+1}\int_{\mathbb{T}} G\left(u(x),\overline{u(x)},\cdots,u^{(p-2)}(x),\overline{u^{(p-2)}(x)}\right)\mathrm{d}x \\ =&\frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}}{2p+1}\sum_{3\leq r\leq p}\sum_{\substack{2r+\beta_0+\cdots+\beta_r=2p\\ \beta_i\leq p-3}} C(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_r)\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^{\beta_0}M(x)\partial_x^{\beta_1}M(x)\ldots\partial_x^{\beta_r}M(x)]\mathrm{d}x \\ =&\frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}}{2p+1}\sum_{\substack{2r+\alpha_1+\cdots+\alpha_r=2p\\ 3\leq r\leq p}}\int_{\mathbb{R}} -\frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi)}{2\pi(1+\xi^2)}\mathrm{d}\xi\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)\ldots\partial_x^{\alpha_r}M(x)]\mathrm{d}x \end{aligned}$$

est négligeable par rapport à la partie principale quand $p \gg 1$. En effet, si $r \geq 3$, les degrés de dérivées $\{\beta_i\}_{0\leq i\leq r}$ sont petits par rapport aux α_1, α_2 dans le cas $r = 2$. Quand on boucle la récurrence, l'influence du somme des termes

$$\|\partial_x^{\beta_i}|u|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^{\beta_i+1}u\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$$

est donc plus faible que celle-ci de $\mathrm{Pr}E_p(u)$.

Maintenant, nous allons nous concentrer sur la partie principale de E_p. Pour obtenir les estimations optimales, il faut d'abord calculer les coefficients $\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi$. Afin de boucler la récurrence dans la section 4, on va utiliser l'intégration par partie comme la méthode que l'on utilise dans la preuve du théorème 2.3 pour diminuer la coefficient α_i, si $\alpha_i \geq p-1$. On va prouver que $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{\alpha_2}M(x)]\mathrm{d}x$ se décompose comme une somme des termes $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}[\partial_x^{2s}M(x)(\partial_x^{p-2-s}M(x))^2]\mathrm{d}x$ pour $0 \leq s \leq \frac{p-2}{3}$.

3.1 Série génératrice

Le lemme 2.1 donne une expression de la terme $A_k(x,\xi)$ en séparant les deux variables x et ξ. Néanmoins, il est difficile de trouver les meilleures estimations à partir de la relation de récurrence de $c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi)$ individuelle. Les matrices $\partial_x^s M(x)$ et $\partial_x^t M(x)$ ne commutent pas si $s \neq t$ en général. Afin de résoudre ces deux problèmes, on introduit la série génératrice

$$P_{k,r}(\xi; X_1, X_2, \cdots, X_r) := \sum_{\substack{2r+\alpha_1+\cdots+\alpha_r=k \\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r \geq 0}} c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi) X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_r^{\alpha_r} \tag{17}$$

associée à la suite $(c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi))_{\alpha_1+\cdots+\alpha_r=k-2r}$. Alors

$$c_{k,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r}(\xi) = \partial_{X_1}^{\alpha_1}\partial_{X_2}^{\alpha_2}\cdots\partial_{X_r}^{\alpha_r} P_{k,r}(\xi; 0, 0, \cdots, 0) \tag{18}$$

La série génératrice permet de simplifier la relation de récurrence lorsque $r \geq 2$ dans le lemme 2.1.

Proposition 3.1. *$\forall r \geq 2$ et $\forall k \geq 2r+1$, on a*

$$\begin{aligned}
&P_{k+1,r}(\xi; X_1, X_2, \cdots, X_r) \\
=&\frac{2i\xi}{1+\xi^2}(\sum_{s=1}^{r} X_s) P_{k,r}(\xi; X_1, X_2, \cdots, X_r) + \frac{1}{1+\xi^2}(\sum_{s=1}^{r} X_s)^2 P_{k-1,r}(\xi; X_1, X_2, \cdots, X_r) \\
&- \frac{1}{1+\xi^2} P_{k-1,r-1}(\xi; X_2, \cdots, X_r)
\end{aligned}$$

$(P_{k,r}(\xi; X_1, X_2, \cdots, X_r))_{k \geq 2r+1}$ est une suite récurrente linéaire à l'ordre 2 avec un terme non homogène $P_{k-1,r-1}(\xi; X_2, \cdots, X_r)$. Alors elle est obtenue par récurrence par rapport à r. Son équation caractéristique est

$$\lambda^2 - \frac{2i\xi\sum_{s=1}^{r} X_s}{1+\xi^2}\lambda - \frac{(\sum_{s=1}^{r} X_s)^2}{1+\xi^2} = 0$$

qui admet 2 racines $\lambda_{r,+} = \frac{\sum_{s=1}^{r} X_s}{1-i\xi}$, $\lambda_{r,-} = -\frac{\sum_{s=1}^{r} X_s}{1+i\xi}$.

Comme le cas $r = 2$ est la partie principale, on va d'abord calculer les coefficients $c_{k,\alpha_1,\alpha_2}(\xi)$.

Proposition 3.2. *si $k \geq 5$, la formule explicite de $P_{k,2}(\xi; X_1, X_2)$ est donnée par*

$$\begin{aligned}
&P_{k,2}(\xi; X_1, X_2) \\
=&\frac{i\xi[(1+i\xi)^{k-4} - (i\xi-1)^{k-4}]}{(1+\xi^2)^{k-1}} X_2(X_1+X_2)^{k-5} + \frac{(1+i\xi)^{k-3} - (i\xi-1)^{k-3}}{2(1+\xi^2)^{k-1}}(X_1+X_2)^{k-4} \\
&+ \mathbf{1}_{k\geq 6} \sum_{t=0}^{k-6} \left[\frac{(-1)^{k+t}}{2(1+i\xi)^{k-4-t}(1-i\xi)^{t+5}} + \frac{(-1)^t}{2(1-i\xi)^{k-4-t}(1+i\xi)^{t+5}} \right] \sum_{j=0}^{t} (X_1+X_2)^{k-6-j} X_2^{j+2}
\end{aligned}$$

Corollaire 3.1. *Si $k \geq 5$, alors on a*

$$\begin{aligned}
c_{k,\alpha_1,\alpha_2}(\xi) =& \frac{i\xi[(1+i\xi)^{k-4} - (i\xi-1)^{k-4}]}{(1+\xi^2)^{k-1}} \binom{k-5}{\alpha_1} + \frac{(1+i\xi)^{k-3} - (i\xi-1)^{k-3}}{2(1+\xi^2)^{k-1}} \binom{k-4}{\alpha_1} \\
&+ \mathbf{1}_{k\geq 6} \sum_{t=0}^{k-6} \left[\frac{(-1)^{k+t}}{2(1+i\xi)^{k-4-t}(1-i\xi)^{t+5}} + \frac{(-1)^t}{2(1-i\xi)^{k-4-t}(1+i\xi)^{t+5}} \right] \sum_{j=0}^{t} \binom{k-6-j}{\alpha_1}
\end{aligned} \tag{19}$$

Proposition 3.3. *Si $p \geq 2$, $\forall \alpha_1 \in [0, 2p-4]$, on a*

$$\begin{cases}
\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,\alpha_1,2p-4-\alpha_1}(\xi)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi = & -\frac{\pi p(2p+1)(2p-7-\alpha_1)}{3\cdot 2^{2p+1}} \binom{2p-4}{\alpha_1} + \frac{\pi}{2^{2p+1}} \frac{p(2p+1)(2p^2-7p+9)}{6} \binom{2p-5}{\alpha_1+1} \\
& -\sum_{t=0}^{2p-7-\alpha_1} \frac{\pi(-1)^t}{2^{2p+1}} \binom{2p+1}{t+5} \binom{2p-6-t}{\alpha_1+1} \\
\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p+1,\alpha_1,2p-3-\alpha_1}(\xi)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi = 0 &
\end{cases}$$

Corollaire 3.2. *$\exists C > 0$ constante telle que $\forall p \geq 2$, $\forall \alpha_1 \in [0, 2p-4]$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2p-4$, on a*

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,\alpha_1,\alpha_2}(\xi)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi \Big| \leq \frac{C\pi(2p+1)9^p}{2^{2p+1}}$$

De plus, on peut calculer le cas où $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_1 = 2p-4$.

Corollaire 3.3. *Si $p \geq 2$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi p(2p+1)}{2^{2p+1}} \tag{20}$$

Corollaire 3.4. *Si $p \geq 2$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi(2p+1)(p-1)}{2^{2p}} \tag{21}$$

3.2 Symétrisation de $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1} M(x) \partial_x^{\alpha_2} M(x)] \mathrm{d}x$

Pour boucler la récurrence et utiliser les lois de conservation construite dans le théorème 2.3, on estime les termes dans la formule de E_p sous la forme $\|\partial_x^{2j}|u|^2\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^{2j+1} u\|_{L^2}^2$.

Théorème 3.1. *Si* $0 \le \alpha_1 \le 2p-4$, *alors*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{2p-4-\alpha_1}M(x)]\mathrm{d}x\\ =&\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{p}{3}\rfloor -1}\frac{(-1)^{p+\alpha_1+s}}{2}\left[\tbinom{p-3-\alpha_1+s}{2s-1-\alpha_1}+\tbinom{p-3-\alpha_1+s}{2s-1}+2\tbinom{p-3-\alpha_1+s}{2s-\alpha_1}+2\tbinom{p-3-\alpha_1+s}{2s}\right]\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^{2s}M(x)(\partial_x^{p-2-s}M(x))^2]\mathrm{d}x\\ &+\frac{(-1)^{\alpha_1}}{2}1_{3|p-2}\tbinom{\frac{4p-8}{3}-\alpha_1}{\frac{2p-4}{3}}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[(\partial_x^{\frac{2p-4}{3}}M(x))^3]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

avec la convention $\binom{m}{n}=0$ *si* $0\le m<n$ *ou* $n<0$.

Lemme 3.1. $\forall 0\le j\le \frac{p-2}{3}$, *alors on a*

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^{2j}M(x)(\partial_x^{p-j-2}M(x))^2]\mathrm{d}x\Big|\\ &\le C(\|\partial_x^{2j}|u|^2\|_{L^2}^2+\|\partial_x^{2j+1}u\|_{L^2}^2)^{\frac14}(\|\partial_x^{2j+1}|u|^2\|_{L^2}^2+\|\partial_x^{2j+2}u\|_{L^2}^2)^{\frac14}(\|\partial_x^{p-j-2}|u|^2\|_{L^2}^2+\|\partial_x^{p-j-1}u\|_{L^2}^2)\end{aligned}\tag{22}$$

où $C>0$ *est la constante de l'interpolation de Gagliardo-Nirenberg* (23).

$$\|f\|_{L^\infty}\le C\|f\|_{L^2}^{\frac12}\|\partial_x f\|_{L^2}^{\frac12}\tag{23}$$

pour tout $f\in H^1(\mathbb{T})$ *telle que* $\hat f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f=0$.

Si $0\le\alpha_1<\frac{2p-4}{3}$, alors $\mathcal{T}_{\alpha_1}$ possède $\lfloor\frac{p+1}{3}\rfloor$ termes.
Si $\frac{2p-4}{3}\le\alpha_1<p-2$, alors $\mathcal{T}_{\alpha_1}$ possède $p-1-\alpha_1$ termes.

Proposition 3.4. *Si* $0\le s\le\lfloor\frac{p}{3}\rfloor-1$, *on a*

$$\big|\mathcal{A}_s^{(\alpha_1+1)}\big|\le\big|\mathcal{A}_s^{(\alpha_1)}\big|$$

Alors $\big|\mathcal{A}_s^{(0)}\big|=\max_{0\le\alpha_1\le p-2}\big|\mathcal{A}_s^{(\alpha_1)}\big|=[\binom{p-3+s}{2s}+\binom{p-2+s}{2s}]$, pour tout s. Donc $\mathcal{T}_0=\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)^2\partial_x^{2p-4}M(x)]\mathrm{d}x$ est le terme principal parmi tous les $\mathcal{T}_{\alpha_1}$. Le théorème 3.1 implique le résultat suivant

Corollaire 3.5.

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)^2\partial_x^{2p-4}M(x)]\mathrm{d}x\\ =&\mathbf{1}_{p\ge3}\sum_{s=0}^{\lfloor\frac{p}{3}\rfloor-1}(-1)^{s+p}\left[\binom{p-3+s}{2s}+\binom{p-2+s}{2s}\right]\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[\partial_x^{2s}M(x)(\partial_x^{p-2-s}M(x))^2]\mathrm{d}x\\ &+\frac{\mathbf{1}_{3|p-2}}{2}\binom{\frac{4p-8}{3}}{\frac{2p-4}{3}}\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[(\partial_x^{\frac{2p-4}{3}}M(x))^3]\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{24}$$

Corollaire 3.6. *Si* $0\le s\le\lfloor\frac{p}{3}\rfloor-2$, *on a*

$$\big|\mathcal{A}_s^{(0)}\big|\le\big|\mathcal{A}_{s+1}^{(0)}\big|$$

Alors le terme principal est $\int_{\mathbb{T}}\mathrm{tr}[M(x)^2\partial_x^{2p-4}M(x)]\mathrm{d}x$.

4 Régularité analytique uniforme

Après avoir étudié la solution lisse et la propriété d'être bornée uniformément en temps dans le corollaire 2.3, on passe au cas où u_0 est δ-analytique. On peut étudier la régularité analytique ponctuelle de la solution de l'équation de Schrödinger sans utiliser la théorie de l'intégrabilité. En imitant la méthode pour étudier la régularité de Gevrey de la solution périodique de l'équation de Navier-Stokes mentionnée dans la référence [18] et la méthode pour étudier la régularité analytique de l'équation de Szégö mentionnée dans la référence [19], on peut essayer de trouver une relation entre la norme de Gevrey de $u(t)$

$$\|u(t)\|_{G_\sigma(W)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\sigma|k|}|\hat{u}(k)|, \qquad \sigma = \sigma(t) > 0$$

et sa dérivée par rapport au temps. On rappelle que u est analytique avec le rayon plus grand que ρ si et seulement si $u \in \bigcap_{0<\sigma<\rho} G_\sigma(W)$.

Théorème 4.1. *Soit $u_0 \in G_\sigma(W)$, pour un certain $\sigma > 0$. Alors la solution unique de l'équation (1) satisfait $u(t) \in G_{\tau(t)}(W)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, où $\tau(t) = \sigma e^{-\lambda|t|}$ avec $\lambda > 0$ qui ne dépend que de u_0, p et σ. Plus précisément, $\exists C_0 = C_0(u_0, p, \sigma) > 0$ telle que $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{G_{\tau(t)(W)}} \le C_0$.*

La suite de lois de conservation $\{E_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ joue un rôle important de relier la trajectoire $u(t)$ à la donnée initiale u_0, pour t arbitraire. Dans cette section, nous allons essayer de montrer la régularité analytique uniforme en temps du flot de l'équation (1) en utilisant $\{E_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ construites dans le théorème 2.3. Dans les estimations suivantes, on va majorer tous les termes par leurs valeurs absolues. Tous les C qui apparaissent dans cette section sont des constantes strictement positives universelles.

Rappelons que u_0 est analytique $\Leftrightarrow$ il existe $R_0 > 1$ et $M_0 > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{T}$ et $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$\|\partial_x^{p-1}|u_0|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u_0\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \le M_0 R_0^{2p}(p!)^2, \qquad \forall p \ge 1. \tag{25}$$

par la proposition 1.1.

4.1 Récurrence

Sachant que l'équation (25), supposons qu'il existe deux constantes $R > 1$, $M > 0$ telles que

$$\|\partial_x^{q-1}|u(t)|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^q u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \le MR^{2q}(q!)^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{26}$$

pour tout $1 \le q \le p-1$, il faut montrer que

$$\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \le MR^{2p}(p!)^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

à l'aide des estimations dans la section précédente. Les paramètres R et M sont à déterminer à la fin. En utilisant la formule (16), on a

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\
\le &|E_p(u_0)| + \sum_{\alpha_1=0}^{p-3} \frac{4^p|\mathcal{T}_{\alpha_1}|}{(2p+1)\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,\alpha_1,2p-4-\alpha_1}(\xi)}{1+\xi^2} + \frac{c_{2p,2p-4-\alpha_1,\alpha_1}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\Big| \\
&+ \frac{4^p|\mathcal{T}_{p-2}|}{(2p+1)\pi}\Big|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,p-2,p-2}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\Big| + \frac{2^{2p+1}}{2p+1}\Big|\int_{\mathbb{T}} G\left(u(t,x), \overline{u(t,x)}, \cdots, u^{(p-2)}(t,x), \overline{u^{(p-2)}(t,x)}\right)\mathrm{d}x\Big|
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{T}_{\alpha_1} = \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1} M(x)\partial_x^{2p-4-\alpha_1} M(x)]\mathrm{d}x$, avec

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{T}_{\alpha_1}| \\
&\leq \begin{cases}
\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{p}{3}\rfloor -1} \frac{1}{2}\left[\binom{p-3-\alpha_1+s}{2s-1-\alpha_1} + \binom{p-3-\alpha_1+s}{2s-1} + 2\binom{p-3-\alpha_1+s}{2s-\alpha_1} + 2\binom{p-3-\alpha_1+s}{2s}\right] \left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[\partial_x^{2s} M(x)(\partial_x^{p-2-s} M(x))^2]\mathrm{d}x\right| & \\
\qquad + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{3|p-2}\binom{\frac{4p-8}{3}-\alpha_1}{\frac{2p-4}{3}} \left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[(\partial_x^{\frac{2p-4}{3}} M(x))^3]\mathrm{d}x\right| & \text{si} \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{2p-4}{3} \\
\sum_{s=0}^{p-2-\alpha_1} \frac{1}{2}\left[\binom{p-3-\alpha_1+s}{2s} + \binom{p-2-\alpha_1+s}{2s}\right] \left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[\partial_x^{2s} M(x)(\partial_x^{p-2-s} M(x))^2]\mathrm{d}x\right| & \text{si} \quad \frac{2p-4}{3} \leq \alpha_1 \leq p-2
\end{cases}
\end{aligned}
$$

par le théorème 3.1.

4.2 Estimation du terme spécial

Comme $\mathcal{T}_0$ est le terme principal parmi tous les $\mathcal{T}_{\alpha_1}$, il faut d'abord étudier le terme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_1 :=& \frac{4^p|\mathcal{T}_0|}{(2p+1)\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)}{1+\xi^2} + \frac{c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right| \\
\leq& \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{p}{3}\rfloor -1} \frac{4^p}{(2p+1)\pi}\left[\binom{p-3+s}{2s} + \binom{p-2+s}{2s}\right] \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)+c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right| \left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[\partial_x^{2s} M(x)(\partial_x^{p-2-s} M(x))^2]\mathrm{d}x\right| \\
&+ \frac{4^p \mathbf{1}_{3|p-2}}{2(2p+1)\pi}\binom{\frac{4p-8}{3}}{\frac{2p-4}{3}}\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)}{1+\xi^2} + \frac{c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right|\left|\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[(\partial_x^{\frac{2p-4}{3}} M(x))^3]\mathrm{d}x\right| \\
=:& \mathcal{N}_2
\end{aligned}
$$

L'estimation (22) nous donne que le terme principal de $\int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[M(x)^2\partial_x^{2p-4} M(x)]\mathrm{d}x$ est

$$
\operatorname{Pr}\mathcal{T}_0 := \begin{cases}
\frac{1}{2}\binom{\frac{4p-8}{3}}{\frac{2p-4}{3}} \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[(\partial_x^{\frac{2p-4}{3}} M(x))^3]\mathrm{d}x & \text{si} \quad p \equiv 2 \pmod 3 \\
\left[\binom{\frac{4p-13}{3}}{\frac{2p-8}{3}} + \binom{\frac{4p-10}{3}}{\frac{2p-8}{3}}\right] \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[\partial_x^{\frac{2p-8}{3}} M(x)(\partial_x^{\frac{2p-2}{3}} M(x))^2]\mathrm{d}x & \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod 3 \\
-\left[\binom{\frac{4p-12}{3}}{\frac{2p-6}{3}} + \binom{\frac{4p-9}{3}}{\frac{2p-6}{3}}\right] \int_{\mathbb{T}} \operatorname{tr}[\partial_x^{\frac{2p-6}{3}} M(x)(\partial_x^{\frac{2p-3}{3}} M(x))^2]\mathrm{d}x & \text{si} \quad p \equiv 0 \pmod 3
\end{cases}
$$

Afin de bien estimer le terme $\mathcal{N}_2$, il faut estimer le terme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}_3 :=& \frac{4^p|\operatorname{Pr}\mathcal{T}_0|}{(2p+1)\pi}\left|\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)}{1+\xi^2} + \frac{c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi\right| \\
=& \frac{3p-2}{2}|\operatorname{Pr}\mathcal{T}_0|
\end{aligned} \tag{27}
$$

parce que le corollaire 3.3 et le corollaire 3.4 nous donnent que

$$
\int_{\mathbb{R}} \frac{c_{2p,0,2p-4}(\xi)}{1+\xi^2} + \frac{c_{2p,2p-4,0}(\xi)}{1+\xi^2}\mathrm{d}\xi = \frac{\pi(2p+1)(3p-2)}{2^{2p+1}}
$$

En tout cas on a

$$|\mathrm{Pr}\mathcal{T}_0| \leq \mathcal{N}_4 := \begin{cases} CM^{\frac{3}{2}}R^{2p-\frac{1}{2}}\left(\frac{4p-8}{3}\right)!\left(\frac{2p-4}{3}\right)!\left(\frac{2p-1}{3}\right)^3\sqrt{\frac{2p+2}{3}} & \text{si} \quad p \equiv 2 \pmod 3 \\ CM^{\frac{3}{2}}R^{2p-\frac{1}{2}}\left(\frac{4p-4}{3}\right)!\left(\frac{2p-2}{3}\right)!\frac{(p-2)(2p+1)^2}{4(p-1)(4p-7)}\sqrt{\frac{2p-2}{3}} & \text{si} \quad p \equiv 1 \pmod 3 \\ CM^{\frac{3}{2}}R^{2p-\frac{1}{2}}\left(\frac{4p-12}{3}\right)!\left(\frac{2p-6}{3}\right)!(2p-4)\left(\frac{2p}{3}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{2p-3}{3}\right)^2 & \text{si} \quad p \equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

Afin de boucler la récurrence, il faut que

$$\frac{3p-2}{2}\mathcal{N}_4 \leq MR^{2p}(p!)^2$$

qui contredit la proposition suivante.

Proposition 4.1. $\forall A \in]1, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{3}}[$,

$$\mathcal{N}_4 \geq CM^{\frac{3}{2}}R^{2p-\frac{1}{2}}A^p(p!)^2$$

4.3 Conclusion

Si la méthode introduite dans ce texte pouvait boucler la récurrence, alors $\forall p \geq 1$ on aurait

$$\frac{2MR^{2p}[p!]^2}{3p-2} \geq \mathcal{N}_4 \geq CM^{\frac{3}{2}}R^{2p-\frac{1}{2}}A^p[p!]^2$$

Alors $R \geq \frac{C^2}{4}MA^{2p}(3p-2)^2$, $\forall p \geq 1 \Longrightarrow R = +\infty$, absurde.

Malheureusement, la méthode de récurrence avec les lois de conservations contrôlant chaque norme de Sobolev $\{H^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ introduite dans ce texte ne réussit pas de prouver la régularité analytique de la solution de l'équation de Schrödinger cubique défocalisante définie sur le cercle $\mathbb{T}$, à cause du fait que le rayon de convergence R va devenir AR, pour un certain $A > 1$, quand on boucle la récurrence. Bien que l'intégration par partie diminue la degré de dérivée α_1 dans l'intégrale $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}[M(x)\partial_x^{\alpha_1}M(x)\partial_x^{2p-4-\alpha_1}M(x)]\mathrm{d}x$, elle va faire apparaître un coefficient binomial $\mathcal{A}_s^{(\alpha_1)}$ devant la terme $\int_{\mathbb{T}} \mathrm{tr}[\partial_x^{2s}M(x)(\partial_x^{p-2-s}M(x))^2]\mathrm{d}x$. Lorsque $s = \lfloor \frac{p-2}{3} \rfloor$, le coefficient $\mathcal{A}_s^{(\alpha_1)}$ devient trop grand pour boucler la récurrence.

Lorsque l'on estime $\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$, on majore tous les termes par ces valeurs absolues. Il est probable que les termes trop grands qui sont toujours de même signe que $\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial_x^p u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}$. Dans ce cas, on peut directement supprimer ces termes. Mais il est difficile à trouver la régularité de changement de signe.

Le résultat est imprévisible si on ne détaille pas le calcul. Bien que l'on n'arrive pas à prouver la régularité analytique uniforme, cette méthode est remarquable parce qu'elle transfert un problème d'évolution en un problème statique en utilisant les lois de conservations. L'approche que nous avons suivie nous a permis de mieux comprendre comment utiliser la paire de Lax pour cette équation. En utilisant les lois de conservations, nous avons établi la première étape vers un résultat de régularité uniforme dans une classe plus faible de fonctions lisses. Si on remplace la condition u_0 est analytique par la formule suivante,

$$\|\partial_x^{p-1}|u_0|^2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\partial_x^p u_0\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq MR^{\frac{p(p-1)}{2}}, \qquad \forall p \geq 1 \tag{28}$$

on peut prouver que

$$\|\partial_x^{p-1}|u(t)|^2\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \|\partial_x^p u(t)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq 2MR^{\frac{p(p-1)}{2}}, \qquad \forall p \geq 1$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, où u est la solution de l'équation (1) associée à la donnée initiale u_0, si on néglige les termes $r \geq 3$ dans la formule explicite de E_p.

5 Appendice

5.1 Solution forte de NLS

Définition 5.1. *Soit $p > \frac{1}{2}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que u est une solution de l'équation (1) de classe $H^p(\mathbb{T})$ définie sur l'intervalle I si $u \in C(I; H^p(\mathbb{T}))$ et*

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) - 2i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u(s,x)|^2 u(s,x)\mathrm{d}s, \qquad \forall x \in \mathbb{T} \tag{29}$$

où la famille $(e^{it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe des opérateurs unitaires $H^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{T})$, pour tout $p \geq 0$, qui est défini par

$$e^{it\Delta}u(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-itk^2}\hat{u}(k)e^{ikx}, \qquad \forall u \in H^p(\mathbb{T}) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Remarque 5.1. *J.Bourgain a prouvé dans son article [17] que $\forall u_0 \in L^2(\mathbb{T})$, l'équation (1) admet une unique solution dans l'espace $C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T})) \cap L^4_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. L'équation (2) est donc valable pour tout $p \geq 0$ parce que $|u(s,\cdot)|^2u(s,\cdot) \in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{T})$. Et on a le même résultat pour $p \geq 1$.*

Théorème 5.1. *Soit $p \geq 1$, $\forall u_0 \in H^p(\mathbb{T})$, l'équation (1) est globalement bien posée dans l'espace $H^p(\mathbb{T})$.*

Théorème 5.2. *Si $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T})$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $u(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{T}_x)$ où u est la solution de l'équation (1).*

5.2 Analyse semi-classique

$\forall u \in L^2(\mathbb{T})$, si $A \in S^0$

$$A(x,hD)u(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} A(x,hn)\hat{u}(n)e^{inx} \tag{30}$$

Références

[1] Gérard, P. *On the conservation laws of the defocusing cubic NLS equation*, en préparation, 2015. http ://www.math.u-psud.fr/ pgerard/integrales-NLScubique.pdf

[2] Tao, T. *Nonlinear Dispersive Equations : Local and Global Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society, 2006.

[3] Cazenave, T. *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics 10, New York University, American Mathematical Society, 2003.

[4] Grébert, B. et Kappeler, T. *The Defocusing NLS Equation and Its Normal Form*, Series of Lectures in Mathematics, European Mathematical Society, 2014.

[5] Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, 2010, Springer.

[6] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I : Distribution Theory and Fourier Analysis*, (Classics in Mathematics) 2nd ed. 2003 Edition, Springer.

[7] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III : Pseudo-Differential Operators*, (Classics in Mathematics), 1994 Edition, Springer.

[8] Teschl, G. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators*, Graduate Studies in Mathematics Volume 157, American Mathematical Society, 2 edition, 2014.

[9] Lax, P. *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Communications on Pure and Applied Mathematics Volume 21, Issue 5 September 1968, Pages 467–490

[10] Zakharov, V.E. et Shabat, A.B. (1971). *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*, Soviet Physics JETP 34-62, 1972.

[11] Zworski, M. *Semiclassical Analysis*, Graduate Studies in Mathematics Volume 138, American Mathematical Society, (July 25, 2012).

[12] Simon, B. *Trace Ideals and Their Applications*, Mathematical Surveys and Monographs vol. 120, 2nd edition, American Mathematical Society, 2005

[13] Kuksin, S. (2000). *Analysis of Hamiltonian PDEs*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications (Book 19), Clarendon Press, 1 edition (November 9, 2000).

[14] Katok, A. et Hasselblatt, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1997

[15] Alinhac, S. et Gérard, P. (1991). *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, EDP Sciences, 1991.

[16] Rudin, W. *Functional Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2 edition (January 1, 1991), International Series in Pure and Applied Mathematics

[17] Bourgain, J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, Geometric and Functional Analysis, March 1993, Volume 3, Issue 2, pp 107–156

[18] Foias, C. et Temam, R. *Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations*, Journal of Functional Analysis 87, Pages 359-369, 1989

[19] Gérard, P. Guo, Y. et Titi, E.S. *On the radius of analyticity of solutions to the cubic Szégö equation*, Ann. I.H.Poincaré - AN 32 (2015) 97-108, 2013