

# INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE : THÉORIE CONFORME DES CHAMPS DE LIOUVILLE PAR L'APPROCHE PROBABILISTE

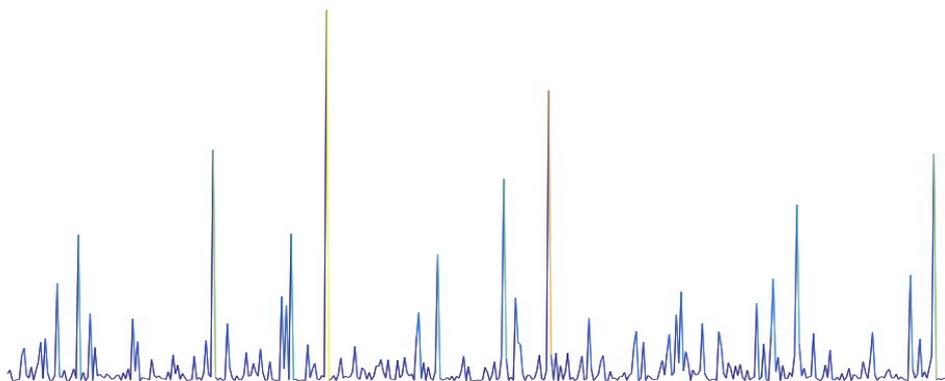
Tunan ZHU

sous la direction de Vincent VARGAS

12 octobre 2017

## Résumé

En 1853, le mathématicien français, Joseph Liouville, a initié l'étude des équations de Liouville [13] pour résoudre le problème d'uniformisation des surfaces de Riemann. Un siècle plus tard et dans les années 80s, Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [2] et parmi d'autres ont introduit la théorie conforme des champs (CFT). Leur méthode, nommée "Conformal Bootstrap", a eu beaucoup de succès en résolvant la CFT. L'étude de Liouville est ainsi ramenée dans ce cadre et a reçu son nom du LCFT. Très récemment, une construction mathématique du LCFT a été introduite par David-Kupianien-Rhodes-Vargas [6], et certains résultats de l'approche "conformal bootstrap" sont prouvés. L'intérêt de cette construction est non seulement de fournir des modèles pour la théorie (qui est aussi montré unique en physique en supposant certaines hypothèses), mais aussi de donner des expressions exactes du modèle. Cette exactitude permet de donner des formules sur les outils mathématiques en jeu. Dans ce texte, on présente cette construction avec les propriétés intéressantes associées, et on verra quelques applications.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Intégrale des chemins . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Outils de probabilité</b>	<b>4</b>
2.1	Champ libre gaussien (GFF) . . . . .	4
2.2	Chaos multiplicative gaussien (GMC) . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Théorie conforme des champs de Liouville</b>	<b>8</b>
3.1	Sur la construction . . . . .	8
3.2	Formule de DOZZ . . . . .	9
3.3	Intégrabilité du GMC sur le cercle . . . . .	10

## 1 Introduction

### 1.1 Motivation

Avant d'être compris comme une théorie conforme des champs, la théorie conforme des champs de Liouville (LCFT) réside dans la gravité quantique deux dimensionnelle, basé sur l'action d'Einstein-Hilbert. Cette théorie connut un vif succès car l'action d'Einstein-Hilbert en 2d se simplifie considérablement par rapport aux modèles de dimension supérieure tout en restant assez riche pour présenter des phénomènes comparables. Plus récemment, des conjectures portant sur les liens entre la gravité de Liouville et la théories de jauges supersymétriques en 4 dimension, ainsi que son rôle prépondérant dans l'étude de la théorie des cordes 2 dimension ont fait connaître à cette théorie un vif regain d'intérêt parmi la communauté des physiciens.

L'intérêt de la communauté mathématique pour cette théorie est plus récent et s'est initialement manifesté au travers de l'étude de la limite d'échelle des cartes planaires aléatoires. Celui-ci fournit une approche discrétisée de la théorie de Liouville. Très récemment, les mathématiciens ont abordé cette géométrie aléatoire dans le continu, via la théorie quantique des champs de Liouville. Cette théorie régit la loi de probabilité d'une fonction aléatoire  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur une variété riemannienne  $(M, \hat{g})$  de dimension 2. Cette fonction aléatoire sert à définir une métrique aléatoire

$$g = e^\phi \hat{g} \tag{1.1}$$

formellement conformément équivalente à la métrique  $\hat{g}$ . De façon heuristique, la loi de probabilité du champ  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par une intégrale fonctionnelle du type

$$e^{-\beta S_L(\phi, \hat{g})} \mathcal{D}\phi \tag{1.2}$$

où  $\mathcal{D}\phi$  représente la mesure uniforme sur les fonctions  $M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta$  représente une constante de couplage (dépendant du champ de matière couplé à la gravité) et le potentiel  $S$ , appelé action de Liouville, est donné par

$$S_L(\phi, \hat{g}) := \int_{\mathbb{C}} \left( \frac{1}{2} |\nabla_{\hat{g}} \phi|^2 + R_{\hat{g}} \phi + \mu e^\phi \right) \lambda_{\hat{g}} \tag{1.3}$$

où  $\nabla_{\hat{g}}$ ,  $R_{\hat{g}}$ ,  $d\lambda_{\hat{g}}$  sont respectivement le gradient, la courbure de Ricci et la forme volume sur la variété riemannienne  $(M, \hat{g})$ . Le dernier terme de l'action est un terme d'interaction, avec  $\mu > 0$  l'analogie de la constante cosmologique de la gravité deux-dimensionnelle.

La déduction de cette action peut être retrouvée dans la littérature physique [7]. Pour illustrer le lien entre la géométrie aléatoire et l'action de Liouville, on mène un calcul variationnel pour chercher le minima du  $S_L(\phi, \hat{g})$  :

$$0 = S_L(\phi + \delta\phi, \hat{g}) - S_L(\phi, \hat{g}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} \delta\phi(-\Delta_{\hat{g}}\phi + R_g + \mu e^{\phi})\lambda_{\hat{g}}.$$

Ce calcul donne l'équation de Liouville

$$\Delta_{\hat{g}}\phi - R_{\hat{g}} = \mu e^{\phi}. \quad (1.4)$$

Si on considère la métrique  $g = e^{\phi}\hat{g}$ , et on utilise la formule connue en géométrie  $R_{\hat{g}} = e^{-\phi}(R_g - \Delta_g\phi)$ , on obtient une métrique à courbure de Ricci constante  $R_g = -\mu$ . Ce lien très fort entre la théorie quantique de Liouville et le théorème d'uniformisation des surfaces justifie l'importance de pouvoir construire la théorie quantique de Liouville sur toutes les structures conformes, chacune possédant ses propres caractéristiques géométriques, algébriques et probabilistes. Les lecteurs intéressés pourront lire la revue de Nakayama [14] pour découvrir les richesses de la théorie de Liouville.

## 1.2 Intégrale des chemins

Dans ce texte, on va s'intéresser au cas de la sphère Riemannienne  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  munie d'une métrique  $g$ . Dans le LCFT, l'action de Liouville a une forme légèrement différente que celle d'avant :

$$S(\phi, g) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\nabla_g\phi|^2 + QR_g\phi + 4\pi\mu e^{\gamma\phi})\lambda_g \quad (1.5)$$

où  $Q = \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}$  est un paramètre réel avec  $0 < \gamma < 2$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à l'expression de  $S_L$ . Le CFT est en fait caractérisé par un paramètre  $c_L \in \mathbb{R}$  appelé la charge centrale, qui donne la façon que la théorie comporte en face des changements du métrique de fond  $g$  (section 3.2).  $c_L$  est relié à  $Q$  par  $c_L = 1 + 6Q^2$ , et dans le cas du LCFT,  $c_L$  peut prendre ses valeurs de façon continue dans  $[25, \infty[$ , ce qui fait LCFT un cas riche et intéressant du CFT.

Pour définir le LCFT, on devra comprendre la chose suivante

$$\mathbb{E}[F(\phi)] := Z^{-1} \int F(\phi) e^{-S(\phi, g)} \mathcal{D}\phi \quad (1.6)$$

où  $Z$  est une constante de normalisation. Pour commencer, on donne une interprétation du mouvement brownien en intégrale des chemins : soit  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\sigma(0) = 0$  et  $(B(t))_{t \geq 0}$  un mouvement brownien, alors

$$\mathbb{E}[F((B(t))_{t \geq 0})] = Z^{-1} \int F((\sigma(t))_{t \geq 0}) e^{-\int \frac{\sigma'(t)^2}{2} dt} \mathcal{D}\sigma. \quad (1.7)$$

Ce formalisme se voit à partir d'une discrétisation : prenons le cas sur  $[0, 1]$ ,  $\sigma = (\sigma_{1/n}, \dots, \sigma_1)$ ,  $\sigma_0 = 0$ . La partie droite de l'équation vaut

$$\int F(\sigma) e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(\sigma_{i/n} - \sigma_{(i-1)/n})^2}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{d\sigma_i}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.8)$$

Cette intégrale donne une approximation discrétisée du mouvement brownien. Dans le LCFT, on peut interpréter de façon similaire le terme  $e^{-\frac{1}{4\pi} \int_C |\nabla_g \phi|^2} \mathcal{D}\phi$ , par un objet bien connu des probabilistes appelé le champ libre gaussien (GFF). Le GFF est une fonction aléatoire plutôt irrégulière, à tel point qu'elle n'existe pas en tant que fonction à proprement parler mais plutôt au sens des distributions. Par conséquent la forme volume  $e^{\gamma\phi} \lambda_g$  n'existe pas non plus au sens des mesures normales. La définition de cette mesure aléatoire requiert la théorie du chaos multiplicatif gaussien (GMC) introduite par Kahane [10] en 1985. C'est une mesure singulière par rapport à la forme volume standard  $\lambda_g$ , dont les propriétés multifractales ont été l'objet d'une littérature abondante.

## 2 Outils de probabilité

### 2.1 Champ libre gaussien (GFF)

Le GFF est un objet relativement facile à comprendre : c'est une variable aléatoire gaussienne à valeurs dans un espace fonctionnel, donc de dimension infinie. Pour comprendre sa définition mathématique, on peut mener quelques heuristiques à partir de l'interprétation du terme  $e^{-\frac{1}{4\pi} \int_D |\nabla \phi|^2} \mathcal{D}\phi$ , pour un  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  compact. La définition formelle de la mesure  $\mathcal{D}\phi$  s'interprète de façon similaire à l'équation 1.8 : soit  $(e_n)_n$  une base orthonormée de  $L^2(D)$  formée de fonctions propres du Laplacien  $\Delta$  sur  $D$  avec conditions au bord du Dirichlet et valeurs propres associées strictement négatives  $(-\lambda_n)_n$ , i.e.

$$\Delta e_n = -\lambda_n e_n \quad \text{et} \quad e_n = 0 \text{ sur } \partial D. \quad (2.1)$$

On décompose  $\phi$  en  $\phi = \sum_n \phi_n e_n$ ,  $\mathcal{D}\phi$  s'interprète comme le produit des mesure de Lebesgue sur chaque composante  $\prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}$ . La mesure devient

$$\exp\left(-\frac{1}{4\pi} \sum_n \lambda_n |\phi_n|^2\right) \prod_n \frac{d\phi_n}{2\pi}. \quad (2.2)$$

La masse de cette mesure vaut formellement  $(\prod_n \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = (\det(-\Delta))^{-\frac{1}{2}}$ . Ce produit diverge grossièrement mais une continuation analytique pour la fonction  $\zeta(s) := \sum_n \lambda_n^{-s}$  peut en donner un sens. En divisant la mesure par cette masse, on trouve une description de la loi du GFF en tant que série aléatoire

$$X = \sqrt{2\pi} \sum_n \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} e_n \quad (2.3)$$

où  $\alpha_n$  sont des variables gaussiennes centrées réduites i.i.d. Sa fonction de covariance s'écrit

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)] = 2\pi \sum_n \frac{e_n(x)e_n(y)}{\lambda_n} = 2\pi G(x, y) \quad (2.4)$$

où  $G(x, y)$  est la fonction de Green définie comme solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta G(\cdot, y) = -2\pi\delta(\cdot - y) \\ G(\cdot, y) = 0 \text{ sur } \partial D \end{cases} \quad (2.5)$$

Cette covariance  $G$  peut être vue comme  $(-\frac{1}{2\pi}\Delta)^{-1}$  et ceci peut être vu dans l'expression de la mesure

$$e^{-\frac{1}{4\pi} \int_D |\nabla_g \phi|^2} \mathcal{D}\phi = e^{-\frac{1}{2} \int_D (-\frac{1}{2\pi}\Delta)\phi\phi} \mathcal{D}\phi$$

. Le cas  $d = 1$  correspond au pont brownien. Or pour  $d \geq 2$ , la série 2.3 ne converge pas par la loi de Weyl [20], qui donne l'asymptotique des  $\lambda_n$  :

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi^2 n^{2/d}}{(\omega_d |D|)^{2/d}} \quad (2.6)$$

où  $\omega_d$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^d$ , et  $|D|$  est le volume de  $D$ . Le GFF est donc trop irrégulier pour exister en tant qu'une véritable fonction aléatoire. On va plutôt prendre une base orthonormée  $(f_n)$  de  $H_0^1(D)$ , avec  $H_0^1(D)$  l'espace de Sobolev défini comme le complété de  $C^\infty(D)$  par le produit scalaire de Dirichlet :

$$(f, g)_\nabla := \frac{1}{2\pi} \int_D \nabla f \cdot \nabla g. \quad (2.7)$$

On définit

$$\phi = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2.8)$$

avec  $\alpha_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d. Soit  $f \in H_0^1(D)$ , et  $X_N = \sum_{n=1}^N \alpha_n f_n$ , alors la série

$$(X_N, f) = \sum_{n=1}^N \alpha_n (f_n, f)_\nabla \quad (2.9)$$

converge dans  $L^2(\mathbb{P})$  et *p.s.* par le théorème de convergence des martingales. Sa limite est une variable gaussienne de variance  $\sum_n (f_n, f)_\nabla^2 = \|f\|_\nabla^2$  par Parseval. Posons

$$\mathcal{M} = \{\rho \text{ mesure signée à support dans } D : \int_{D^2} \rho(x)\rho(y)G(x, y) < \infty\}. \quad (2.10)$$

Ceci donne une façon concrète de définir  $(X, \rho)$  pour  $\rho \in \mathcal{M}$  :

$$(X, \rho) = (X, G\rho)_\nabla. \quad (2.11)$$

Ainsi, le GFF peut aussi être considéré comme un processus gaussien indexé par  $\mathcal{M}$  de covariance

$$\mathbb{E}[X(\rho_1)X(\rho_2)] = \int_{D^2} G(x, y)\rho_1(dx)\rho_2(dy). \quad (2.12)$$

Une simulation du GFF discrète est donnée dans la Figure 1. On note que la dimension 2 joue un rôle particulier dû à l'invariance conforme du produit scalaire de Dirichlet, qui se transmet au GFF : si  $\psi$  est un biholomorphisme de  $D$  sur  $D'$ , alors on a l'égalité en loi  $X_D = X_{D'} \circ \psi$ , où  $X_D$  et  $X_{D'}$  sont respectivement le GFF sur  $D$  et  $D'$ . Le GFF qu'on utilise dans le LCFT n'est pas exactement celui qu'on introduit ici (GFF avec bord), on emploie plutôt le GFF sans bord (whole plane GFF). La différence est qu'on demande  $\int_D X = 0$  au lieu d'imposer  $X = 0$  sur  $\partial D$ . Pour plus de cultures sur le GFF, les lecteurs pourront lire une lecture introductive de Rhodes [16] ou la lecture sur GFF et GMC de Berestycki [4].

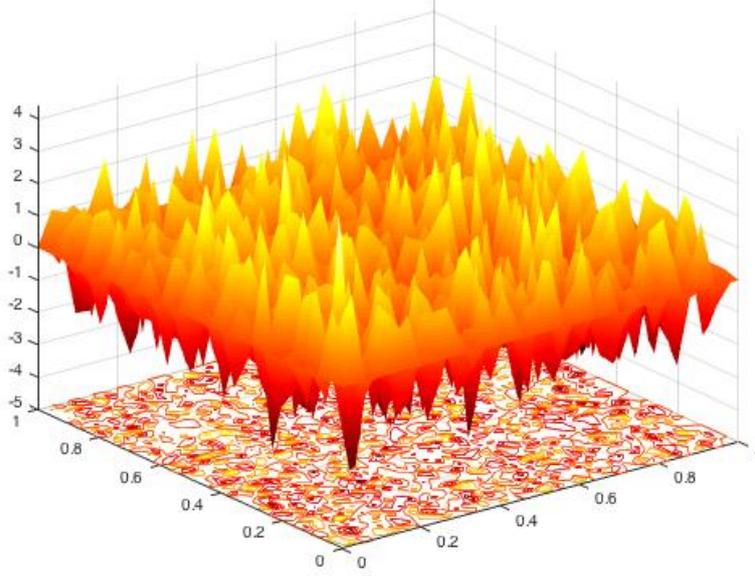


FIGURE 1 – GFF sur  $[0, 1]^2$

## 2.2 Chaos multiplicative gaussien (GMC)

Le chaos multiplicatif gaussien (GMC) permet de comprendre les mesures aléatoires sous la forme  $e^{\gamma X(x)}\sigma(dx)$ , avec  $\sigma(dx)$  une mesure de Radon sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $X$  un champ gaussien log-corrélé (qui peut être une distribution aléatoire), i.e.

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)] = \ln_+ \frac{1}{|x - y|} + g(x, y) \quad (2.13)$$

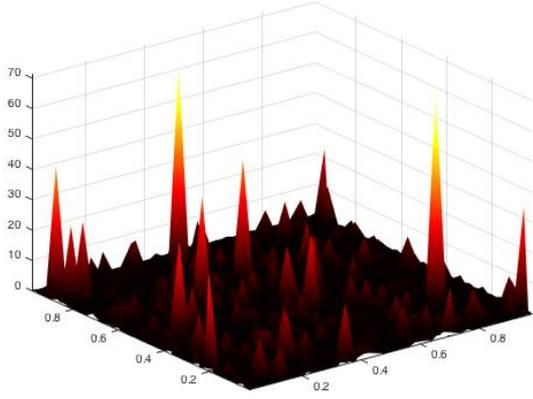
où  $\ln_+(x) := \max(\ln x, 0)$ . Notons que lorsque  $X$  est un GFF, sa fonction de covariance est bien sous cette forme. L'idée est de poser des régularisations  $\theta_\epsilon = \frac{1}{2^d}\theta(\frac{\cdot}{\epsilon})$ , et de considérer  $X_\epsilon = X * \theta_\epsilon$ . Le but est de prouver la convergence de la famille des mesures lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$M_{\epsilon, \gamma}(dx) := e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_\epsilon^2(x)]}\sigma(dx). \quad (2.14)$$

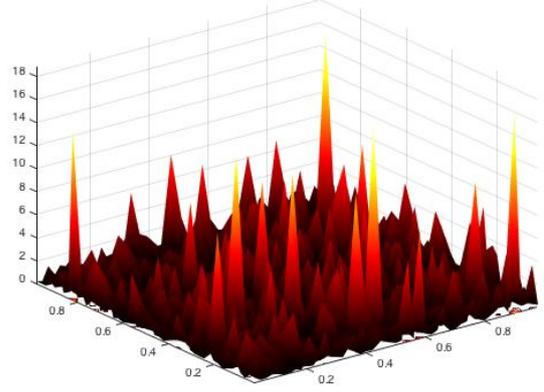
Prenons un cas très simple. Soit  $A$  un compact, alors  $(M_{\epsilon, \gamma}(A))_{\epsilon > 0}$  est une martingale, et converge p.s. vers une limite. De plus,  $\mathbb{E}[M_{\epsilon, \gamma}(A)] = |A|$ , ce qui explique l'intérêt d'ajouter le terme de normalisation  $\frac{\gamma^2}{2}\mathbb{E}[X_\epsilon^2(x)]$  dans l'exponentiel. Le théorème suivant donne la convergence et unicité de la limite quelque soit la fonction de régularisation choisie, sous des hypothèses appropriés. Une preuve simple de ce théorème est écrit par Berestycki dans [5].

**Théorème 1.**  *$M_{\epsilon, \gamma}$  converge en probabilité dans l'espace des mesure de Radon, vers une mesure aléatoire  $M_\gamma$ . La limite ne dépend pas de  $\theta$  choisie. Si  $\sigma(dx) = f(x)dx$  pour une fonction  $f > 0$ , alors la mesure  $M_\gamma$  est non nul si et seulement si  $\gamma < \sqrt{2d}$ .*

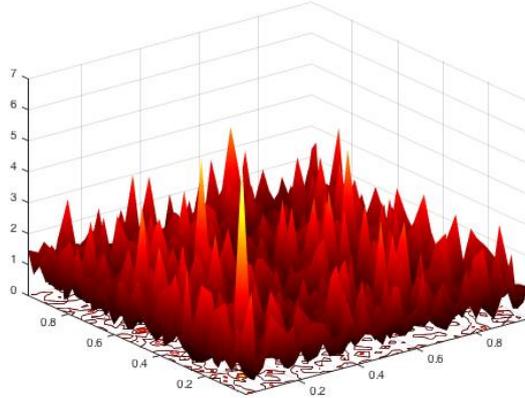
Dans la Figure 2 on donne un tracé de GMC deux dimensionnelle selon des valeurs différentes de  $\gamma$ . On peut observer que lorsque  $\gamma$  se rapproche de 2, la mesure devient de plus en plus irrégulière.



(a)  $\gamma = 1.8$



(b)  $\gamma = 1$



(c)  $\gamma = 0.5$

FIGURE 2 – GMC sur  $[0, 1]^2$

**Théorème 2.** Soient  $\gamma < \sqrt{2d}$ ,  $\sigma(dx) = f(x)dx$  avec  $f$  continue bornée, et  $M_\gamma$  le GMC associé. Alors pour  $p \in ]0, \frac{2d}{\gamma^2}[$  et  $A$  un élément borné de  $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ , ou pour  $p \in ]-\infty, 0[$  et  $A$  une boule bornée, on a

$$\mathbb{E}[M_\gamma(A))^p] < \infty \quad (2.15)$$

et on a la convergence

$$\mathbb{E}[M_{\gamma,\epsilon}(A))^p] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[M_\gamma(A))^p] \quad (2.16)$$

De plus, pour  $p \in ]-\infty, \frac{2d}{\gamma^2}[$  et tout  $x$ , il existe une constante  $C_{x,p}$  (qui dépend aussi de  $f$  et la forme exacte de la covariance de  $X$ ) telle que

$$\mathbb{E}[M_\gamma(B(x,r))^p] \underset{r \rightarrow 0}{\sim} C_{x,p} r^{(d+\gamma^2/2)p - \gamma^2 p^2 / 2} \quad (2.17)$$

Dans le théorème précédent, l'exposant quadratique  $(d + \gamma^2/2)p - \gamma^2 p^2 / 2$  décrit en quelque sorte le comportement multifractal du GMC. Les lecteurs pourront lire la revue de Rhodes-Vargas [17] pour d'autres propriétés du GMC et ses applications en turbulence, finance, etc. Finalement, pour définir LCFT, on a besoin de la proposition suivante :

**Proposition 1.** Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $x \in D$ , alors

$$\int_{B(x,1)} \frac{1}{|y-x|^{\alpha\gamma}} M_\gamma(dy) < \infty \quad p.s. \quad (2.18)$$

si et seulement si  $\alpha < \frac{d}{\gamma} + \frac{\gamma}{2}$ .

### 3 Théorie conforme des champs de Liouville

#### 3.1 Sur la construction

Dans cette section, on se place sur la sphère Riemannienne  $(\hat{\mathbb{C}}, g)$ . La construction consiste à comprendre l'objet suivant :

$$\langle F \prod_{i=1}^N V_{\alpha_i}(z_i) \rangle_g := Z_g^{-1} \int F(\phi) \prod_{i=1}^N e^{\alpha_i \phi(z_i)} e^{-S(\phi, g)} \mathcal{D}\phi \quad (3.1)$$

où on rappelle que

$$S(\phi, g) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\nabla_g \phi|^2 + QR_g \phi + 4\pi\mu e^{\gamma\phi}) \lambda_g \quad (3.2)$$

et  $V_{\alpha_i}(z_i) := e^{\alpha_i \phi(z_i)}$  est appelé opérateur vertex. Lorsque  $F = 1$ ,  $\langle \prod_{i=1}^N V_{\alpha_i}(z_i) \rangle$  donne la fonction de corrélation en physique. Un des buts principaux du LCFT est de caractériser ces fonctions de corrélation. Pour comprendre mieux la raison d'ajouter ces opérateurs vertex, on pourra faire des calculs avec un modèle jouet : on remplace  $\phi$  par  $c$  et  $\mathcal{D}\phi$  par  $dc$ . Par le théorème de Gauss-Bonnet :

$$\int_M R_g \lambda_g = 8(\pi - \text{genre de la surface}). \quad (3.3)$$

Ainsi les fonctions de corrélation dans le cas du modèle jouet devient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(\sum_i \alpha_i - 2Q)c - \mu e^{\gamma c}} dc. \quad (3.4)$$

Cette intégrale converge si et seulement si  $\sum_i \alpha_i > 2Q$ , cette condition rentre dans la borne de Seiberg. En réalité, on définit  $\langle F \prod_{i=1}^N V_{\alpha_i}(z_i) \rangle_g$  par le théorème suivant :

**Théorème 3** ([6]). Pour une fonctions  $F$  continue bornée, et supposons les bornes de Seiberg [19] :

$$\forall i, \alpha_i < Q \text{ et } \sum_i \alpha_i > 2Q \quad (3.5)$$

alors  $\langle F \prod_i V_{\alpha_i}(z_i) \rangle_g$  s'exprime :

$$Z_g^{-1} e^{C(z)} \prod_i g(z_i)^{\Delta_{\alpha_i}} \mathbb{E}[F(c + X_g + \sum_i \alpha_i G_g(z_i, \cdot) + Q/2 \ln g) \exp(-\mu e^{\gamma c} Z_0(\mathbb{C}))] \quad (3.6)$$

où  $\Delta_{\alpha_i} = \frac{\alpha_i}{2}(Q - \frac{\alpha_i}{2})$  est appelé le poids conforme,  $\Gamma(a, b) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-bt} dt$  est la fonction Gamma, et

$$C(z) := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j G_g(z_i, z_j) + \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2} \sum_i \alpha_i^2 \quad (3.7)$$

$$Z_0(d^2 z) := e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_g(z_i, z)} M_\gamma(d^2 z) \quad (3.8)$$

*Remarque.* Les bornes de Seiberg impliquent en particulier que le nombre d'opérateurs vertex  $N$  doit dépasser 3 pour que les fonctions de corrélation soient non triviales. D'ailleurs, on peut facilement séparer la dépendance en  $\mu$  en notant que

$$\Gamma\left(\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}, \mu\right) = \mu^{\frac{2Q - \sum_l \alpha_l}{\gamma}} \Gamma\left(\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}\right) \quad (3.9)$$

Les deux théorèmes suivant donne le comportement du LCFT sous une reparamétrisation, et sous un changement de métrique de fond.

**Théorème 4** (Formule de KPZ). *Soit  $\psi$  une transformation de Möbius sur la sphère. On a*

$$\left\langle \prod_l V_{\alpha_l}(\psi(z_l)) \right\rangle_{\hat{g}} = \prod_l |\psi'(z_l)|^{-2\Delta_{\alpha_l}} \left\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle_{\hat{g}}. \quad (3.10)$$

**Théorème 5** (Anomalie de Weyl). *Pour une métrique  $g = e^\varphi \hat{g}$ ,*

$$\left\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle_g = \exp\left(\frac{c_L}{96\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\nabla_{\hat{g}} \varphi|^2 + 2R_{\hat{g}} \varphi) \lambda_{\hat{g}}\right) \left\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle_{\hat{g}} \quad (3.11)$$

où le  $c_L$  est la charge centrale définie par

$$c_L = 1 + 6Q^2. \quad (3.12)$$

Une lecture d'une vingtaine de pages écrite par Rhodes-Vincent [18] explique comment on applique le LCFT à des cartes aléatoires et à des modèles de physique statistique.

### 3.2 Formule de DOZZ

Si on insère un champ dégénéré, il est connu en physique que les fonctions de corrélation satisfont une équation différentielle appelée équation de BPZ [2].

**Théorème 6.** *En supposant les bornes de Seiberg satisfaites, on a les équations BPZ d'ordre  $(r, 1)$  :*

$$\mathcal{D}_r \left\langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle = 0 \quad (3.13)$$

pour  $r \in \{2, 3\}$  et  $0 < \gamma < 2$ . La forme exacte de l'opérateur  $\mathcal{D}_r$  est donnée par la formule de Benoît et Saint-Aubin [3]

$$\mathcal{D}_r = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \\ n_1 + \dots + n_k = r}} \frac{\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i)} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \quad (3.14)$$

où les  $L_{-n}$  sont donnés par

$$L_{-1} = \partial_z \quad (3.15)$$

$$L_{-n} = \sum_{l=1}^N \left( -\frac{1}{(z_l - z)^{n-1}} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l(n-1)}{(z_l - z)^n} \right) \quad n \geq 2. \quad (3.16)$$

Il existe une version duale de ces équations, qui sont les équations BPZ d'ordre  $(1, r)$  :

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \\ n_1 + \dots + n_k = r}} \frac{\left(\frac{4}{\gamma^2}\right)^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i)} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \left\langle V_{-\frac{2(r-1)}{\gamma}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle = 0. \quad (3.17)$$

La preuve pour ces équations de tout ordre  $r$  est encore un projet en cours. Le cas  $r = 2$  est particulièrement important et a été prouvé par Kupiainen-Rhodes-Vargas [11]. On donne la forme de l'équation BPZ d'ordre (2,1) :

$$\left( \frac{4}{\gamma^2} \partial_z^2 + \sum_{l=1}^N \left( -\frac{1}{(z_l - z)} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l}{(z_l - z)^2} \right) \right) \langle V_{-\frac{\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0. \quad (3.18)$$

L'étude de ces équations permet de tirer plein d'informations sur les fonctions de corrélation. Par exemple, l'étude des corrélations à 4 points donne la formule explicite des corrélations à 3 points, appelée la formule de DOZZ sous le nom de Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov [8], [21]. Ce résultat est récemment prouvé pour LCFT par Kupiainen-Rhodes-Vargas [12].

**Théorème 7 (DOZZ).** *On introduit la fonction spéciale  $\Upsilon$  définie sur  $0 < \text{Re}(z) < Q$  par la formule*

$$\ln \Upsilon(z) = \int_0^\infty \left( \left( \frac{Q}{2} - z \right)^2 e^{-t} - \frac{(\sinh((\frac{Q}{2} - z)\frac{t}{2}))^2}{\sinh(\frac{t\gamma}{4}) \sinh(\frac{t}{\gamma})} \right) \frac{dt}{t}. \quad (3.19)$$

La fonction  $\Upsilon$  peut être prolongée analytiquement sur  $\mathbb{C}$ . On note  $\bar{\alpha} = \sum_i \alpha_i$  et

$$l(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x) \quad (3.20)$$

La formule de DOZZ s'écrit

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left( \pi \mu l\left(\frac{\gamma^2}{4}\right) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2-\gamma^2/2} \right)^{\frac{2Q-\bar{\alpha}}{\gamma}} \frac{\Upsilon'(0) \Upsilon(\alpha_1) \Upsilon(\alpha_2) \Upsilon(\alpha_3)}{\Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2} - Q) \Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2} - \alpha_1) \Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2} - \alpha_2) \Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2} - \alpha_3)}. \quad (3.21)$$

La vérification de ce théorème fait une étape fondamentale dans le projet d'unifier deux mondes différents : LCFT constructive et l'approche de "conformal bootstrap". Il reste une autre étape à vérifier, connue sous le nom "operator product expansion". Ce dernier résultat permet de donner des relations entre les corrélations à  $N$  points et celles à  $N - 1$  points. Combinant celui-ci avec la formule de DOZZ qui donne les corrélations à 3 points, on pourrait résoudre le LCFT, i.e. de calculer les fonctions de corrélations.

De l'autre côté, la formule de DOZZ avec la définition 3 donne un résultat non trivial sur les moments du GMC. Dans le cas de la sphère, ce résultat est complexe. Mais sur le disque, ceci donne une formule très jolie, et on la présentera dans la partie suivante.

### 3.3 Intégrabilité du GMC sur le cercle

L'étude du LCFT sur le disque unité, plus précisément l'équivalent de la formule de DOZZ sur la sphère, donne un résultat intéressant en probabilité. Ce résultat est prouvé par Remy [15]. On le présente brièvement ci-dessous.

Soit  $X$  le GFF sur le disque  $\mathbb{D}$  avec la covariance donnée par

$$\mathbb{E}[X(x)X(y)] = \ln \frac{1}{|x - y||1 - x\bar{y}|}. \quad (3.22)$$

Dans le cas où  $x$  et  $y$  sont tous sur  $\partial\mathbb{D}$ , ceci se simplifie en  $2 \ln \frac{1}{|x-y|}$ . On peut aussi définir le GMC sur le cercle  $\partial\mathbb{D}$  par :

$$e^{\frac{\gamma}{2} X(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\frac{\gamma}{2} X_\epsilon(\theta) - \frac{\gamma^2}{8} \mathbb{E}[X_\epsilon(\theta)^2]} \frac{d\theta}{2\pi} \quad (3.23)$$

avec  $0 \leq \gamma < 2$ . On pose

$$Y = \int_0^{2\pi} e^{\frac{\gamma}{2}X(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (3.24)$$

Alors le théorème suivant donne la loi de  $Y$  :

**Théorème 8.** [15] Soit  $\gamma \in [0, 2[$ , alors  $Y$  admet une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue qui s'écrit

$$f_Y(y) = \frac{4}{\beta\gamma^2 y^2} (\beta y)^{-\frac{4}{\gamma^2} + 1} e^{-(\beta y)^{-4/\gamma^2}} \mathbf{1}_{y \in [0, \infty[} \quad (3.25)$$

où  $\beta = \Gamma(1 - \frac{\gamma^2}{4})$ . Comme conséquence directe, on prouve la conjecture de Fyodorov-Bouchaud [9] : pour  $p \in ]-\infty, \frac{4}{\gamma^2}[$ ,

$$\mathbb{E}[Y^p] = \frac{\Gamma(1 - p\frac{\gamma^2}{4})}{\Gamma(1 - \frac{\gamma^2}{4})^p}. \quad (3.26)$$

Ce résultat nouveau peut avoir plein d'applications. Par exemple, le cas  $p$  entier positif s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^p] &= \frac{1}{(2\pi)^p} \mathbb{E}[(\int_0^{2\pi} e^{\frac{\gamma}{2}X(\theta)} d\theta)^p] = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{[0, 2\pi]^p} \mathbb{E}[\prod_{i=1}^p e^{\frac{\gamma}{2}X(\theta_i)}] d\theta_1 \dots d\theta_p \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{[0, 2\pi]^p} e^{\frac{\gamma}{4} \sum_{j < k} \mathbb{E}[X(\theta_j)X(\theta_k)]} d\theta_1 \dots d\theta_p = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{[0, 2\pi]^p} \prod_{j < k} \frac{1}{|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^{\frac{\gamma^2}{2}}} d\theta_1 \dots d\theta_p. \end{aligned}$$

Ces égalités sont bien justifiées sous  $\epsilon$  et le théorème 8 donne la fameuse intégrale de Selberg [1] :

$$\frac{1}{(2\pi)^p} \int_{[0, 2\pi]^p} \prod_{j < k} \frac{1}{|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^{\frac{\gamma^2}{2}}} d\theta_1 \dots d\theta_p = \frac{\Gamma(1 - p\frac{\gamma^2}{4})}{\Gamma(1 - \frac{\gamma^2}{4})^p}. \quad (3.27)$$

D'ailleurs, on note que c'était en faisant ce calcul d'intégrales de Selberg que Fyodorov-Bouchaud ont trouvé la formule 3.26.

## Références

- [1] George E Andrews. *Special functions*. Tsinghua University Press, 2000.
- [2] Alexander A Belavin, Alexander M Polyakov, and Alexander B Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241(2) :333–380, 1984.
- [3] Louis Benoit and Yvan Saint-Aubin. Degenerate conformal field theories and explicit expressions for some null vectors. *Physics Letters B*, 215(3) :517 – 522, 1988.
- [4] Nathanaël Berestycki. Introduction to the gaussian free field and liouville quantum gravity. *Lecture notes available on the webpage of the author*, 2015.
- [5] Nathanaël Berestycki et al. An elementary approach to gaussian multiplicative chaos. *Electronic Communications in Probability*, 22, 2017.

- [6] François David, Antti Kupiainen, Rémi Rhodes, and Vincent Vargas. Liouville quantum gravity on the riemann sphere. *Communications in Mathematical Physics*, 342(3) :869–907, 2016.
- [7] Eric D’Hoker and D. H. Phong. The geometry of string perturbation theory. *Rev. Mod. Phys.*, 60 :917–1065, Oct 1988.
- [8] Harald Dorn and H. J. Otto. Two and three point functions in Liouville theory. *Nucl. Phys.*, B429 :375–388, 1994.
- [9] Yan V Fyodorov and Jean-Philippe Bouchaud. Freezing and extreme-value statistics in a random energy model with logarithmically correlated potential. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 41(37) :372001, 2008.
- [10] J-P Kahane. Le chaos multiplicatif. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 301(6) :329–332, 1985.
- [11] A. Kupiainen, R. Rhodes, and V. Vargas. Local Conformal Structure of Liouville Quantum Gravity. *ArXiv e-prints*, December 2015.
- [12] A. Kupiainen, R. Rhodes, and V. Vargas. Integrability of Liouville theory : proof of the DOZZ Formula. *ArXiv e-prints*, July 2017.
- [13] Joseph Liouville. Sur l’équation aux différences partielles  $\{d^2 \log \lambda \over du dv\} \pm \{ \lambda \over 2a^2\} = 0$ . *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 71–72, 1853.
- [14] Yu Nakayama. Liouville field theory : a decade after the revolution. *International Journal of Modern Physics A*, 19(17n18) :2771–2930, 2004.
- [15] Guillaume Remy. The fyodorov-bouchaud conjecture and liouville conformal field theory. *To appear soon*.
- [16] Rémi Rhodes. Raconte-moi le gff. *Lecture notes*, 2017.
- [17] Rémi Rhodes, Vincent Vargas, et al. Gaussian multiplicative chaos and applications : a review. *Probability Surveys*, 11, 2014.
- [18] Rémi Rhodes and Vincent vargas. Lecture notes on Gaussian multiplicative chaos and Liouville Quantum Gravity. 2016.
- [19] Nathan Seiberg. Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 102 :319–349, 1990.
- [20] Hermann Weyl. Das asymptotische verteilungsgesetz der eigenwerte linearer partieller differentialgleichungen (mit einer anwendung auf die theorie der hohlraumstrahlung). *Mathematische Annalen*, 71(4) :441–479, 1912.
- [21] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory. *Nucl. Phys.*, B477 :577–605, 1996.