Introduction à la théorie des groupes quantiques compacts via le groupe symétrique libéré

Hua Wang

1 Introduction

Le but de cet exposé est de donner une introduction informelle à la théorie de groupe quantique compact, fondée très récemment par Woronowicz([4] et [5]), sans utiliser trop des techniques spéciales dans l'algèbre d'opérateurs, analyse fonctionnelle, surtout analyse convexe sur l'espace des états, produit tensoriel des C^*-algèbres et nucléarité, etc. Même si ces techniques sont indispensables pour attaquer les problèmes de recherche dans ce domaine, l'exposé s'organise autour d'un exemple central, le groupe symétrique S_n et sa «libération», un exemple assez concret sur lequel on peut se faire une idée, quoique vague, sur ce nouveau domaine.

On peut sans doute dire que l'un des thèmes centrales des mathématiques modernes, c'est de bien connaître un certain groupe (souvent topologique, et équipé sinon de la topologie discrète). Une méthode systématique de faire ce genre d'étude est de regarder soigneusement la théorie des représentations pour ce certain groupe. Parmi bien des résultats profonds et puissants, signalons le théorème de dualité de Tanaka-Krein ([2], section 30), qui dit que l'un groupe compact est complètement déterminé par sa catégorie de représentations de dimension finie, et la dualité de Pontryagin, qui fournit la base pour une analyse de Fourier abstraite sur les groupes localement compacts abéliens ([1], et [2]). Mais au lieu de la place d'étudier les représentations, une autre idée, qui est centrale en géométrie non-commutative, est de remplacer un espace (ici, un groupe topologique) par l'algèbre des fonctions(avec une certaine régularité) sur celui-ci. C'est ce que l'on fait dans l'étude des groupes quantiques compacts(ou plus généralement, localement compacts).[1]

Donc, dans cet exposé, on étudie notre exemple central, c'est à dire S_n, en le remplaçant d'abord par une certaine algèbre (universelle) qui déjà encode toutes les informations sur S_n, et puis on enlève l'hypothèse de commutativité de cette algèbre pour avoir une algèbre beaucoup plus grande en général, et cette dernière algèbre est exactement l'algèbre pour le groupe symétrique libéré, l'un des plus importants exemples dans le domaine des groupes quantiques compacts. Comme

[1] Les groupes quantiques sont aussi un sujet de recherche en géométrie algébrique, en théorie de Lie etc.. Par exemple, Drinfeld et Jimbo ont d'abord fait l'étude des groupes quantiques motivée par un problème des groupes algébriques, mais cet exposé se confine au point de vue des algèbres d'opérateurs, qui est un domaine relativement nouveau fondé par Woronowicz.

on presque toujours travaille sur $\mathbb{C}$, dans la suivant, sauf mention du contraire, tout espace vectoriel est supposé être sur le corps de nombres complexes $\mathbb{C}$, tout produit tensoriel est sur $\mathbb{C}$, etc..

2 Une courte introduction à la C^*-algèbre

On vient de discuter le remplacement d'un espace par une algèbre d'opérateurs. Il faut préciser ce que l'on entend quand on parle d'algèbre d'opérateurs. Par exemple, n'importe quel espace de Banach peut être muni d'une structure d'algèbre de Banach, notamment en définissant le produit de deux éléments quelconques 0. Donc, la notion d'algèbre de Banach est trop vague pour être utile. On introduit une notion plus restrictive que la notion d'algèbre de Banach — la notion de C^*-algèbre — qui possède une structure assez fine et riche pour nous permettre de reconstruire l'espace originale, au moins lorsque cet espace est localement compact, grâce à la transformation de Gelfand.

2.1 Spectre et transformation de Gelfand

Soit A une algèbre unifère (c'est à dire que A possède un élément neutre 1_A pour la multiplication, et que le morphisme de structure $k \to A$ est unifère, en d'autres termes, envoie 1_k sur 1_A) sur un anneau commutatif k. Si on fixe un $a \in A$; alors le spectre de a par rapport à l'algèbre A, noté $\mathrm{Sp}_A(a)$, est l'ensemble $\{\lambda \in k \mid a - \lambda 1_A$ n'est pas inversible dans $A\}$. Dans le cas où A est aussi commutative, on dit qu'un morphisme unifère de A dans k est un *caractère* de A. L'ensemble des caractère sur une algèbre commutative A est noté $\Omega(A)$, et s'appelle le *spectre* de A. On note $k(X)$ l'algèbre sur k des applications de X dans k.

Si A est une k-algèbre qui n'est pas unifère, alors on peut construire une autre algèbre $A \times k$, en définissant $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$, $(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)$, et $\lambda(a, \alpha) = (\lambda a, \lambda\alpha)$, pour tous $\alpha, \beta, \lambda \in k$ et $a, b \in A$. Dans ce cas-là, la projection pr_k sur k est un caractère sur $A \times k$, et on définit $\Omega(A) = \Omega(A \times k) - \{\mathrm{pr}_k\}$.

Si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres, alors on a naturellement une application $\Omega(\phi) : \Omega(B) \to \Omega(A)$, qui à chaque caractère g sur B associe la fonction $g \circ \phi$ sur A, qui est un caractère de A. Si k est aussi un anneau topologique (par exemple, $\mathbb{C}$), alors $\Omega(\phi)$ est continue si l'on choisit les topologies faibles sur $\Omega(A)$ et $\Omega(B)$. Comme ça, Ω devient un foncteur contravariant de la catégorie des algèbres unifères commutatives sur k, noté $\mathcal{A}_k^{cu}$, dans la catégorie des ensembles $\mathcal{ENS}$. Si k est un anneau topologique, on peut remplacer la catégorie des ensembles par la catégorie des espaces topologiques $\mathcal{T}$.

Réciproquement, à partir de tout ensemble X, on peut construire une algèbre unifère commutative sur k. C'est l'algèbre des applications (fonctions) de X dans k, noté $k(X)$ (dans le cas extrême où $X = \emptyset$, on prend $k(X)$ nue). Soit $\alpha : X \to Y$ une application, alors l'application $k(\alpha) : k(Y) \to k(X)$, qui à une fonction $g : Y \to k$ associe la fonction $g \circ \alpha : X \to k$, est un morphismes unifères d'algèbres. Comme ça, $k(\cdot) : \mathcal{ENS} \to \mathcal{A}_k^{uc}$ devient un foncteur contravariant.

On a construit deux foncteurs contravariants: $\Omega(\cdot) : \mathcal{A}_k^{uc} \to \mathcal{ENS}$, et $k(\cdot) : \mathcal{ENS} \to \mathcal{A}_k^{uc}$. Leur composé, $\Gamma = k(\Omega(\cdot))$, est un foncteur (covariant) de la catégorie $\mathcal{A}_k^{uc}$ des algèbres unifères commutatives sur k dans lui-même. Ce foncteur Γ est ce que l'on appelle la transformation de Gelfand. Plus spécifiquement, étant donné une algèbre unifère commutative sur k, on peut construire un morphisme d'algèbre $\Gamma_A : A \to k(\Omega(A))$, qui à chaque $a \in A$ associe l'évaluation $\Gamma_a = \mathrm{ev}_a : \omega \to \omega(a)$. On appelle aussi Γ_a la transformation de Gelfand de a.

En général, Γ_A construit comme ci-dessus, n'est pas un isomorphisme. Cela veut dire que, si on passe d'une algèbre commutative unifère A abstraite à $k(\Omega(A))$, une algèbre plus concrète, via la transformation de Gelfand, on peut bien perdre des informations sur A. L'un des avantages de C^*-algèbre, c'est que si A est une C^*-algèbre unifère commutative, alors Γ_A est toujours isomorphisme, donc aucune information n'est perdue via la transformation de Gelfand !

2.2 C^*-algèbre: définition et exemples

Définition 2.1. Une involution sur une $\mathbb{C}$-algèbre est une application *anti-linéaire* $* : A \to A, a \mapsto a^*$, telle que

i) $\forall a \in A, \quad (a^*)^* = a$;

ii) $\forall a, b \in A, \quad (ab)^* = b^* a^*$.

Une algèbre A sur $\mathbb{C}$ est dite *involutive*, s'il existe une involution $* : A \to A$. a^* s'appelle souvent l'adjoint de a.

Définition 2.2. Une C^*-algèbre A est une algèbre de Banach sur $\mathbb{C}$, munie d'une involution $* : A \to A$, qui vérifie $\|a^* a\| = \|a\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme sous-entendue.

Définition 2.3. Un morphisme (resp. isomorphisme) de C^*-algèbres est un morphisme (resp. isomorphisme) d'algèbres qui préserve aussi l'involution. Si A possède un élément neutre pour la multiplication, on dit A est unifère. Un morphisme (isomorphisme) de C^*-algèbres unifère est dit unifère s'il préserve l'élément neutre pour la multiplication.

Définition 2.4. Une sous C^*-algèbre d'une C^*-algèbre, est une sous-algèbre de Banach, qui est aussi stable par l'involution.

Exemple 2.5. Soit X un espace topologique compact, alors $C(X)$, l'espace de fonctions continue sur X à valeur dans $\mathbb{C}$, est une algèbre de Banach munie de la norme $\|\cdot\| = \max(|\cdot|)$. Si on définit $* : C(X) \to C(X)$, par $f \mapsto (\overline{f} : x \mapsto \overline{f(x)})$, alors, $*$ est une involution sur $C(X)$, avec laquelle $C(X)$ devient une C^*-algèbre. Un peu plus généralement, si X est localement compact, alors $C_0(X)$, l'espace des fonctions continues sur X à valeur dans $\mathbb{C}$ qui s'annule au voisinage de l'infini [2], muni de la norme et de l'involution construites de la même façon, est une C^*-algèbre.

Exemple 2.6. Soit H un espace de Hilbert, considérons $L(H)$, l'algèbre de Banach des applications linéaires *bornées* de H dans lui-même. Grâce au théorème de Riesz, on peut définir l'adjoint T^* d'un opérateurs $T \in L(H)$, via $(Tx, y) = (x, T^*y), \forall x, y \in H$, où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire de H. On vérifie sans peine que $* : T \mapsto T^*$, est bien une involution, pour laquelle $L(H)$ devient une C^*-algèbre.

Par une analyse sur le spectre et la transformation de Gelfand, on a le théorème suivant:

Théorème 2.7. *Soit A une C^*-algèbre unifère commutative, alors $\Omega(A)$ est compact pour la topologie faible, et la transformation de Gelfand $\Gamma_A : A \to C(\Omega(A))$ est un isomorphisme.*

Remarque 2.8. Si A n'est pas unifère, alors $\Omega(A)$ est localement compact pour la topologie faible, on peut encore définir la transformation de Gelfand Γ_A, mais cette fois-ci, elle est un isomorphisme de A sur $C_0(\Omega(A))$.

Par une méthode due à Gelfand-Naimark-Segal, on a le théorème suivant:

Théorème 2.9. *Toute C^*-algèbre (unifère ou pas, commutative ou pas) est isomorphe à une sous-C^*-algèbre de $L(H)$, où H est un certain espace de Hilbert.*

2.3 Espace topologique non-commutatif

Toutes les C^*-algèbres, avec les morphismes entre elles, forment une catégorie $C^*\mathcal{A}$. Les C^*-algèbres commutatives (ou bien abéliennes), avec leurs morphismes, forment une sous-catégorie pleine $C^*\mathcal{A}_{ab}$ de $C^*\mathcal{A}$. Les C^*-algèbres commutatives (ou bien abéliennes) *unifères*, avec les morphismes *unifères* entre elles, forment une sous-catégorie $C^*\mathcal{A}_{abu}$ de $C^*\mathcal{A}_{ab}$(et de $C^*\mathcal{A}$).

On a alors le théorème suivant:

Théorème 2.10. *Soient $\mathcal{ELC}_p$ la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques localement compacts, et dont les morphismes sont les applications* propres, *$\mathcal{EC}$ la catégorie des espaces topologiques compacts; alors le foncteur de spectre $\Omega(\cdot)$ (qui est contravariant), donne une équivalence de catégories $\Omega(\cdot) : C^*\mathcal{A}_{ab} \to \mathcal{ELC}_p$, sa restriction à la sous catégorie $C^*\mathcal{A}_{abu}$, donne une équivalence de catégories $\Omega(\cdot) : C^*\mathcal{A}_{abu} \to \mathcal{EC}$. Et le foncteur $C_0(\cdot)$ de prendre les applications continues qui s'annulent au voisinage l'infini, qui se réduit à prendre juste les applications continues si l'espace est compact, est un pseudo-inverse pour les deux équivalences de catégories (donc dans chacun des cas, $C(\cdot)$ est aussi une équivalence de catégories).*

[2] c'est à dire que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset X$, tel que pour tout $x \in X - K_\epsilon$, la valeur absolue de cette fonction en x est inférieur à ϵ.

C'est avec le théorème ci-dessus que l'on identifie un espace localement compact (resp. compact) avec une C^*-algèbre commutative (resp. commutative unifère). Dans ce sens-là, un espace localement compact est un espace *commutative*. Naturellement, une C^*-algèbre en générale, qui peut être non-commutative, est considérée comme un espace topologique non-commutatif[3].

3 C^*-algèbre universelle pour le groupe symétrique

En utilisant les outils de C^*-algèbres développés ci-dessus, on étudie un exemple concret, notamment le groupe symétrique $S_n = \{\text{permutations sur } \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

Il est bien connu que S_n admet une représentation *fidèle* de dimension n: pour chaque permutation $\pi \in S_n$, on associe une matrice de permutation $M_\pi = \sum_{k=1}^n e_{\pi(k)k}$, où e_{ij} est la matrice carrée de taille n ayant l'élément en la i-ième ligne en la j-ième colonne valant 1, et tous les autres éléments valant 0. On vérifie sans peine que $M_\pi e_k = e_{\pi(k)}$, et $M_{\pi\sigma} = M_\pi M_\sigma$ pour $\pi, \sigma \in S_n$. On identifie S_n avec l'ensemble des matrices de permutations de tailles n via la représentation ci-dessus. Soit u_{ij} la fonction sur S_n, qui à chaque matrice associe son coefficient dans la position (i, j), alors la famille des fonctions $(u_{ij} : i, j = 1, \ldots, n)$ sépare les éléments dans S_n, que l'on identifie par la façon ci-dessus avec $\{M_\pi : \pi \in S_n\}$. Donc par le théorème de Stone-Weierstrass, on sait que l'algèbre engendré par les n^2 fonctions u_{ij} et la fonction constante 1(puisque on veut l'algèbre soit unifère), est bien $\mathbb{C}(S_n)$ entier. De plus, on vérifie aussitôt que $\sum_{s=1}^n u_{st} = 1$ pour tout t, et $\sum_{t=1}^n u_{st} = 1$ pour tout s, et bien sûr, comme la valeur pour chaque u_{ij} vaut soit 0, soit 1. On sait que $u_{ij}^2 = u_{ij}$.

On peut voir $u_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ comme n symboles soumis seulement aux relations (i) $\sum_{s=1} u_{st} = 1, \forall t$, (ii)$\sum_{t=1}^n u_{st} = 1, \forall s$, (iii) $u_{ij}^2 = u_{ij}, \forall i, j$, (iv) $u_{ij}u_{st} = u_{st}u_{ij}, \forall i, j, s, t$. Donc si l'on prend l'anneau de polynômes $A = \mathbb{C}[u_{ij}, i, j = 1, \ldots, n]$ sur $\mathbb{C}$ à n^2 indéterminées $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui ne commutent pas, et prenons l'idéal I déterminé par les quatre relations ci-dessus, on trouve A/I est une algèbre sur $\mathbb{C}$, pour laquelle $\mathbb{C}(S_n)$ est une image homomorphique en tant qu'algèbre sur $\mathbb{C}$.

Si l'on muni S_n de la topologie discrète, alors S_n devient un groupe topologique compact. Donc $\mathbb{C}(S_n)$ est naturellement une C^*-algèbre. Mais l'algèbre A/I ne possède pas une telle structure à priori. Pourtant, on peut construire une C^*-algèbre à partir de A/I. D'abord, on introduit une involution $*$, pour laquelle on a $u_{ij}^* = u_{ij}$. Puis on considère toutes les semi-normes sur A/I qui vérifient la condition pour la norme dans la définition d'une C^*-algèbre, ce que l'on appelle une C^*-semi-norme sur A/I. Soit S l'ensemble des C^*-semi-normes sur A/I, prenons la sous-algèbre involutive $(A/I)_0$ de A/I qui est formée dees éléments dont le supremum de toutes les C^*-semi-norme est fini (en fait, dans ce cas on peut montrer que $(A/I)_0 = A/I$), et puis posons la semi-normes $\| \cdot \| = \sup \{\alpha(\cdot) : \alpha \in S\}$ sur $(A/I)_0$. C'est encore une C^*-semi-norme. Et la

[3] C'est une terminologie regrettable dans le domaine de géométrie commutative parce que un espace non-commutatif peut bien être *commutatif*, peut-être il vaut mieux que l'on utilise *non-nécessairement commutatif*.

séparé complété de $(A/I)_0$ par rapport à cette semi-norme est naturellement une C^*-algèbre.

Signalons que le même processus s'applique à n'importe quelle algèbre involutive A. Et on appelle la C^*-algèbre ainsi obtenue la C^*-algèbre *enveloppante* (ou bien *universelle*) de A. Notons A_u la C^*-algèbre universelle de A/I qui est construit ci-dessus. Alors on voit facilement que l'on a un morphisme unifère de C^*-algèbres $\phi : A_u \to \mathbb{C}(S_n)$, qui envoie la classe d'équivalence du symbole u_{ij} vers la fonction u_{ij}. Grâce à la condition (*iv*), A_u est encore une C^*-algèbre commutative. À l'aide de la théorie spectrale et la transformation de Gelfand, on a

Proposition 3.1. *$\phi : A_u \to \mathbb{C}(S_n)$ est un isomorphisme de C^*-algèbres. En d'autre terme, $\mathbb{C}(S_n)$ est la C^*-algèbre universelle sur les symboles $(u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, soumis aux conditions suivantes: (i) $\sum_{s=1} u_{st} = 1, \forall t$, (ii)$\sum_{t=1}^{n} u_{st} = 1$, (iii) $u_{ij}^2 = u_{ij}, \forall i, j$, (iv) $u_{ij}u_{st} = u_{st}u_{ij}, \forall i, j, s, t$.*

4 «Symétrie non-commutative», ou bien «libération»

Enfin, on peut donner notre premier exemple non-triviale d'un groupe quantique compact. C'est ce que l'on appelle le groupe quantique symétrique et que l'on note S_n^+. Pour ceci, il suffit d'enlever la condition (iv) dans la proposition 3.1, comme l'on a fait quand on parle d'espace topologique non-commutatif, puisque a priori, il n'y a pas de raison particulier d'ajouter la commutativité quand on définit la C^*-algèbre universelle. Donc on a

Définition 4.1. Le groupe quantique symétrique S_n^+ est la C^*-algèbre universelle sur les symboles $(u_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, soumis les conditions suivantes: (i) $\sum_{s=1} u_{st} = 1, \forall t$, (ii)$\sum_{t=1}^{n} u_{st} = 1$, (iii) $u_{ij}^2 = u_{ij}, \forall i, j$.

Si l'on voit S_n comme les *symétries commutatives*, alors la C^*-algèbre (ou bien le groupe quantique) S_n^+ décrit les *symétrie non-commutative.* On l'obtient en enlevant la condition de commutativité sur les générateurs pour la C^*-algèbre universelle, et on appelle souvent ce genre de procédé une *libération.* C'est pourquoi parfois on appelle aussi S_n^+ le groupe symétrique libéré.

Le processus que l'on utilise pour obtenir S_n^+ semble assez naïf. Pourtant, il y a plusieurs choses auxquelles il faut faire attention. En premier lieu, la C^*-algèbre universelle que l'on utilise pour décrire $\mathbb{C}(S_n)$ est a priori de dimension finie, car l'ordre n'intervient pas quand l'on multiplie les symboles grâce à la commutativité et $u_{ij}^2 = u_{ij}$ (les symboles sont idempotents) réduit chaque monôme à un monôme dont le degré par rapport à n'importe quelle symbole est au plus 1. Mais quand on considère S_n^+, l'ordre des multiplications intervient car on n'a plus de commutativité a priori, donc la dimension peut augmenter jusqu'au infinie, ce qui pose à la fois du problème technique et la possibilité de décrire une structure plus riche. Mais lorsque $n = 1, 2, 3$, comme on a peu de variables et beaucoup de relations, on peut montrer que dans ces cas là, on a automatiquement la commutativité, et donc S_n^+ n'est rien d'autre que S_n pour $n = 1, 2, 3$. Mais quand $n \geq 4$, on peut montrer que S_n^+ est bien de dimension infinie, donc on obtient quelque chose d'entièrement différent. Deuxièmement, la C^*-algèbre universelle pour une algèbre involutive peut être trop petite, puisque il peut s'avérer que l'on a trop de C^*-semi-normes et que le supremum des C^*-semi-normes pour beaucoup d'éléments sera infinie donc on doit les enlever (ou en autre extrême, il n'y a pas du tout de C^*-semi-norme non-nulle).

Mais pour les groupes compacts assez classiques, comme $O(n)$, ou $U(n)$, on peut écrire par un procédé similaire la C^*-algèbre universelle pour $C(O(n))$ (ou $C(U(n))$), et puis enlever la commutativité pour avoir une C^*-algèbre universelle plus grande. Ce processus là marche très bien, et les résultats sont appelés le groupe quantique orthogonal *libéré*, le groupe quantique unitaire *libéré*, etc. En fait, ce sont des exemples assez classique dans le domaine de groupe quantique compact, qui appartiennent à la classe des groupes pseudo-matriciels. Et bien sûr, il y a beaucoup d'autres exemples importants et intéressants. Mais une question naturelle à présent, c'est pourquoi on étudie les groupes quantiques compacts. Et je vais essayer de l'expliquer avec le point de vue de la théorie de représentation.

5 Representations et le théorème de Tanaka-Krein-Woronowicz

Comme mentionné dans l'introduction, on a le théorème de Tanaka-Krein pour les représentations des groupes topologiques compacts, qui dit que un groupe topologique compact est complètement déterminé par sa catégorie des représentations de dimension finie. Si on suit cette idée, on peut naturellement reformuler dans le langage de catégorie pour les notions de la somme directe des représentations, de la représentation contregradient, de la représentation tensorielle etc. Et on étudie naturellement les catégories qui «admet formellement de former les sommes directes, les contregradients, les produits tensoriels etc.» , à quelques détails techniques près, on sait que même si une telle catégorie n'est pas forcément la catégorie des représentations d'un groupe compact, elle est forcément la catégorie de représentation d'un groupe quantique (compact). En fait, on a un théorème plus général, qui s'appelle le théorème de Tanaka-Krein-Woronowicz, qui dit que l'on a une équivalences de catégories entre la catégorie des groupes quantiques compacts et la catégorie des C^*-catégories tensorielles rigides avec dual. Donc en considérant les groupes quantiques compacts, on aura une théorie de représentation plus riche et satisfaisante.

6 Motivation de la physique

En fait, le mot «quantique» n'est pas choisi au hasard. Les groupes quantiques jouent un rôle influent dans la théorie quantique des champs. Malheureusement, je n'en parle pas d'ici car ma connaissance de la physique est trop limitée.

7 La définition moderne de groupe quantique compact

C"est peut-être mieux que je conclure cet exposé en donnant la version moderne de la définition pour le groupe quantique compact et quelques remarques.

Définition 7.1 ([3], p1)**.** Un groupe quantique compact est une C^*-algèbre unifère A, muni d'un morphisme unifère de C^*-algèbres $\Delta : A \to A \otimes A$ (où $A \otimes A$ est le produit tensoriel minimal[4] des C^*-algèbres), tel que

i) (coassociativité) On a $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$;

ii) (loi d'annulation) Le sous espace vectoriel $(A \otimes 1)\Delta(A)$ engendré par l'ensemble $\{(a \otimes 1)\Delta(b) : a, b \in A\}$ et le sous espace vectoriel $(1 \otimes A)\Delta(A)$ engendré par l'ensemble $\{(1 \otimes a)\Delta(b) : a, b \in A\}$ sont denses dans $A \otimes A$.

Remarque 7.2. Soit G un groupe compact, alors la multiplication $m : G \times G \to G$ induit un morphisme $\Delta : C(G) \to C(G \times G) \cong C(G) \otimes C(G)$, et on peut vérifie sans peine que $(C(G), \Delta)$ est un groupe quantique compact.

Réciproquement, si l'on a un groupe quantique compact (A, Δ) *commutatif* (c'est à dire, la C^*-algèbre A est commutative), Woronowicz trouve que $\Omega(A)$ devient un groupe compact dont la multiplication $m : \Omega(A) \times \Omega(A) \to \Omega(A)$ est induite par Δ.

Donc un groupe quantique compact *commutatif* n'est rien d'autre qu'un groupe compact !

References

[1] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 115. Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. viii+519.

[2] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. II: Structure and analysis for compact groups. Analysis on locally compact Abelian groups.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 152. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970. ix+771.

[3] Sergey Neshveyev and Lars Tuset. *Compact quantum groups and their representation categories.* Vol. 20. Cours Spécialisés [Specialized Courses]. Société Mathématique de France, Paris, 2013. vi+169. ISBN: 978-2-85629-777-3.

[4] S. L. Woronowicz. "Compact matrix pseudogroups". In: *Communications in Mathematical Physics* 111.4 (1987), pp. 613–665. ISSN: 0010-3616.

[4] Ici sur $A \otimes A$, la C^*-norme induit par celle de $A \otimes A \to L(H \otimes H)$, où $A \to L(H)$ est une représentation fidèle de C^*-algèbre

[5] S. L. Woronowicz. "Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups". In: *Inventiones Mathematicae* 93.1 (1988), pp. 35–76. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/BF01393687.