Moyennabilité des groupes et ces aspects géométriques et probabilistes

Bogdan Stankov

2 octobre 2017

Table des matières

1 Introduction

L'origine de la notion de moyennabilité vient du paradoxe de Banach-Tarski. En 1924 [2], Banach et Tarski découpent la boule de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de parties, puis, en appliquant uniquement des isométries, ils reconstruisent deux boules chacune identique à la première. Cela est contraire à l'idée intuitive de volume, et, clairement, les morceaux ne sont pas Lebesgue-mesurables. Pour comprendre la structure qui permet cela, étant donnée une action d'un groupe sur un espace, on définit :

Définition 1.1. *Soit un groupe G qui agit sur un ensemble X. On dit que l'action est* ***paradoxale*** *s'il existe deux entiers positifs m et n et des sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ de X deux-à-deux disjoints, ainsi que $g_1, g_2, \dots, g_m, h_1, \dots, h_n \in G$ tels que $X = \bigcup g_i(A_i) = \bigcup h_i(B_i)$.*

Avec cette notation, le paradoxe de Banach-Tarski dit que l'action des isométries de $\mathbb{R}^3$ sur une boule est paradoxale. Cette propriété est reliée à la structure du groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$. En effet, définissons qu'un groupe est paradoxal si l'action sur lui-même par multiplication à gauche l'est. Alors pour une action paradoxale de G sur X, pour un point $x \in X$, en prenant des ensembles obtenus comme images inverses d'un décomposition paradoxale sur X par $g \to g.x$ on obtient une décomposition paradoxale sur G. Le groupe est donc paradoxal, et on peut aussi obtenir un résultat inverse partiel (voir [31]) :

Proposition 1.2. *Si G est paradoxale et agit librement sur X, alors cette action est paradoxale.*

La structure recherchée se cache donc dans le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$. Cela donne une première définition de moyennabilité :

Définition 1.3. *Un groupe est* ***moyennable*** *si et seulement s'il n'est pas paradoxale.*

Il existe plusieurs autres définitions équivalentes dans des domaines variés. Par exemple, la définition considérée comme canonique est analytique, une autre est combinatoire, et une troisième utilise des marches aléatoires. On les verra dans la prochaine section. Ce lien entre les domaines rend encore plus intéressant l'étude de la moyennabilité, et certaines des équivalences qu'on verra se généralisent (voir section 4). Une autre justification est le fait que certaines propriétés qu'on n'arrive pas à démontrer pour tous les groupes en général sont vraies pour les groupes moyennables - c'est par exemple le cas de la conjecture de Baum-Connes (démontrée pour les groupes moyennables par Higsen et Kasparov [10]).

2 Moyennabilité

2.1 Définitions

Commençons par la définition canonique de moyennabilité, donnée par John von Neumann. On reprend les notations du livre de Juschenko en préparation [12]. Soit G un groupe. Une **moyenne** (ou moyenne l^∞) sur un ensemble X est une fonctionnelle linéaire μ sur $l^\infty(X)$ qui vérifie $\mu(\chi_X) = 1$, $\mu(0) = 0$ et $\mu(f) \geq 0$ pour chaque $f \geq 0$. Pour une fonction f sur un groupe G, on note $T_g f : h \mapsto f(g^{-1}h)$ pour tout $g \in G$. Une moyenne sur un groupe G est invariante (à gauche) si pour chaque $f \in l^\infty(G)$, $g \in G$,

$$\mu(T_g f) = \mu(f).$$

Définition 2.1.1. *Un groupe G est dit moyennable s'il admet une moyenne invariante.*

Remarquons qu'en considérant la composition avec $x \mapsto x^{-1}$, une moyenne invariante à gauche devient invariante à droite, ou l'inverse, donc on a le droit de parler de moyenne invariante sans préciser le côté. De manière équivalente, en passant par la dualité entre fonctionnelles et mesures, on a

Définition 2.1.2. *Un groupe G est moyennable si et seulement s'il existe $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ qui vérifie $\mu(G) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$,*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

pour $A \cap B = \emptyset$ et

$$\mu(gE) = \mu(E)$$

pour tout $g \in G$, $E \in \mathcal{P}(G)$.

Une telle «mesure» est dite moyenne sur les sous-ensembles de X. Il est assez claire que l'existence d'une décomposition paradoxale implique la non-moyennabilité. Le sens inverse a été montré par Tarski [29]. Cela montre l'équivalence de la définition 2.1.1 avec la définition 1.3.

Pour un groupe topologique localement compact G, notons $Prob(G) = \{\mu \in L^1(G) : \|\mu\|_1 = 1 \text{ et } \mu \geq 0\}$ pour L^1 sur la mesure de Haar. À partir de maintenant, tous les groupes seront discrets. Dans ce cas, la mesure de Haar est juste la mesure de comptage. On peut donc passer de l'analyse vers la combinatoire avec une chaine d'équivalences :

Théorème 2.1.3. *Considérons un groupe G. Alors on a une équivalence entre :*

1. *G est moyennable.*
2. ***(Condition de Reiter)** Pour chaque $E \subset G$ fini et $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in Prob(G)$ tel que $\|T_s\mu - \mu\|_1 \leq \varepsilon$ pour tout $s \in E$.*
3. ***(Condition de Følner)** Pour chaque $E \subset G$ fini et $\varepsilon > 0$, il existe une ensemble fini F (appelé ensemble de Følner) qui vérifie :*

$$|sF \triangle F| \leq \varepsilon |F| \text{ pour tout } s \in E.$$

Remarquons que pour ces définitions équivalentes on n'a pas besoin de l'axiome du choix. Par contre, la définition 2.1.1 avec les moyennes ne serait pas équivalente sans cette axiome. Même sur le groupe infini le plus simple, $\mathbb{Z}$, on ne peut pas construire une moyenne invariante sans utiliser des ultrafiltres. Dans la section 3, on parlera des questions autour des ensembles de Følner : leur taille, s'ils peuvent être des boules, etc.

La condition de Følner donne deux propriétés importantes : un sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable, et une réunion croissante de groupes moyennables est moyennable. Formellement :

Proposition 2.1.4. *Tout sous-groupe H d'un groupe moyennable G est moyennable.*

Démonstration. Soit R une choix de représentants pour les classes à droite $H\backslash G$ et soient $E \subset H$ fini et ε fixés. Soit F l'ensemble de Følner qu'on obtient sur G. Soit $F_r = H.r \cap F$ pour $r \in R$. On a donc $F = \cup_r F_r$ une union disjointe. Puisque $E \subset H$, on a $|F \triangle s.F| = \sum_r |F_r \triangle s.F_r|$, et donc, pour au moins un $r \in R$ tel que $F_r \neq \emptyset$, on a $\sum_{s\in E} |F_r \triangle s.F_r| \leq \varepsilon |E||F_r|$. Alors $F_r.r^{-1}$ est l'ensemble cherché. □

Proposition 2.1.5. *Soit G_i une suite de groupes moyennables tel que $G_i \subset G_{i+1}$ pour chaque i. Alors $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ est moyennable.*

Démonstration. Tout ensemble fini F est contenu dans G_i pour un certain i. □

Si un groupe est engendré par un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est de type fini. Alors les deux propositions impliquent :

Proposition 2.1.6. *Un groupe est moyennable si et seulement si chaque sous-groupe de type fini l'est.*

Cela permet de travailler avec des groupes de type fini, sur lesquels on peut utiliser la théorie des graphes ainsi que la géométrie discrète de ces graphes. Plus précisément, pour un groupe G avec un ensemble générateur S, on définit son **graphe de Cayley** comme le graphe dont les sommets sont les éléments de G et (x, y) est une arête si et seulement si $x^{-1}y \in S$. Si on demande de plus que S soit symétrique ($S^{-1} = S$), on peut penser au graphe de Cayley comme à un graphe non-orienté. La condition de moyennabilité peut être exprimée à l'aide de la constante isopérimétrique (appelée aussi constante de Cheeger). Elle est définie de la façon suivante. Soit H un graphe (pas nécessairement fini) dont tous les sommets ont un dégré fini. Si $A \subset V(H)$, on définit $\partial A = \{b \in V(H) \setminus A, \exists a \in A : (a,b) \in E(H)\}$ son bord. La constante isopérimétrique de H est alors :

$$h(H) = \min\{\frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset V(H) \text{ fini}, |A| \leq \frac{1}{2}|V(H)|\}.$$

Cela donne :

Lemme 2.1.7. *Soit G un groupe de type fini et S une ensemble générateur fini. Alors G est moyennable si et seulement si la constante isopérimétrique du graphe de Cayley associée S est strictement positive.*

Voyons encore une dernière définition équivalente, en utilisant les marches aléatoires. Prenons un groupe G. D'après les propositions 2.1.4 et 2.1.5, on peut le considérer comme une union de sous-groupes dénombrables. On peut alors simplifier nos notations en supposant que G est dénombrable. Soit p une loi de probabilité symétrique sur $\mathcal{P}(G)$, c'est-à-dire $p(x) = p(x^{-1})$ pour chaque x. On associe à (G,p) une matrice M de taille le cardinal de G tel que $M_{x,y} = p(x^{-1}y)$. C'est une matrice stochastique symétrique qui décrit la marche aléatoire induite par p sur G. Puisqu'elle est symétrique stochastique, son spectre est réel et est contenu dans $[0,1]$. On note $\lambda(G,p) = max_{\lambda \in spec(G)} \lambda$. Le critère de Kesten [17] dit :

Théorème 2.1.8. *Soit p une loi de probabilité symétrique sur un groupe dénombrable G tel que le support de p engendre G. Alors G est moyennable si et seulement si $\lambda(G,p) = 1$.*

De cette manière, on ne voit pas les marches aléatoires. Mais en effet, si on note e l'élément neutre de G et p_n la probabilité de retour à e après n pas sachant qu'on a commencé en e, on a

$$\lambda(G,p) = \limsup_n (p_n)^{1/n}.$$

La moyennabilité est aussi stable par passage au quotient, et, si $G/H = K$ avec H et K moyennables, alors G est moyennable.

2.2 Sous-groupes libres

Considérons le groupe engendré par deux éléments a et b tel que chaque mot réduit non-trivial sur ces deux éléments ne donne pas l'identité. De façon équivalente, on peut le considérer comme l'ensemble de mots réduits muni de la concaténation (puis réduction). On appelle cela le groupe **libre non-abélien** à deux générateurs, et on le note F_2.

Lemme 2.2.1. *Le groupe F_2 est paradoxale.*

On va même exhiber une décomposition associée. Prenons les quatre ensembles $A_1, \ldots, A_4$ des mots réduits qui commencent avec a, a^{-1}, b et b^{-1} respectivement. Autrement dit, $A_1 = \{ax_0x_1 \ldots x_n \text{ sous forme réduite}, n \in \mathbb{N}, x_i \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}\}$, etc. Alors $A_1 \cup a.A_2 = G$. Voir sur la figure 1 le graphe de Cayley avec A_1 représenté par des lignes en tirets (et en rouge si vous avez imprimé en couleur) et A_2 par des lignes pointillées (bleus). De manière similaire, $A_3 \cup b.A_4$ donne aussi le groupe tout entier. En ajoutant l'élément neutre dans un de ces ensembles, on obtient une décomposition paradoxale. Avec la proposition 2.1.4, on a donc que chaque groupe qui contient un sous-groupe libre est non-moyennable, ce qui donne la classe la plus évidente d'exemples de groupes non-moyennables. Le groupe des isomorphismes de $\mathbb{R}^3$ appartient à celle-ci, c'est-à-dire qu'il contient un sous-groupe libre. Par contre, trouver un exemple en-dehors de cette classe n'est pas facile - la

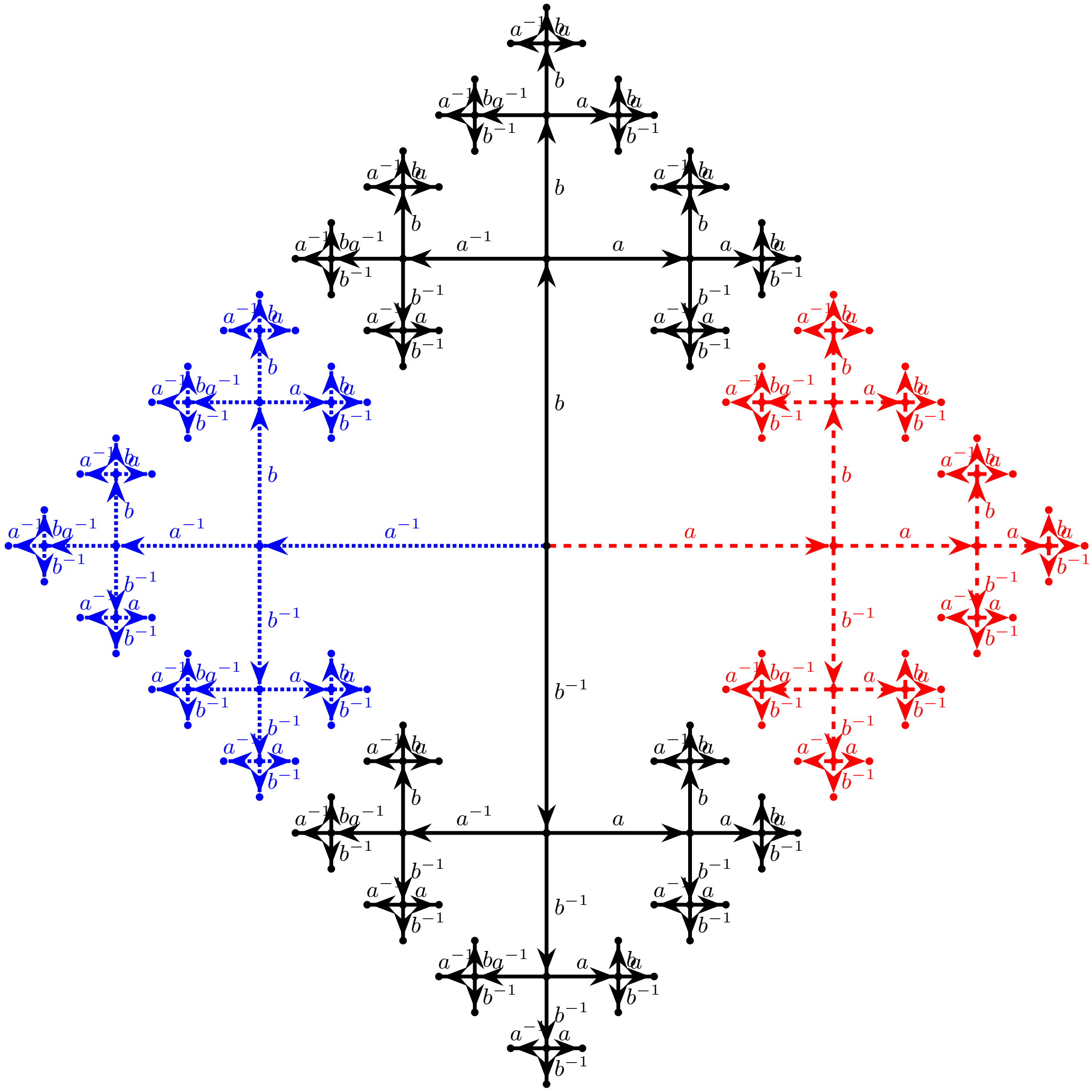


FIGURE 1 – Graphe de Cayley de F_2

question de leur existence a même été formulée par Day dans les années 1950, ce qui était appelé le «problème de von Neumann-Day». Le premier exemple a été donné en 1980 et on en parlera en détail dans la prochaine sous-section 2.3. Plus généralement, on ne sait même pas si avoir un sous-groupe libre est une condition géométrique (on expliquera ce que cela veut dire dans la section 5). Cela conduit à une des grandes questions ouvertes dans le domaine - donner une condition de moyennabilité algébrique.

Les deux approches les plus connues pour chercher des sous-groupes libres sont le lemme du ping-pong et l'alternative de Tits [30] :

Théorème 2.2.2. ***Alternative de Tits*** *Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{K})$ pour $n \geq 1$ et K un corps de caractéristique zéro. Alors soit G a un sous-groupe libre non-abélien, soit G a un sous-groupe résoluble d'indice fini.*

Plus généralement, il y a une fonction $n \mapsto \lambda(n)$ telle que, indépendamment de $\mathbf{K}$, si G n'a pas de sous-groupe libre, il a un sous-groupe résoluble d'indice $\lambda(n)$. Des théorèmes similaires ont été démontrés pour d'autres groupes, et on dit qu'une classe de groupes $\mathcal{C}$ satisfait l'alternative de Tits si tout groupe de la classe possède soit un sous-groupe libre soit un sous-groupe résoluble d'indice fini. Par exemple, Karras et Solitar [15, Théorème 3] ont montré que pour un groupe G défini par une seule relation, soit il contient un sous-groupe libre, soit il est résoluble. Explicitons ce que signifie être défini par une seule relation. Pour cela, on a besoin d'un lemme. Considérons un groupe G engendré par un ensemble S. Il y a un morphisme naturel du groupe libre sur S vers G. On peut donc écrire G comme un quotient de ce groupe. On a donc :

Lemme 2.2.3. *Tout groupe G est un quotient d'un groupe libre. De plus, si G est de type fini, il est quotient d'un groupe libre sur un nombre fini de générateurs.*

On considère alors un groupe comme le quotient F_k/N d'un groupe libre F_k par un sous-groupe normal N. Si dans une telle représentation, N est engendré par un nombre fini d'éléments comme sous-groupe normal, alors on dit que F_k/N est **de présentation finie**. Si de plus il est engendré comme sous-groupe normal par un seul générateur, on dit que F_k/N est défini par une relation.

Un autre exemple est donné par les sous-groupes des groupes modulaires des surfaces de Riemann [20] (c'est-à-dire les classes d'isotopie des difféomorphismes) sans trou et de caractéristique d'Euler négative. C'est aussi vrai [26] pour les groupes fondamentaux des variétés M fermées, orientables et irréductibles de dimension 3 telles que $H_1(M, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geq 3$ pour un p premier, ainsi que pour [9, 8.2.F] les sous-groupes de groupes hyperboliques de Gromov. Pour une liste plus complète, voir le livre de Pierre de la Harpe [6, II.42].

2.3 Groupes de torsion

En 1902 William Burnside demande si chaque groupe de type fini de torsion est fini, c'est-à-dire s'il existe un groupe G infini de type fini tel que pour chaque $g \in G$ il existe $p > 0$ tel que $g^p = Id$. En 1964 la conjecture est réfutée. Ici on s'intéressera au problème de Burnside **borné** : existe-t-il un nombre entier p et un groupe infini de type fini G tel que $g^p = Id$ pour chaque $g \in G$? Cette question se ramène aux groupes de Burnside, qui sont des objets universels (dans un certain sens). On définit $B(m, n)$ comme le quotient de F_m par le sous-groupe normal engendré par les g^n pour $g \in F_m$. C'est un groupe de torsion n qui est universelle pour tous les groupes de torsion n engendrés par au plus m éléments. Le problème de Burnside borné demande alors s'il y a des groupes de Burnside infinis, et lesquelles. En 1968, Adyan et Novakov [22] démontrent que $B(m, n)$ est infini pour $m \geq 2$ et $n \geq 4381$ impaire.

Ol'shanskii développe leur méthode et en 1980 [24] donne le premier exemple de groupe **non-moyennable sans sous-groupe libre**. Plus tard dans la même année, il présente aussi des groupes de torsion non-moyennables [23]. On obtient même une propriété plus forte : tous leurs sous-groupes sont cycliques. C'est ce qu'on appelle les monstres de Tarski. Puisqu'un groupe non-moyennable est toujours infini, cela implique qu'un nombre infini de groupes de Burnside sont infinis.

En 1983 S. Adyan [1] montre que $B(m, n)$ pour $m \geq 2$ et $n \geq 655$ impaire est non-moyennable (et donc aussi infini). Dans [8] Grigorchuk décrit un groupe de torsion infini moyennable. Mais c'est une question ouverte [28] de savoir si un groupe de Burnside peut être infini et moyennable. Plus généralement, on ne sait pas si un groupe peut être infini, moyennable et de torsion bornée.

2.4 Groupe de Grigorchuk

Pour plus de références sur cette section, voir le livre de Pierre de la Harpe [6, Ch. VIII]. Notons $\mathcal{T}$ l'arbre infini binaire. Ses sommets sont les suites finies de $\{0, 1\}$, la suite vide étant la racine. On considère les automorphismes qui préservent la profondeur. Autrement dit, un automorphisme permute ou non les deux branches à chaque sommet. Notons a l'automorphisme qui permute les deux branches principales et rien d'autre. Autrement dit,

$$a(j_1, j_2, \ldots, j_k) = (\bar{j_1}, j_2, j_3, \ldots, j_k)$$

où $\bar{j} = 1 - j$. On définit aussi b, c et d par récurrence. L'automorphisme b va agir comme a sur le sous-arbre à gauche (celui dont les sommets sont de la forme $(0, j_2, j_3, \ldots, j_k)$) et comme c à droite. De même, $c = (a, d)$, mais $d = (1, b)$. Formellement :

$$\begin{cases} b(0, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (0, \bar{j_2}, j_3, \ldots, j_k) \\ b(1, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (1, c(j_2, j_3, \ldots, j_k)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c(0, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (0, \bar{j_2}, j_3, \ldots, j_k) \\ c(1, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (1, d(j_2, j_3, \ldots, j_k)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(0, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (0, j_2, j_3, \ldots, j_k) \\ d(1, j_2, j_3, \ldots, j_k) = (1, b(j_2, j_3, \ldots, j_k)). \end{cases}$$

Le **groupe de Grigorchuk** est alors $\Gamma = \langle a, b, c, d \rangle$ (le sous-groupe des isomorphismes de $\mathcal{T}$ engendré par ces quatre éléments). Notons qu'on a $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1$ et aussi $bc = cb = d$. Cela veut dire que pour chaque mot sur a, b, c, d qui est de longueur minimale pour l'élément du groupe qu'elle représente, elle est de la forme $ax_1ax_2 \ldots x_ka$, $ax_1 \ldots x_k$, $x_1a \ldots x_ka$ ou $x_1a \ldots x_k$ pour $x_1, \ldots, x_k$ parmi b, c, d. Notons $St_\Gamma(k)$ le sous-groupe qui fixe les k premiers niveaux. Il agit séparément sur chaque sous-arbre défini en prenant un sommet de profondeur k comme racine. On peut vérifier que la restriction donne aussi un élément de Γ. On a donc des morphismes naturels $St_\Gamma(k) \mapsto \Gamma^{2^k}$. Considérons en particulier $St_\Gamma(3)$. D'après les définitions on peut voir que pour chaque élément parmi b, c, d, on peut trouver une branche sur laquelle cet élément agit trivialement jusqu'à cette profondeur. On peut utiliser cela et l'écriture ci-dessus pour démontrer :

Lemme 2.4.1. *Soit l la métrique de longueur de mots, $\gamma \in St_\Gamma(3)$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_8$ les restrictions de γ sur les sous-arbres. On a donc :*

$$\sum_{i=1}^{8} l(\gamma_i) \leq \frac{3}{4} l(\gamma) + 8.$$

On peut aussi montrer que pour chaque $\gamma \in \Gamma$ il existe N tel que $\gamma^{2^N} = 1$, mais que pour chaque n il existe γ tel que $\gamma^{2^n} \neq 1$.

3 Croissance des groupes et des ensembles de Følner

Le groupe de Grigorchuk n'est pas seulement moyennable, mais, ce qui est plus fort, il est de croissance intermédiaire. Définissons ce que cela veut dire. Pour un groupe G de type fini, et un ensemble S fini générateur, on définit $\beta(G, S, k)$ la taille de la boule autour de l'identité dans le graphe de Cayley associé. On note $\omega(G, S) = \limsup_k \sqrt[k]{\beta(G, S, k)}$. Si $\omega(G, S) > 1$, on dit que G est de **croissance exponentielle** (notons que $\omega(G, S)$ ne dépend pas du choix de S fini). Si $\beta(G, S, k)$ est majorée par un polynôme, on dit que G est de **croissance polynomiale**. Sinon, si β croît plus vite que chaque polynôme mais plus lentement que chaque exponentielle, on dit que le groupe est de **croissance intermédiaire**. Par exemple, dans le groupe de Grigorchuk on sait que $\beta(k) = \beta(\Gamma, \{a, b, c, d\}, k) \leq (\omega(\Gamma, \{a, b, c, d\}) + \varepsilon)$ à partir d'un certain rang (par définition de limite supérieure). Si on applique à cela le lemme 2.4.1 et le fait que $St_\Gamma(3)$ est d'indice 2^7 [6, VIII.22], on obtient

$$\beta(k) \leq DP(k)(\omega+\varepsilon)^{\frac{3}{4}(k+2^7-1)+8}$$

pour une constante D et un polynôme P. Cela implique que $\omega \leq (\omega+\varepsilon)^{\frac{3}{4}}$. On a donc $\omega(\Gamma,\{a,b,c,d\}) = 1$ et le groupe de Grigorchuk n'est pas de croissance exponentielle. On peut montrer aussi qu'il n'est pas de croissance polynomiale [6, VIII.63].

Si un groupe n'est pas de croissance exponentielle, on peut montrer qu'une sous-suite des boules autour l'identité forment des ensembles de Følner. En effet, si $\omega(G,S) < 1+\epsilon$, alors à partir d'un certain k, $\beta(G,S,k) < (1+\epsilon)^k$. Cela implique que l'on peut en extraire une sous-suite de boules telle que le bord est toujours plus petit que ϵ fois l'intérieur. En procédant par extraction diagonale, on obtient le résultat. Par contre, l'inverse n'est pas vrai. Considérons par exemple le produit en couronne $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$. Ces éléments sont les paires (f,z) avec $f \in \oplus_{i=-\infty}^{\infty}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, parfois appelé configuration, et index $z \in \mathbb{Z}$. Le produit est défini par :

$$(f_1,z_1).(f_2,z_2) = (T^{z_2}f_1 + f_2, z_1+z_2)$$

où $T^{z_2}f_1(x) = f_1(x-z_2)$. Une façon de penser à ce groupe est fournie par l'étude des deux générateurs $(\delta_0,0)$ et $(0,1)$. Le premier, appliqué à un élément du groupe, change la configuration au point dénoté par l'index. Le deuxième change l'index en 1. Il est facile de voir qu'ils forment une semi-groupe libre, ce qui donne aussi une croissance exponentielle. Par contre il est moyennable, et même résoluble. Un exemple d'ensembles de Følner pour ce groupe est l'ensemble F_n des (f,k) tels que $supp(f) \subset [\![-n\dots n]\!]$ et $k \in [\![-n\dots n]\!]$. Son bord est toujours constitué uniquement des paires $(f,-n-1)$ et $(f,n+1)$, avec f qui vérifie les mêmes conditions, et devient donc de plus en plus petit par comparaison. Plus précisément, $\frac{|\partial F_n|}{|F_n|} = \frac{2}{2n+1}$, ce qui converge vers 0. La question suivante reste ouverte. Peut-on choisir pour chaque groupe moyennable certaines boules comme ensembles de Følner ? Si l'on sait que la croissance est intermédiaire ou polynomiale, c'est vrai, mais dans ce cas la question se pose de savoir si on peut choisir toutes les boules comme des ensembles de Følner. Plus généralement, pour un groupe moyennable on définit la fonction de Følner $F\o l_G(n) = min(|V|)$ pour V tel que $|\partial V|/|V| \leq 1/n$, et une direction de recherche possible est de comprendre son comportement asymptotique.

4 Marches aléatoires et inégalités isopérimétriques

Considérons dans cette section un graphe Γ avec une loi de probabilité symétrique p. On dit qu'il satisfait une inégalité $\mathfrak{F}$-isopérimétrique (pour une fonction $\mathfrak{F}$) si pour tout ensemble fini $A \subset \Gamma$ on a

$$\mathfrak{F}(|A|) \geq \kappa|\partial A|$$

pour une constante κ. Pour $\mathfrak{F}(t) = t$ on dit simplement inégalité isopérimétrique et la plus grande constante est donc la constante isopérimétrique. Dans cette section, on s'intéressera au cas où cette constante vaut zéro. Si c'est un graphe de Cayley, c'est le cas moyennable. Notons qu'un graphe de Cayley d'un groupe G satisfait une inégalité $\mathfrak{F}$-isopérimétrique dès que $\mathfrak{F}$ est croissante et $\mathfrak{F}(t) \geq t/F\o l_G^{-1}(t-1)$ pour tout t pour lequel cela est définit.

Le profil isopérimétrique donne les bornes suivantes sur la probabilité de retour. La borne supérieure est [32, Théorème 14.3] :

Théorème 4.1. *Soit $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\mathfrak{f} : t \mapsto t/\mathfrak{F}(t)$ soit croissante. Si (Γ,p) est $\mathfrak{F}$-isopérimétrique pour une constante κ, alors pour tout $x,y \in \Gamma$:*

$$p_{2n}(x,y) \leq 2\alpha(n),$$

où $p_n(x,y)$ est la probabilité d'aller de x à y en n pas (autrement dit, p_n est la n-ième convolution de p) et α est la solution de $\alpha(0)=1$,

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{8\kappa^2(\mathfrak{f}(4/\alpha(t)))^2}.$$

En particulier, c'est vrai pour un graphe de Cayley et une fonction $\mathfrak{f} = F^{-1}$ où $F \leq F\o l_G$.

On notera $a_n \preccurlyeq b_n$ s'il existe des constantes $C \geq c > 0$ telles qu'à partir d'un certain rang $a_n \leq C \sup\{b_k : cn \leq k \leq Cn\}$. C'est une notation plus générale que le comportement asymptotique au sens classique : par exemple, une suite de la forme $e^{-\lambda n}Q(n)$ pour un $\lambda > 0$ et un polynôme Q est, dans notre notation, équivalente à e^{-n}. Si $\mathfrak{F}(t) = t^{1-1/d}$ (en particulier, pour un graphe de Cayley avec $\beta(n) \succcurlyeq n^d$ en reprenant la notation de section 3, la borne donne $p_n(x,y) \preccurlyeq n^{-d/2}$). De même, si pour un $0 < \alpha \leq \infty$ on a $\mathfrak{F}(t) = t/(\log 2 + t)^{1/\alpha}$ (en particulier pour un graphe de Cayley avec $\beta(n) \succcurlyeq \exp(n^\alpha)$ pour $0 < \alpha \leq 1$), on obtient

$$p_n(x,y) \preccurlyeq \exp(-n^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}).$$

Pour la borne inférieure on a [32, Théorème 14.22] :

Théorème 4.2. *Soit $\mathfrak{v} : \mathbb{N} \to [2,\infty[$ croissante telle que $\mathfrak{v} \geq \beta$ et telle que $n \mapsto n^2/\log \mathfrak{v}(n)$ soit croissante et ne soit pas bornée. Alors*

$$p_{2n}(x,x) \geq \frac{1}{3V(x,\mathfrak{w}(6n))},$$

où $\mathfrak{w}(n) = \min\{k : n \leq k^2 \log \mathfrak{v}(k)\}$ et $V(x,n)$ est le volume de la boule de centre x et de rayon n.

Notons que pour un graphe de Cayley, $V(e,n)$ vaut simplement $\beta(n)$. Pour les polynômes cela donne : si $V(x,n) \preccurlyeq n^d$ alors $p_{2n}(x,x) \succcurlyeq (n \log n)^{-d/2}$. Pour les fonctions exponentielles on a que si $V(x,n) \preccurlyeq \exp n^\beta$ avec $0 < \beta < 2$ alors

$$p_{2n}(x,x) \succcurlyeq \exp(-n^{\frac{\beta}{2-\beta}}).$$

Alors pour un graphe de Cayley dont on sait que $\beta(n) \approx \exp(n^\alpha)$, avec $0 < \alpha \leq 1$, on a :

$$\exp(-n^{\frac{\alpha}{\alpha+2}}) \preccurlyeq p_n(e,e) \preccurlyeq \exp(-n^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}).$$

5 Quasi-isométries

Soient X et X' deux espaces métriques. Une fonction $\phi : X \mapsto X'$ est appelée un **plongement quasi-isomorphe** s'il existe des constantes $\lambda \geq 1$ et $C \geq 0$ telles que pour tout x, y :

$$\frac{1}{\lambda}d(x,y) - C \leq d'(\phi(x),\phi(y)) \leq \lambda d(x,y) + C.$$

C'est une **quasi-isométrie** si de plus il existe $D \geq 0$ tel que chaque point de X' est à distance plus petite que D d'un point de $\phi(X)$. On s'intéressera ici aux groupes de type fini avec la **métrique de longueur de mots**. Définissons-la. Soit G un groupe de type fini et S un ensemble générateur fini. La distance pour la métrique de longueur de mots entre g et h est la longueur minimale d'un mot sur S qui représente $g^{-1}h$. De façon équivalente, c'est la métrique définie par la distance sur le graphe de Cayley. On en déduit un résultat important :

Proposition 5.1. *Soit G un groupe de type fini et S et S' deux ensembles générateurs. Alors G avec la métrique de longueur de mots sur S est quasi-isométrique à G avec la métrique de longueur de mots sur S'.*

La notion de quasi-isométrie de groupes est alors bien définie pour les groupes de type fini. Il est généralement difficile de savoir s'il existe une quasi-isométrie sauf si on peut en exhiber une. De même, à part dans les cas simples, la non-existence est elle aussi très difficile à démontrer. Les propriétés préservées par quasi-isométrie sont considérées comme des propriétés géométriques. La moyennabilité en fait partie. On peut démontrer cela en utilisant la condition de Følner. Par contre, on ne sait pas si deux groupes, l'un avec un sous-groupe libre et l'autre sans, peuvent être quasi-isométriques. Le type de comportement asymptotique (comme défini dans la dernière section 4) est aussi préservé par quasi-isométries, ainsi que le type de croissance. Par contre, une autre question ouverte est de savoir si deux groupes, l'un de torsion et l'autre non, peuvent être quasi-isométriques.

6 Propriétés reliées

6.1 Bord de Poisson

Considérons un groupe G dénombrable, avec une mesure de probabilité μ. On s'intéresse aux marches aléatoires dont le pas est la multiplication (à droite) par des éléments du groupe. Autrement dit, si on se trouve sur g en un temps donné, la probabilité de se retrouver en h au prochain pas est $\mu(h^{-1}g)$. Pour une distribution initiale p_0, on définit sur G^{k+1} une mesure $\mu^{*k}p_0(g_0,\dots,g_k) = p_0(g_0)\prod_{i=1}^{k}\mu(g_i g_{i-1}^{-1})$. Elle donne la probabilité d'avoir suivi une trajectoire précise. À la limite elle donne la **mesure de Markov** sur $G^{\mathbb{Z}_+}$. Ici on s'intéresse au mesure de Markov $P_\#$ qu'on obtient si on prend la mesure de comptage comme distribution initiale. Elle est invariante par le décalage sur le temps T et on définit alors

Définition 6.1.1. *Le bord de Poisson de (G,μ) est l'espace des composantes ergodiques de $(G^{\mathbb{Z}_+}, P_\#)$ par rapport à T.*

Pour voir une autre définition on peut partir d'une équivalence sur les trajectoires infinies. On dit que $(g_0, g_1, \dots)$ et $(h_0, h_1, \dots)$ sont équivalentes s'il existe i et j tels que pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on ait $g_{i+k} = h_{j+k}$. Autrement dit, si elles sont égales à partir d'un certain rang à un décalage près. En prenant l'enveloppe mesurable (qui permet de passer à un quotient avec une mesure - voir par exemple [13] pour détails) on obtient une définition équivalente qui représente le bord de Poisson comme un espace de probabilité.

Un grand intérêt de cela est la formule de Poisson. On dit qu'une fonction f est μ-harmonique si pour tout $h \in G$

$$f(h) = \sum_{g\in G} \mu(g) f(g^{-1}h).$$

La formule de Poisson donne une isomorphisme entre l'espace $H^\infty(G,\mu)$ des fonctions bornées μ-harmoniques et L^∞ du bord de Poisson ∂_μ. Formellement, elle s'écrit $f(g) = \langle F, g\nu\rangle$ où ν est la mesure harmonique pour la distribution initiale δ_e. En particulier, on s'intéresse au cas où le bord de Poisson est trivial (réduit à un point). On aurait alors que les seules fonctions harmoniques sur le groupe engendré par $supp(\mu)$ sont les constantes. On définit :

Définition 6.1.2. *Une paire (G,μ) est **liouville** si le bord de Poisson ∂_μ associé est trivial.*

Il y a plusieurs exemples de groupes qui admettent des marches liouvilles et des marches non-liouvilles (voir [7],[13]). Le premier exemple de quasi-isométrie entre des marches liouvilles et non-liouvilles dans le contexte plus général de graphes vient de Terry Lyons [18]. Par contre, on ne sait pas encore si être liouville est stable quand on se restreint aux μ symétriques de support fini qui engendrent G. Si toute telle mesure est liouville, on dit que le groupe est liouville. Ici, on considère les mesures μ symétriques qui engendrent G, mais pas nécessairement de support fini. On peut démontrer qu'il existe un tel μ avec (G, μ) liouville si et seulement si le groupe est moyennable. Dans un sens, on a en plus un résultat constructif - on construit une moyenne invariante comme la limite asymptotique des moyennes de Cesaro des convolutions de μ.

Voyons un exemple dans lequel on s'intéresse au bord de Poisson :

6.2 Le groupe de Thompson

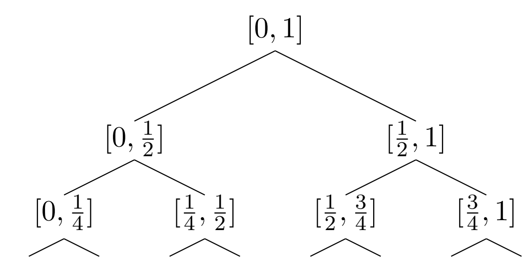
Il s'agit d'un groupe très fondamental qui a des applications [11] en théorie des nœuds et en théorie des représentations. On peut trouver des descriptions de ses propriétés dans l'article de Cannon, Floyd et Parry [5] ou dans la thèse de James Belk [3]. Un façon naturelle de le définir est comme le groupe des homéomorphismes linéaires par morceaux de $[0, 1]$ qui préservent l'orientation, avec un nombre fini de morceaux dont les extrémités sont dyadiques et les pentes sont des puissances de 2. Il est de type fini et les générateurs canoniques A et B sont :

$$A(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ 2t - 1 & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

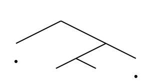
et

$$B(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ t - \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \leq t \leq \frac{7}{8} \\ 2t - 1 & \frac{7}{8} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

L'autre représentation canonique est donnée par des paires d'arbres. Les intervalles dyadiques standards s'insèrent dans une arbre naturellement :



ce qui permet de coder chaque sous-division de l'intervalle sur un sous-arbre. Par exemple, si les extrémités de nos intervalles sont $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ et $\frac{3}{4}$ on obtient :



En codant la division en intervalles de la fonction, ainsi que la division en intervalles sur laquelle cette division est envoyée, comme les fonctions sont linéaires par morceaux, cela code toute l'information. On peut montrer que cela donne une isomorphisme entre le groupe de Thompson F et des paires d'arbres binaires vérifiant certaines conditions.

Une question ouverte célèbre est de savoir si le groupe de Thompson est moyennable. Un résultat partiel est que chaque marche simple donne un bord de Poisson non-trivial, d'où le groupe n'est pas liouville avec la définition ci-dessus. Ce résultat a été démontré par Pavlo Mischenko [21] puis renforcé par Vadim Kaimanovhich [14]. On va donner les idées de la preuve de Kaimanovich. Il considère une autre représentation du groupe, et pour arriver au résultat, il explicite un quotient du bord pour la marche simple sur les deux générateurs canoniques. Il voit le groupe comme un sous-groupe du groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ linéaires par morceaux, en utilisant un changement de coordonnées $\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ introduit par Brin et Squier [4] :

$$\tau(\frac{1}{2^n}) = n+1, \quad n \leq -1$$

$$\tau(1 - \frac{1}{2^n}) = n-1, \quad n \geq 1.$$

Les fonctions dans l'image ont aussi des fins de morceaux dyadiques et des pentes qui sont des puissances de 2. Kaimanovich associe à chaque élément g une **configuration** C_g, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{Z}$ avec la formule :

$$C_g(\gamma) = \log_2 g'(\gamma + 0) - \log_2 g'(\gamma - 0).$$

Avec la formule de dérivation de fonctions composées il obtient une règle de composition similaire au produit dans le produit en couronne. Après, il démontre que la marche aléatoire induite sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ est transiente et utilise cela pour obtenir que la configuration associée se stabilise pour une marche simple sur le groupe. On obtient un espace de configurations limites, et la comptabilité avec le produit du groupe montre que c'est un quotient du bord de Poisson. Finalement, il démontre qu'il est impossible que toutes les marches sur cette mesure convergent vers la même configuration.

6.3 Propriété de Kazhdan

Dans cette section, les groupes ne sont plus nécessairement discrets, mais simplement supposés localement compacts. La propriété (T) est introduite par Kazhdan en 1967 [16]. Une de ces applications initiales est de démontrer qu'une certaines grande classe de réseaux ne contient que des réseaux de type fini. Un réseau Γ sur un groupe localement compact G est un sous-groupe discret tel que Γ/G ait une mesure de probabilité invariante par G. Maintenant on connaît d'autres applications, par exemple en théorie des graphes [19] et en théorie ergodique [27]. Considérons une espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et son groupe unitaire $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. C'est le groupe d'opérateurs linéaires inversibles bornés $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tels que pour tout ξ, η on ait

$$\langle U\xi, U\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Une **représentation unitaire** de G dans $\mathcal{H}$ est un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ fortement continu, c'est-à-dire tel que $g \to \pi(g).\xi$ est continu pour chaque ξ. C'est une condition vide dans le cas d'un groupe discret.

Définition 6.3.1. *Soit $(\pi, \mathcal{H})$ une représentation unitaire d'un groupe topologique G.*

- *Pour un sous-ensemble $Q \subset G$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$, un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ est (Q, ε)-invariante si :*

$$\sup_{x \in Q} \|\pi(x).\xi - \xi\| < \varepsilon \|\xi\|.$$

- *La représentation admet un vecteur invariant non-nul s'il existe un $\xi \neq 0$ tel que $\pi(g).\xi = \xi$ pour tout $g \in G$.*

Notons que si un vecteur est (Q,ε)-invariant, alors il est $((Q \cup Q^{-1})^n, \varepsilon/n)$-invariant pour tout n. De plus, si $Q' \subset Q$, il est (Q', ε)-invariante. On aura donc le droit de fixer Q comme un ensemble générateur dans le cas d'un groupe discret, ou plus généralement dans le cas compactement engendré.

Définition 6.3.2. *Soit G un groupe topologique. On dit qu'un ensemble $Q \subset G$ est de Kazhdan s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute représentation qui admet un vecteur (Q,ε)-invariante admet aussi un vecteur invariant non-nul. Si le groupe contient un ensemble de Kazhdan compact, on dit que le groupe admet le propriété (T) de Kazhdan.*

On peut démontrer que chaque groupe G admet $(G, \sqrt{2})$ comme paire de Kazhdan. Tout les groupes compacts, en particulier les groupes finis, vérifient donc la propriété (T). Considérons alors un groupe G localement compact qui n'est pas compact. Dans théorème 2.1.3 on a vu des définitions équivalentes pour les groupes discrets, mais en fait la condition de Reiter reste vraie pour les groupes localement compacts. Si G est moyennable, pour la représentation régulière à gauche $\pi(g)(f)(h) = f(g^{-1}h)$ sur $Prob(G)$, cela donne des vecteurs invariants pour toute paire (Q,ε). Mais cette représentation n'a clairement pas de vecteur invariant. La propriété (T) de Kazhdan est alors plus forte que la non-moyennabilité.

Elle est strictement plus forte - il y a plein d'exemples justifiant cela. On peut démontrer qu'elle passe au quotient. En prenant par exemple un groupe libre non-abélien, il n'a donc pas la propriété (T) de Kazhdan car il a plein de quotients qui ne l'ont pas (par exemple $\mathbb{Z}^2$). Ces propriétés donnaient une idée [28] d'approche sur l'existence de groupes infinis moyennables de torsion bornée. Puisque chaque tel groupe est un quotient d'un groupe de Burnside, si on démontre le propriété (T) pour tous les groupes de Burnside, cela donnerait une réponse négative. Mais en 2016 Osajda [25] démontre que $B(m, kn)$ n'a pas la propriété (T) de Kazhdan pour tout $k > 0$ et m, n tels que $B(m,n)$ est infini. Il reste une question ouverte consistant à démontrer que $B(m,p)$ ne la vérifie pas pour p premier (et grand).

Dans l'autre direction, un résultat classique est que pour un corps local K, c'est-à-dire un corps non-discret localement compact (par exemple $\mathbb{R}$), $SL_n(K)$ et $Sp_{2n}(K)$ ont la propriété (T) pour tout n.

Références

[1] S I Adyan. Random walks in free periodic groups. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 21(3) :425, 1983.

[2] St Banach and A Tarski. Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes. *Fundamenta Mathematicae*, 6 :244–277, 1924.

[3] James Belk. Thompson's Group F. 2007. thèse.

[4] Matthew G. Brin and Craig C. Squier. Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line. *Inventiones mathematicae*, 79 :485–498, 1985.

[5] Jw Cannon, Wj Floyd, and Wr Parry. Notes on Richard Thompson's groups F and T. *L'Enseignement Mathematique*, pages 1–18, 1994.

[6] Pierre de la Harpe. *Topics in Geometric Group Theory*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 2000.

[7] Anna Erschler. Boundary behavior for groups of subexponential growth. *Annals of Mathematics*, 160(3) :1183–1210, 2004.

[8] R. I. Grigorchuk. Bernside's problem on periodic groups. *Functional Analysis and Its Applications*, 14(1) :41–43, jan 1980.

[9] Mikhail Gromov. *Hyperbolic Groups*, pages 75–263. Springer New York, New York, NY, 1987.

[10] Nigel Higson and Gennadi Kasparov. Operator \$K\$-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. 3(97) :131–142, 1997.

[11] Vaughan Jones. Some unitary representations of Thompson's groups \$F\$ and \$T\$. *Journal of Combinatorial Algebra*, 1(1) :1–44, 2017.

[12] Kate Juschenko. Amenability of discrete groups by examples. Current version available at `http://www.math.northwestern.edu/~juschenk/book.html`., 2015.

[13] V A Kaimanovich and A M Vershik. Random Walks on Discrete Groups : Boundary and Entropy. *The Annals of Probability*, 11(3) :457–490, 1983.

[14] Vadim A. Kaimanovich. Thompson's group \$F\$ is not Liouville. pages 1–34, 2016.

[15] A. Karrass and D. Solitar. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation. *Journal canadien de mathématiques*, 23(4) :627–643, 1971.

[16] D. A. Kazhdan. Connection of the dual space of a group with the structure of its close subgroups. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1(1) :71—-74, 1967.

[17] Harry Kesten. Full Banach mean values on countable groups, 1959.

[18] Terry Lyons. Instability of the Liouville property for quasi-isometric Riemannian manifolds and reversible Markov chains. *J. Differential Geom.*, 26(1) :33–66, 1987.

[19] G. A. Margulis. Explicit Constructions of Concentrators. *Probl. Peredachi Inf.*, 9(4) :71—-80, 1973.

[20] John McCarthy. A "tits-alternative" for subgroups of surface mapping class groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291(2) :583–612, 1985.

[21] Pavlo Mishchenko. Boundary of the action of Thompson group F on dyadic numbers. pages 1–9, 2015.

[22] P S Novikov and S I Adyan. On infinite periodic groups. I, II, III. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32 :212–244, 251–524, 709–731, 1968.

[23] A Yu Ol'shanskii. An infinite group with subgroups of prime orders. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(2) :309–321, 1980.

[24] A Yu Ol'shanskii. On the question of the existence of an invariant mean on a group. *Russian Mathematical Surveys*, 35(4) :180, 1980.

[25] Damian Osajda. Group cubization, may 2016. http ://arxiv.org/abs/1605.06915.

[26] Walter Parry. A sharper tits alternative for 3-manifold groups. *Israel Journal of Mathematics*, 77(3) :265–271, 1992.

[27] Klaus Schmidt. Amenability, Kazhdan's property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1(2) :223–236, 1981.

[28] Yehuda Shalom. The algebraization of Kazhdan's property (T). *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, (March) :1283–1310, 2007.

[29] A Tarski. Algebraische Fassung des Massproblems. *Fundamenta Mathematicae*, 31 :47 – 66, 1938.

[30] J. Tits. Free subgroups in linear groups. *Journal of Algebra*, 20(2) :250–270, 1972.

[31] S Wagon. *The Banach-Tarski Paradox*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[32] W Woess. *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2000.