INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE: LA CONJECTURE DE SARNAK

RUXI SHI

Contents

1. Introduction 1
2. Préliminaire: Introduction aux Systèmes Dynamiques 2
2.1. Systèmes dynamiques topologiques et mesurés 2
2.2. Dynamiques symboliques 3
2.3. Théorie ergodique 3
2.4. Entropie topologique 4
3. La conjecture de Chowla et La conjecture de Sarnak 5
3.1. Les conjectures liées au la conjecture de Sarnak 7
4. Travaux sur la conjecture de Sarnak 8
5. Généralisation de la conjecture de Sarnak 12
6. Questions ouvertes 12
References 13

1. Introduction

L'un des problèmes généraux de base de la théorie analytique des nombres est de comprendre autant que possible les fluctuations de la fonction de Möbius. L'un des problèmes généraux de base de la théorie des systémes dynamiques est de comprendre la théorie ergodique, par exemple, théorème ergodique de von Neumann et théorème ergodique de Birkhoff.

Dans [S], Sarnak fait une conjecture (voir Conjecture 3.2) sur la fonction de Möbius et la théorie ergodique. On présente cette conjecture dans la Section 3. Après qu'il a proposé cette conjecture, on a montré que beaucoup de dynamiques pour lesquelles la conjecture est vraie. (voir Section 4), par exemple, la dynamique d'un homéomorphisme du cercle et la dynamique d'un intervalle d'entropie nulle [K]; la dynamique de type Toeplitz régulière [DK]; la dynamique symbolique de rang un [B]; le flot linéaire affine d'un groupe abélien compact d'entropie nulle [LS]; la dynamique d'une translation sur nilvariété [GT] etc. Mais pour résoudre cette conjecture complètement, il y aurait un long chemin à parcourir. De plus, il y a des auteurs qui considèrent la

Date: July 26, 2016.

généralisation de cette conjecture, c'est-à-dire, à la place de la fonction de Möbius, on considère des suites plus générales (voir Section 5), par exemple, les suites B-libres [ELD] et les suites oscillantes [FJ].

2. Préliminaire: Introduction aux Systèmes Dynamiques

Dans cette section, on introduit les notions basiques sur les systèmes dynamiques topologiques ou mesurés. Ensuite, on donne une classe importante des systèmes dynamiques espace: les dynamiques symboliques . Puis, on présente les théorèmes fondamentaux de la théorie ergodique. Finalement, on introduit la notion la plus importante sur les systèmes dynamiques topologiques: l'entropie topologique.

2.1. **Systèmes dynamiques topologiques et mesurés.** Un *système dynamique topologique* (à temps discrets) est un couple (X, f) où X est un espace topologique et $f : X \to X$ est une application continue.

Deux systèmes dynamiques topologiques (X, f) et (Y, g) sont (topologiquement) *semi-conjugués* s'il existe une application continue $\phi : X \to Y$ telle que $\phi \circ f = g \circ \phi$. On dit aussi que (Y, g) est un facteur de (X, f).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

On dit qu'ils sont (topologiquement) *conjugués* si ϕ est un homéomorphisme.

Exemple 2.1. *Soit* $S^1 := \{e^{2i\pi\theta} | \theta \in [0, 1[\}$ *un cercle. Soit* $T_\alpha : S^1 \to S^1, e^{2i\pi\theta} \mapsto e^{2i\pi(\theta+\alpha)}$ *où* $\alpha \in [0, 1[$. *Alors* T_α *est une fonction continue sur* S^1, *i.e.* (S^1, T_α) *est une dynamique topologique pour chaque* $\alpha \in [0, 1[$. *On peut montrer que pour tous* $\alpha \neq \beta$, *les dynamiques* (S^1, T_α) *et* (S^1, T_β) *ne sont pas conjuguées.*

Exemple 2.2. *Soit* $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *un tore. Soit* $S_\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \theta \mapsto \theta + \alpha \mod 1$ *où* $\alpha \in [0, 1[$. *Alors* S_α *est une fonction continue sur* $\mathbb{T}$, *i.e.* $(\mathbb{T}, S_\alpha)$ *est une dynamique topologique. On peut aussi montrer que pour tous* $\alpha \neq \beta$, *les dynamiques* $(\mathbb{T}, S_\alpha)$ *et* $(\mathbb{T}, S_\beta)$ *ne sont pas conjuguées. Mais pour même* α, *les dynamiques* $(\mathbb{T}, S_\alpha)$ *et* (S^1, T_α) *sont conjugués par la fonction exponentielle.*

Par la suite, on donne quelques notions basiques sur systèmes dynamiques topologiques.

- L'**orbite** de x est l'ensemble $Orb_f(x) := \{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ où $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.
- Un point x est dit **périodique** pour f s'il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$.
- Un sous-ensemble fermé Y de X est dit **minimal** (pour f) si elle est non vide, **invariant** par f (i.e. $f(Y) \subset Y$), et si Y ne contient pas de fermé non vide et invariant par f autre que Y.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $T : X \to X$ une application mesurable. On dit que $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ est une dynamique mesurée si l'application T préserve la mesure μ, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B).$$

Exemple 2.3. *Soit G un groupe localement compact. Alors il existe une mesure de Haar λ qui est invarante par la transformation à gauche. Soit $L_g : G \to G, h \mapsto gh$ une transformation à gauche où $g \in G$. Alors (G, L_g) est une dynamique mesurée.*

2.2. **Dynamiques symboliques.** On introduit une classe importante de dynamiques, à savoir, systèmes dynamiques symboliques. Soit $\mathcal{A} = \{0, 1, \cdots, d\}$ un ensemble fini, dit *alphabet*. On considère l'ensemble des *configurations* $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathcal{A}$. On munit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est compact (par le Théorème de Tychonov).

Ajoutons que $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un espace métrisable par la **distance** d définie, pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, par :

$$d(u, w) = 2^{-k}, \text{ où } k = \min_{i \geq 0} \{u_i \neq w_i \text{ ou } u_{-i} \neq w_{-i}\}.$$

L'action de **décalage** $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est définie par $(\sigma u)_k = u_{k+1}$, qui est continue. Soit Σ un sous-ensemble fermé invariant de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Le couple (Σ, σ) est appelé *système dynamique symbolique bi-infinite*.

De la même facon, on définit la *dynamique symbolique droit-infinite* $(\mathcal{A}^{\mathbb{N}}, d, \sigma)$ où

$$d(u, w) = 2^{-k}, \text{ où } k = \min_{i \geq 0} \{u_i \neq w_i\} \text{ et } u, w \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},$$

$$\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, (\sigma u)_k = u_{k+1}.$$

Exemple 2.4. *On présente deux exemples de dynamique symbolique.*

- *On dit que les dynamiques $(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ et $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ sont **plein-décalages**.*
- *Soit $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Soit $\mathcal{F} = \{11\}$. On définit*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} | x_n x_{n+1} \notin \mathcal{F}\}.$$

  *Alors on dit que $(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}, \sigma)$ est un **sous-décalage avec mots interdits $\mathcal{F}$**.*

2.3. **Théorie ergodique.** Soit $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ une dynamique mesurée, on s'intéresse si la suite

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$$

est convergente et sa mode de convergence. On va présenter deux théorèmes ergodiques plus célèbres.

Théorème 2.1 (Théorème ergodique de von Neumann)**.** *Soit* $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ *une dynamique mesurée, et* $\mu(X) < +\infty$*. Soit* $f \in L^2(X)$*. Alors,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \to Pf \text{ dans } L^2, \text{ lorque } n \to \infty,$$

où P *est le projecteur orthogonal sur le sous-espace* $\{f \in L^2 | f \circ T = f\}$*.*

On rappelle la définition d'espérance conditionnelle. Soit $(X, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable intégrable. Soit $\mathcal{H}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Alors l'*espérance conditionnelle* de f sachant $\mathcal{H}$ est une fonction $\mathcal{H}$-mesurable, denoté par $\mathbb{E}[f|\mathcal{H}]$, qui satisfait

$$\int_H \mathbb{E}[f|\mathcal{H}]dP = \int_H f dP, \forall H \in \mathcal{H}.$$

L'existence de cette fonction est suivie par le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue. On utilise la notation d'espérance conditionnelle afin d'énoncer le théorème ergodique suivant.

Théorème 2.2 (Théorème ergodique de Birkhoff)**.** *Soit* $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ *une dynamique mesurée, et* $\mu(X) < +\infty$*. Soit* $f \in L^1$*. Notons* $\mathcal{I} =$ *tribu engendrée par* $\{A \in \mathcal{B} | T^{-1}A = A\}$*. Alors,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \to \mathbb{E}[f|\mathcal{I}](x) \ \mu - p.p..$$

2.4. **Entropie topologique.** Ensuite, on introduit, la notion d'entropie topologique, un concept important sur les dynamiques topologiques. En effet, remarquons qu'il y a aussi la notion d'entropie mesurée qui est très lié avec l'entropie topologique, à savoir, le principe variationnel. Pour plus de détail, voir [KH].

Tout d'abord, on donne la définition du nombre de recouvrement. Soit X un espace compact. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X, on note $N(\mathcal{U})$ le cardinal minimal des sous-recouvrements finis de $\mathcal{U}$. Pour toute application continue $T : X \to X$, on note $T^{-1}\mathcal{U}$ le recouvrement ouvert $\{T^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ de X.

Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement ouvert de X. On note $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ le joint de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V | U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

On définit par

$$h(T, \mathcal{U}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{U}) \tag{2·1}$$

l'entropie de T *pour le recouvrement ouvert* $\mathcal{U}$. L'existence de la limite (2.3) est suivie par la sous-additivité. Ensuite, on définit par

$$h(T) = \sup_{\mathcal{U}} h(T, \mathcal{U}),$$

l'entropie de T où la borne supérieure est prise sur tous les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X.

Proposition 2.3. *Soient* (X, f) *et* (Y, g) *deux dynamiques topologiques. Supposons* (Y, g) *est un facteur de* (X, f)*. Alors* $h(g) \leq h(f)$*.*

De plus, on présente deux entropies topologiques diffrentes: l'entropie topologique par une suite ([G]) et l'entropie topologique pour une suite bornée [T].

Soit (X, T) une dynamique topologique. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Soit $\mathcal{T} = \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite des entiers positives. On définit par

$$h_{\mathcal{T}}(T, \mathcal{U}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\vee_{i=0}^{n-1} T^{-t_i}\mathcal{U})$$

l'entropie de T *par la suit* $\mathcal{T}$ *pour le recouvrement ouvert* $\mathcal{U}$. L'existence de la limite est suivie par la sous-additivité. Ensuite, on définit par

$$h_{\mathcal{T}}(T) = \sup_{\mathcal{U}} h_{\mathcal{T}}(T, \mathcal{U}),$$

l'entropie de T *par la suit* $\mathcal{T}$ où la borne supérieure est prise sur tous les recouvrements ouverts $\mathcal{U}$ de X. Pour plus de details, voir [G].

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une suite bornée. On définit $h_{suite}(f)$ *l'entropie topologique pour* f comme le plus petit σ tel que pour tout $\epsilon > 0$, pour m assez grand, l'ensemble

$$\{(f(n+1), \ldots, f(n+m)) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}^m$$

peut être recouvré par $O(exp(\sigma m + o(m)))$ boules du rayon ϵ.

Remarque 2.1. *Si* f *est observable par une dynamique minimale* (X, T) *òu* $T(f(n)) = f(n+1)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $X = \overline{Orb_T(f(0))}$*. Alors* $\log h_{suite}(f) = h(T)$*.*

3. La conjecture de Chowla et La conjecture de Sarnak

Dans cette section, on présente la fonction de Möbius, la conjecture de Chowla, la conjecture de Sarnak et le lien entre elles.

La fonction de Möbius est la fonction $\mu : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \{-1, 0, 1\}$ définie par $\mu(1) = 1$ et

(3·2)

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k \text{ si } n \text{ est un produit des } k \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction de Möbius a été étudiée dans la théorie des nombres depuis longtemps. Une question importante est l'étude des fluctuations de la fonction de Möbius. On sait que la meilleure estimation des fluctuations de la fonction de Möbius est la suivante. Pour tout $A > 0$, il existe une constante $C_A > 0$ telle que pour tout $n > 1$ on a

$$|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)| < \frac{C_A n}{(\log n)^A}. \tag{3·3}$$

De plus, le fait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(n) = 0, \tag{3·4}$$

qui est suivi par (3·3), est équivalent au théorème des nombres premiers; l'assertion plus fort: pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante C_ϵ telle que

$$|\sum_{k=1}^{n} \mu(k)| < C_\epsilon n^{1/2+\epsilon}, \forall n > 0,$$

est équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Il y a une conjecture célèbre dans la théorie des nombres qui est la source de la conjecture de Sarnak (cf. [S]).

Conjecture 3.1 (La conjecture de Chowla)**.** *Soit m un entier. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \{0, 1, 2\}$ tels que au moin uns des a_i est 1. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} \mu(n+1)^{a_1} \mu(n+2)^{a_2} \ldots \mu(n+m)^{a_m} = 0.$$

Conjecture 3.2 (La conjecture de Sarnak)**.** *Soit (X, T, d) une dynamique topologique d'entropie nulle. Alors pour tout $x \in X$ et toute $f \in C(X)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) f(T^k(x)) = 0.$$

Ensuit on presente la rasion "philosophique" de la conjecture de Sarnak. Soient $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$. On dit qu'ils sont *orthogonales* si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(n)g(n) = 0,$$

noté $f \perp g$. Par exemple, $f = (0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots)$ et $g = (1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots)$ sont orthogonales; $f = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ et $g = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots)$ sont aussi orthogonales.

Il y une qustion: est-ce que la fonction de Möbius est "aléatoire"? Si oui, est-ce qu'il est aléatoire fortement ou faiblement? Sarnak(2009) pense que une fonction est "aléatoire" $\iff$ $\mu \perp \nu$ pour tout fonction "déterministe" $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Alors il y a une autre question: ce qui est "déterministe"?

Soit (X, T) une dynamique. On dit que ν est *observable* par (X, T) s'il existe $f \in C(X)$ et $x \in X$ telles que $\nu(n) = f(T^n(x))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3.1 (Sarnak 2009)**.** *ν est **déterministe** s'il est observable par une dynamique d'entropie nulle.*

Si on utilise la notion "orthogonales", la conjecture de Sarnak peut être ecrit comme suivante:

Conjecture 3.3 (La conjecture de Sarnak')**.** *On a*

$$\mu \perp \nu$$

pour tout ν déterministe.

Remarque 3.1. *μ n'est pas déterministe.*

En effet, la conjecture de Chowla est plus forte par la proposition suivante.

Proposition 3.2 ([S], Théorème 5)**.** *La conjecture de Chowla implique la conjecture de Sarnak.*

Selon les fluctuations (3·3) de la fonction de Möbius, il y un théorème ergodique suivant qui contient la fonction de Möbius comme poids.

Proposition 3.3 ([EKLD], Proposition 3.1)**.** *Soit $(X, T, \mathcal{B}, \nu)$ une dynamique mesurée, et $\nu(X) < +\infty$. Soit $f \in L^1(X)$. Alors pour $\nu -$ p.p. $x \in X$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) f(T^k(x)) = 0.$$

On considère la dynamique qui est générée par la suite de Möbius. Soit $\beta = (\mu(1), \mu(2), \cdots) \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $\theta = (\mu(1)^2, \mu(2)^2, \cdots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors $(\overline{Orb_\sigma(\theta)}, \sigma)$ et $(\overline{Orb_\sigma(\beta)}, \sigma)$ sont des sous-décalages. De plus, on sait que $(\overline{Orb_\sigma(\theta)}, \sigma)$ est un facteur de $(\overline{Orb_\sigma(\beta)}, \sigma)$ par la fonction de carré. Alors on peut montrer que la dynamique $(\overline{Orb_\sigma(\theta)}, \sigma)$ a l'entropie positive par le théorème suivant. Donc la dynamique $(\overline{Orb_\sigma(\beta)}, \sigma)$ a aussi l'entropie positive par Proposition 2.3.

Théorème 3.4. *[[S], Théorème 8] Soit $(\overline{Orb_\sigma(\theta)}, \sigma)$ la dynamique defini ci-dessus. Alors on a $\sigma : \overline{Orb_\sigma(\theta)} \to \overline{Orb_\sigma(\theta)}$ est surjectif et d'entropie topologique $h(\sigma) = \frac{6}{\pi^2} \log 2$.*

Remarque 3.2. *Selon Propositon 2.3 et Remarque 2.1, l'entropie topologique de $(\mu^2(n))$ est $\frac{6}{\pi^2}$ et l'entropie topologique de $(\mu(n))$ est positif.*

3.1. **Les conjectures liées au la conjecture de Sarnak.** Danc cette sous-section, on presente les versions différentes sur la conjecture de Sarnak. D'abord, on introduit la version polynôme d'après Eisner [E].

Définition 3.5. *Soit (X, T) une dynamique topologique. Soit $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un polynôme. Soit $\mathcal{T} = \{p(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$. Alors l'entropie $h_{\mathcal{T}}(T)$ est appelé l'**entropie polynomial par** p.*

Conjecture 3.4 ([E], Conjecture 2.3)**.** *On a*

$$\mu \perp \nu \circ p$$

pour tout ν observable par une dynamique minimale d'entropie nulle.

Conjecture 3.5 ([E], Conjecture 2.4)**.** *On a*

$$\mu \perp \nu \circ p$$

pour tout ν observable par une dynamique minimale d'entropie polynomial nulle par un polynôme p.

Remarque 3.3. *Les conjectures ne sont pas vrais sans l'hypothèse de minimalité. Soit $n \geq 1$,*

$$a(n) = \begin{cases} \mu(k) \text{ si } n = k^2 \text{ pour certain } k \in \mathbb{N}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit (X, σ) le sous-décalage généré par $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'est pas minimal. Soit $p(k) := k^2$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) f(T^{k^2}(x)) = \lim_{n\to\infty} \mu^2(k) = \frac{6}{\pi^2},$$

Ensuit, sans la vue dynamique, T. Tao [T] formule une conjecture qui est équivalente à la conjecture de Sarnak.

Conjecture 3.6. *On a*

$$\mu \perp f$$

pour tout $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entropie 1.

4. Travaux sur la conjecture de Sarnak

Il y a beaucoup de résultats vers la conjecture de Sarnak, et on les présente dans cette section.

Soit (X, T) une dynamique topologique d'entropie nulle. On dit que la fonction de Möbius est *linéairement disjointe* de la dynamique (X, T) si la conjecture de Sarnak est vraie pour cette dyanmique, i.e. pour tout $f \in C(X)$ pour tout $x \in X$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) f(T^k(x)) = 0.$$

(1) On sait que la dynamique de l'homéomorphisme du cercle (S^1, T) a l'entropie nulle (par définition d'entropie directement). Karagulyan [K] a montré que

Théorème 4.1 ([K], Théorème 1.2)**.** *la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique de la homéomorphisme du cercle.*

De plus, il a montré dans le même article que

Théorème 4.2 ([K], Théorème 1.1). *la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique de l'intervalle d'entropie nulle.*

L'idée est suivi dune proposition d'ensemble $\omega-$limite (qui est défini comme un ensemble des valeurs d'adhérence d'orbite de la dynamique) dans la dynamique du intervalle d'entropie nulle par Ruette:

Proposition 4.3 ([R], Proposition 5.22). *Soit (X, T) une dynamique de l'intervalle d'entropie nulle. Si l'ensemble $\omega-$limite $\omega(x, T)$ est infinite, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, il exists sous-intervalles fermées $\{L_m^k\}_{0 \le k \le 2^n - 1}$ telles que*
(i) *L_m^k sont disjointes pour tout $0 \le k \le 2^m - 1$;*
(ii) *$T(L_m^k) = L_m^{k+1 \mod 2^m}$;*
(iii) *$\omega(x) \subset \mathcal{L}_m := \cup_{0 \le k \le 2^m - 1} L_m^k$.*

(2) Dans [BSZ], Bourgain, Sarnak and Ziegler ont donné un critère pour démontrer la conjecture de Sarnak.

Théorème 4.4 ([BSZ], Théorème 2). *Supposons deux fonctions $F, \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tels que $|F| \le 1, |\nu| \le 1$ et ν est multiplicatif. Supposons pour toute paire de nombres premiers distincts p, q,*

$$\sum_{n \le N} F(pn)\overline{F(qn)} = o(N),$$

Alors

$$\sum_{n \le N} \nu(n) F(n) = o(N).$$

C'est une mthode importante, on donne une exemple.

Exemple 4.1. *Soit (S^1, R_α) une rotation sur le cercle.*
Pour p, q nombres premiers distincts, on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i p k \alpha} \overline{e^{2\pi i q k \alpha}} = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i (p-q) k \alpha}$$

bornée pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Donc

$$\mu \perp e^{2\pi i \bullet \alpha}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) Soit (X, T) une dynamique topologique. Un point x est *régulièrement récurrent* si, pour tout ouvert $U \ni x$, l'ensemble des temps de retour à U contient une progression arithmétique $n\mathbb{Z}$. On dit que une dynamique (X, T) est *du type Toeplitz* si $X = \overline{Orb_T(x)}$ où x est un point régulièrement récurrent. De plus, la dynamique est appellé *régulière* si l'ensemble des points régulièrement récurrents dans (X, T) a la mesure pleine pour chaque mesure

invariante sur X. Dans [DK], Downarowicz et Kasjan ont montré que

Théorème 4.5. *Soit (X, T) une dynamique du type Toeplitz régulière. Alors la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique (X, T).*

(4) On se donne des suites d'entiers positifs (w_n) et $(a_{n,i})$ pour $1 \leq i \leq w_n - 1$. On note

$$h_0 = 1, \ h_{n+1} = w_n h_n + \sum_{j=1}^{w_n - 1} a_{n,j}.$$

Supposons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w_n h_n} \Big(\sum_{j=1}^{w_n - 1} a_{n,j}\Big) < \infty.$$

On définit des mots B_n sur l'alphabet $\{0, 1\}$ de facon récurrente, par

$$B_0 = 0, B_{n+1} = B_n 1^{a_{n,1}} B_n \cdots B_n 1^{a_{n,w_n-1}} B_n.$$

La dynamique symbolique de *rang un* (X, T) est défini comme une sous dynamique de plein-décalage $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ et pour tout $(x_n) \in X$, pour tout $s < t$, $(x_s, \ldots, x_t)$ est une sous-suite de certain mot B_n. On sait que l'entropie d'une dynamique de rang un est zero (plus généralement, on peut définir la dynamique de rang fini par l'analogie et on sait que l'entropie d'une dynamique de rang fini est zero). Alors, Bourgain montre le théorème suivant.

Théorème 4.6 ([B], Théorème 1)**.** *Soit (X, T) une dynamique de rang un. On suppose qu'il existe une constante C telle que*

$$w_n < C, \ a_{n,j} < C.$$

Alors la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique (X, T).

(5) Soit X un groupe abélien compact. Soit $T : G \to G, x \mapsto Ax + b$ une fonction linéaire affine, où A est un automorphisme de X et $b \in X$. Liu et Sarnak [LS] ont montré que

Théorème 4.7 ([LS], Théorème 1.1)**.** *Soit (X, T) un flot linéaire affine du groupe abélien compact d'entropie nulle. Alors la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique (X, T).*

Dans [LS], les auteurs considèrent aussi le flot distal non linéaire S sur le tore $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ défini par

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ h(x) \end{pmatrix}$$

où $a, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad = \pm 1, \alpha \in \mathbb{R}$ et h est une fonction analytique, c'est-à-dire,

$$h(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{h}(m)e^{2\pi imx}.$$

Ils ont démonstré que

Théorème 4.8 ([LS], Théorème 1.2). *Soit* $(\mathbb{T}^2, S)$ *un flot distal non linéaire défini ci-dessus. Supposons qu'il existe une constante* $c < \infty$ *telle que*

$$|\hat{h}(m)| \gg e^{-c|m|}.$$

Alors la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique $(\mathbb{T}^2, S)$.

(6) Dans [W], Wang aussi considère les flots distals sur le tore $\mathbb{T}^2$ et il prolonge les travaux de Liu et Sarnak [LS]. De plus, il a montré que

Théorème 4.9 ([W], Théorème 1.1). *Soit* $(\mathbb{T}^2, T)$ *une dynamique topologique qui satisfait*

$$T(x, y) = (x + \alpha, y + h(x)),$$

où $\alpha \in [0, 1[$ *et* h *est une fonction analytique. Alors la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique* $(\mathbb{T}^2, T)$.

En effet, dans sa démonstration, il utilse Theorem 4.4, la fraction continue et Theorem suivante:

Théorème 4.10 ([F]). *Soit* (Ω, f, μ) *une dynamique ergodique uniquement (i.e. il y a une seul mesure invariante par* f*). Soit* $h : \omega \to \mathbb{T}^1$ *une fonction continue. Soit* $T : \omega \times \mathbb{T}^1 \to \omega \times \mathbb{T}^1, (x, y) \mapsto (f(x), y+h(x)$. *Alors exactement l'un des éléments suivants est vrai:*

(1) $\mu \times m_{\mathbb{T}^1}$ *est ergodique uniquement par* T.
(2) *Il exists une fonction mesurable* $g : \omega \to \mathbb{T}^1$ *et un entier non-null* s *tel que* $sh(x) = g(T(x)) - g(x)$.

(7) Soit G un groupe simplement connexe de Lie nilpotent avec un sous-groupe discret et cocompact Γ, c'est-à-dire, G/Γ est un nilvariété. Soit $g : \mathbb{Z} \to G$ un polynôme. Soit $F : G/\Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction Lipchitzienne. On sait que la dynamique $(G/\Gamma, L_g)$ a

l'entropie nulle, où $g \in G$ et $L_g : h\Gamma \mapsto (gh)\Gamma$. Alors Green et Tao [GT] montrent que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(g(k)\Gamma)\mu(k) = 0.$$

Donc la fonction de Möbius est linéairement disjointe de la dynamique $(G/\Gamma, L_g)$.

Il indique une exemple de la version polynômial de la conjecture de Sarnak.

5. Généralisation de la conjecture de Sarnak

Dans cette section, on présente deux facons de généraliser la conjecture de Sarnak.

Soit $B = \{b_k : k \geq 1\} \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ qui vérifie

$$\forall 1 \leq k < k', pgcd(b_k, b_{k'}) = 1,$$

et

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{b_k} < \infty.$$

Dans [EKLD], les auteurs considèrent les nombres B-libres, c'est-à-dire, le nombre $p \in \mathbb{N}$ est B-libre si $pgcd(p, b_k) = 1$ pour tout $b_k \in B$. Ensuite ils introduisent la suite B-libre $\eta(n)$ qui est défini par

$$\eta(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est B-libre,} \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases} \tag{5·5}$$

Soit $\phi = (\eta(1), \eta(2), \cdots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Alors $(\overline{Orb_\sigma(\phi)}, \sigma)$ est un sous-décalage. Le théorème suivant contraste avec le Théorème 3.4.

Théorème 5.1 ([EKLD], Théorème 5.3)**.** *L'entropie topologique* $h(\sigma) = \prod_{k\geq 1}(1 - \frac{1}{b_k})$.

De plus, ils considèrent les conjectures de Chowla et de Sarnak selon les nombres B-libres. Pour plus de détail, voir [EKLD].

On peut considérer l'autre direction de généralisation de la conjecture de Sarnak. Dans [FJ], les auteurs considèrent les suites oscillantes, c'est-à-dire, une suite complexe (c_n) satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-2\pi ikt} = 0$$

pour tout $t \in [0, 1[$.

On remarque que la fonction de Möbius $(\mu(n))$ est une suite oscillante par (3·3). En effet, dans [FJ], ils démontrent que les suites oscillantes sont linéairement disjointes de certaines dynamiques topologiques, par exemple, la dynamique de Feigenbaum etc.

6. Questions ouvertes

La conjecture de Sarnak est encore ouverte, parce que la classification des dynamiques d'entropie nulle est un problème difficile. De plus, la question de savoir si la disjonction sur une certaine dynamique d'entropie nulle est également difficile, par exemple, les dynamiques de rang fini.

Une autre question ouverte est la généralisation de la fonction Möbius qui est suivie par les travaux de [EKLD] et [FJ]. Pour une certaine dynamique d'entropie nulle, une question est quelle est la condition suffisante (respectivement nécessaire) pour une suite qui est linéairement disjointe de cette dynamique.

References

[AY] V. M. Alekseev, M. V. Yakobson, *Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems.* Physics Reports, 1981, 75(5): 290-325.

[B] J. Bourgain, *On the correlation of the Möbius function with random rank one systems.* 2011, arXiv preprint arXiv:1112.1031.

[BP] M. P. Béal M P, D. Perrin, *Symbolic dynamics and finite automata.* Handbook of formal languages. Springer Berlin Heidelberg, 1997: 463-506.

[BSZ] J. Bourgain, P. Sarnak, T. Ziegler *Disjointness of Moebius from horocycle flows.* From Fourier analysis and number theory to radon transforms and geometry. Springer New York, 2013, 67-83.

[DK] T. Downarowicz, S. Kasjan, *Odometers and Toeplitz systems revisited in the context of Sarnak's conjecture.* arXiv preprint arXiv:1502.02307, 2015.

[E] T. Eisner, *A polynomial version of Sarnak's conjecture.* arXiv preprint arXiv:1501.04323, 2015.

[EKL] H. El Abdalaoui, S. Kasjan, M. Lemańczyk, *0-1 sequences of the Thue-Morse type and Sarnaks conjecture.* Proceedings of the American Mathematical Society, 2016, 144(1): 161-176.

[EKLD] H. El Abdalaoui, J. Ku laga-Przymus, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view.* arXiv:1410.1673.

[ELD] H. El Abdalaoui, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *A dynamical point of view on the set of B-free integers.* International Mathematics Research Notices 2015 (2015), no. 16, 72587286.

[ELD2] H. El Abdalaoui, M. Lemańczyk, T. de la Rue, *On spectral disjointness of powers for rank-one transformations and Mbius orthogonality.* Journal of Functional Analysis, 2014, 266(1): 284-317.

[F] H. Furstenberg, *Strict ergodicity and transformation of the torus.* American Journal of Mathematics, 1961, 83(4): 573-601.

[FKLM] S. Ferenczi, J. Kulaga-Przymus, M. Lemaǹczyk, C. Mauduit, *Substitutions and Möbius disjointness.* arXiv preprint arXiv:1507.01123, 2015.

[FJ] A.H. Fan, Y. Jiang, *Oscillating Sequences, Minimal Mean Attractability and Minimal Mean-Lyapunov-Stability.* arxiv.org/abs/1511.05022.

[G] T.N.T. Goodman, *Topological sequence entropy.* Proc. London Math. Soc, 1974, 29(3): 331-350.

[GT] B. Green, T. Tao *The mobius function is strongly orthogonal to nilsequences.* arXiv preprint arXiv:0807.1736, 2008.

[K] D. Karagulyan, *On Mobius orthogonality for interval maps of zero entropy and orientation-preserving circle homeomorphisms.* Arkiv for Matematik, 2015: 1-11.

[K2] B. P. Kitchens, *Symbolic dynamics: one-sided, two-sided and countable state Markov shifts.* Springer Science & Business Media, 2012.

[KH] A. Katok, and B. Haselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[LM] D. Lind, B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge University Press, 1995.

[LS] J. Liu, P. Sarnak, *The Möbius function and distal flows.* Duke Mathematical Journal, 2015, 164(7): 1353-1399.

[P] R. Peckner, *Mö bius disjointness for homogeneous dynamics.* arXiv preprint arXiv:1506.07778, 2015.

[R] S. Ruette, *Chaos for continuous interval maps.* Preprint, http://www. math. u-psud. fr/ ruette/publications. html, 2003.

[S] P. Sarnak, *Three lectures on the Mobius function, randomness and dynamics.* https://publications.ias.edu/sites/default/files/MobiusFunctionsLectures.pdf.

[T] T. Tao, *The Chowla conjecture and the Sarnak conjecture.* https://terrytao.wordpress.com/2012/10/14/the-chowla-conjecture-and-the-sarnak-conjecture, 2012.

[W] Z. Wang, *Möbius disjointness for analytic skew products.* arXiv preprint arXiv:1509.03183, 2015.