Régulateurs modulaires et valeurs spéciales de fonctions L

Weijia Wang
Sous la direction de François Brunault

Table des matières

1 Formes modulaires et régulateurs modulaires **1**
1.1 Formes modulaires classiques 1
1.2 L'application du régulateur 3
1.3 La théorie analytique du régulateur 4

2 Mesure de Mahler **7**
2.1 Vers la mesure de Mahler 7
2.2 Les exemples de Boyd 8

Références **10**

1 Formes modulaires et régulateurs modulaires

1.1 Formes modulaires classiques

Soit N un entier positif. On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ le demi-plan de Poincaré avec sa structure holomorphe. Le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ a une action naturelle sur $\mathcal{H}$ par transformation fractionnaire linéaire

$$\gamma \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ where } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On définit le groupe

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}.$$

Définition 1.1. Soit k un entier. Une forme modulaire de niveau N et de poids k est une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$ qui satisfait

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{-k} f(z), \text{ pour tout } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N).$$

Remarque. Notons que par définition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\Gamma_1(N)$. Donc une forme modulaire de niveau N vérifie $f(z+1) = f(z)$, et elle admet un développement de Fourier

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

où $q = e^{2\pi i z}$.

On dit qu'une forme modulaire f est cuspidale si pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} f(\gamma z) = 0.$$

Soit $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ une forme modulaire de niveau N. On définit la fonction L associée à f par

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Plus généralement, la fonction L associée à f avec un caractère de Dirichlet χ est définie par

$$L(f, \chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi(n) n^{-s}.$$

La fonction L complétée de f est définie par

$$\Lambda(f, s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f, s) = N^{s/2}\int_0^{\infty} (f(iy) - a_0) y^s \frac{dy}{y}.$$

Rappelons que si $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ est une forme modulaire de poid k, la fonction L de f est définie pour $Re(s) > k$.

Théorème 1.1. *1. La fonction $L(s, f)$ converge absolument pour tout s sur le demi-plan $Re(s) > k/2 + 1$ si f est cuspidale.*

2. La fonction L complétée $\Lambda(f, s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\Lambda(f, s) = \Lambda(W_N f, k - s),$$

où W_N est l'involution Atkin-Lehner qui est définie par

$$(W_N f)(z) = i^k N^{-k/2} z^{-k} f(-\frac{1}{Nz}).$$

Définition 1.2. La courbe modulaire $X_1(N)$ est une surface de Riemann définie comme une compactification de $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$.

Remarque. On remarque qu'on utilise l'approche classique pour la définition des courbes modulaires et des formes modulaires, mais en fait nous devons besoin d'une définition alternative des courbes modulaires comme espaces de modules. Une référence est donnée dans [10].

1.2 L'application du régulateur

Commençons par quelques rappels sur les résultats classiques de la théorie des nombres algébriques sur le régulateur Dirichlet d'un corps de nombres F.

Théorème 1.2. (Théorème des unités de Dirichlet) *Soit r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de F. Les r_1 plongements réelles de F dans $\mathbb{C}$ sont notés $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ et les r_2 plongements complexes de F dans $\mathbb{C}$ sont notés $\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}$. L'application du régulateur est définie par*

$$\begin{aligned} \lambda_F : \mathcal{O}_F^\times &\to \mathbb{R}^{r_1+r_2-1} \\ u &\mapsto {}^t(\log|\sigma_1(u)|, \ldots, \log|\sigma_{r_1}(u)|, 2\log|\sigma_{r_1+1}(u)|, \ldots, 2\log|\sigma_{r_1+r_2}(u)|). \end{aligned}$$

On a alors

1. $\ker(\lambda_F)$ *est un groupe fini de racines de l'unité,*
2. $\operatorname{im}(\lambda_F)$ *est un réseau discret de rang r_1+r_2-1 dans $\mathbb{R}^{r_1+r_2-1}$,*
3. *λ_F induit un isomorphisme $\mathcal{O}_F^\times \cong (\mathcal{O}_F^\times)_{tor} \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}$, où $(\mathcal{O}_F^\times)_{tor}$ est le groupe de racines de l'unité dans $\mathcal{O}_F$. Un système d'unités fondamentales de F est une famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1})$ d'unités dont l'image dans $\mathcal{O}_F^\times/(\mathcal{O}_F^\times)_{tor}$ en soit une $\mathbb{Z}$-base.*

Définition 1.3. Le régulateur R_F est définie par

$$R_F = \det(\lambda_F(\varepsilon_1), \ldots, \lambda_F(\varepsilon_{r_1+r_2-1})),$$

où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2-1})$ est un système d'unités fondamentales de F.

D'après le théorème de Dedekind, on a une relation entre le régulateur de Dirichlet et la valeur spéciale en $s=0$ de la fonction zêta de Dedekind d'un corps F.

Théorème 1.3. (Dedekind) *Soit r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de F, h_F le nombre de classes de F, ω_F le nombre de racines de l'unité contenues dans F, et R_F le régulateur de F. Alors*

$$\lim_{s\to 0} s^{-(r_1+r_2-1)}\zeta_F(s) = -\frac{h_F R_F}{\omega_F}.$$

Définition 1.4. Soit $x, y \in \mathbb{C}$, on dit que x et y sont $\mathbb{Q}$-équivalents et on écrit $x \sim_{\mathbb{Q}} y$ si $y = 0$ ou $y \neq 0$ et $x/y \in \mathbb{Q}$.

On voit que le coefficient dominant de $\zeta_F(s)$ en $s = 0$ est $\mathbb{Q}$-équivalent au régulateur de le corps F. On peut considérer le rang et coefficient de $\zeta_F(s)$ en une valeur négative $s = -m$. Avec l'aide de la K-théorie de Quillen, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.4. (Borel [3]) *Le rang d_m de $\zeta_F(s)$ en $s = -m$ est la dimension du K-groupe de Quillen $K_{2m+1}(\mathcal{O}_F) \otimes \mathbb{Q}$, et le coefficient dominant vérifie la relation suivante*

$$\lim_{s \to -m} \zeta_F(s)(s+m)^{-d_m} \sim_{\mathbb{Q}} R_{F,m},$$

où $R_{F,m}$ est le régulateur associé à l'application du régulateur $\lambda_m : K_{2m+1}(\mathcal{O}_F) \to \mathbb{R}^{d_m}$.

Nous pouvons maintenant considérer l'application du régulateur d'un objet algébrique général. Pour une variété quasi-projective $X_{/\mathbb{Q}}$, Beilinson [1] considérait la construction suivante

$$H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) := (K_{2j-i}(X) \otimes \mathbb{Q})^{(j)}$$

comme un morceau de la filtration du produit tensoriel de la K-théorie algébrique de Quillen et de $\mathbb{Q}$. Il définissait aussi

$$\mathrm{reg} : H^i_{\mathcal{M}}(X, \mathbb{Q}(j)) \to H^i_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j)),$$

où $H^i_{\mathcal{D}}(X_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}(j))$ est la cohomologie de Deligne-Beilinson (voir [7], et une bonne introduction dans l'article [9]).

Beilinson [1] a conjecturé une relation entre la valeur spéciale de fonction L et l'application régulateur. En particulier, la conjecture de Beilinson relative à une courbe elliptique s'énoncent de la forme suivante.

Conjecture 1.1. *Soient $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique et $\mathcal{E}/\mathbb{Z}$ le modèle de Néron de E. Alors,*

$$\mathrm{reg}(K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q}) = \Omega^+ L(E, 0) \cdot \mathbb{Q},$$

où Ω^+ est la période de E.

1.3 La théorie analytique du régulateur

Dans cette section, nous proposons une courte introduction aux méthodes analytiques du régulateur. Nous nous concentrons uniquement sur le cas plus simple où X est une courbe elliptique ou une courbe modulaire. Voir [1] pour une discussion générale du régulateur.

Définition 1.5. Soient F un corps et G un groupe abélien. Une application

$$\begin{aligned} \{\ ,\ \} : F^\times \times F^\times &\to G \\ (f,g) &\mapsto \{f,g\} \end{aligned}$$

s'appelle symbole de Steinberg si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$ pour $f_1, f_2, g \in F^\times$,
2. $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} + \{f, g_2\}$ pour $f, g_1, g_2 \in F^\times$,
3. $\{1-f, f\} = 0$ pour $f \in F^\times \backslash \{1\}$.

Exemple 1.1. *Soit F un corps valué avec une valuation discrète $v : F^\times \to \mathbb{Z}$. Soient (A, π) l'anneau de valuation associé à v et π une uniformisante. Alors on a un symbole de Steinberg*

$$\begin{aligned} \{f,g\} : F^\times \times F^\times &\to (A/(\pi))^\times \\ (f,g)_v &\mapsto (-1)^{v(f)v(g)} \frac{f^{v(g)}}{g^{v(f)}} \qquad \bmod \pi. \end{aligned}$$

Le théorème de Matsumoto (cf. [11]) décrit la structure du groupe $K_2(F)$ d'un corps F. Cela nous offre un méthode analytique pour calculer le régulateur dans le cas où $X/\mathbb{Q}$ est une courbe projective lisse.

Théorème 1.5. (Théorème de Matsumoto) *Soit F un corps. Alors le groupe $K_2(F)$ admet la représentation suivante par les générateurs $\{f,g\}$ avec les relations*

1. $\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$ *pour* $f_1, f_2, g \in F^\times$,
2. $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} + \{f, g_2\}$ *pour* $f, g_1, g_2 \in F^\times$,
3. $\{1-f, f\} = 0$ *pour* $f \in F^\times \backslash \{1\}$.

Dans le cas où $X/\mathbb{Q}$ est une courbe projective lisse et $i = j = 2$, soient f, g deux fonctions rationnelles sur X. On désigne par $U \subset X$ le complémentaire des diviseurs de f et g.

Par dualité de Serre, on obtient un accouplement (cf. [12])

$$\begin{aligned} H^1_{\mathcal{D}}(U, \mathbb{R}(2)) \times H^1(U(\mathbb{C}), \mathbb{R}(1)) &\to \mathbb{R} \\ \langle \psi, \omega \rangle &\mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_U \psi \wedge \omega. \end{aligned}$$

Définition 1.6. Soit $X/\mathbb{Q}$ une courbe projective et lisse et $i = j = 2$. L'application du régulateur est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}: H^2_{\mathcal{M}}(U, \mathbb{Q}(2)) \to & H^1_{\mathcal{D}}(U, \mathbb{R}(2)) \\ \{f, g\} \mapsto & \left(\omega \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_U (\log|f| d\arg(g) - \log|g| d\arg(f)) \wedge \omega\right) \\ & = \left(\omega \mapsto \frac{1}{\pi i}\int_U \log|f| \overline{d\arg(g)} \wedge \omega\right).\end{aligned}$$

Soit L un réseau dans $\mathbb{C}$ de la forme $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ avec $\tau \in \mathcal{H}$. Notons $A(L) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{\pi}$. On note

$$\langle \omega, \gamma \rangle_K = \exp\left(\frac{\omega\overline{\gamma} - \overline{\omega}\gamma}{A(L)}\right)$$

l'accouplement entre $\omega \in \mathbb{C}$ et $u \in L$.

Définition 1.7. Soient k un entier, ω, u et $s \in \mathbb{C}$. La série

$$K_k(z, u, s) = \sum_{\substack{\gamma \in L \\ \gamma \neq -z}} \frac{\overline{z+\gamma}^k}{|z+\gamma|^{2s}} \langle \gamma, u \rangle_K$$

s'appelle séries d'Eisenstein-Kronecker.

Le théorème suivant a été démontré par Bloch [2]. Il nous offre une expression de l'application du régulateur en termes de séries d'Eisenstein-Kronecker.

Théorème 1.6. *Soient $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique et $L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ un réseau correspondant à $E(\mathbb{C})$ avec $\tau \in \mathcal{H}$. On choisit une forme différentielle ω de E, définie sur $\mathbb{Q}$, qui corresponde à la forme différentielle dz de $E(\mathbb{C})$. Soient f et g des fonctions rationnelles dans $\mathbb{Q}(E)^\times$. On a alors*

$$\langle \mathrm{reg}(f, g), \omega \rangle = -\frac{(\operatorname{Im}\tau)^2}{\pi^2} \sum_{x, y \in \mathbb{C}/L} \operatorname{ord}_x(f) \operatorname{ord}_y(g) K_{-1}(0, y - x, 1).$$

Définition 1.8. Pour $(u, v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$, nous définissons

$$E_{(u,v)}(z, s) = \sideset{}{'}\sum_{\substack{m \equiv u\,(N) \\ n \equiv v\,(N)}} \frac{(\operatorname{Im} z)^s}{|mz + n|^{2s}},$$

et

$$E^*_{(u,v)}(z) = \lim_{s\to 1}\left(E_{(u,v)}(z,s) - \frac{\pi}{N^2(s-1)}\right),$$

où le symbole $\sum'$ indique que la somme est étendue aux $(m,n) \neq (0,0)$. Pour toute fonction $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, nous définissons les séries d'Eisenstein par

$$E^*_f(z) = \sum_{v\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(v)E^*_{(0,v)}(z).$$

Le théorème suivant a été obtenu par Brunault [5, Théorème 81], il considère l'application du régulateur avec les valeurs spéciales de fonction L d'une forme cuspidale de poids 2

Théorème 1.7. *Soit f une forme cuspidale de poids 2 et niveau N, on pose $\omega_f = 2\pi i f(z)dz$. Alors, sur $X_1(N)$, on a*

$$\langle \mathrm{reg}(u_{\chi_1}, u_{\hat{\chi}_2}), \omega_f\rangle = \begin{cases} \frac{\phi(N)}{N\pi i} L(f,2)L(f,\chi_2,1) & si\ \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

où u_{χ_1} et $u_{\hat{\chi}_2}$ sont des unités modulaires dans $\mathbb{C}(X_1(N))^\times \otimes \mathbb{C}$ avec $\log|u_{\chi_1}(z)| = E^*_{\chi_1}(z)$ et $\log|\hat{\chi}_2(z)| = E^*_{\hat{\chi}_2}(z)$, et $\hat{\chi}_2$ est la transformation de Fourier de χ_2.

2 Mesure de Mahler

2.1 Vers la mesure de Mahler

Définition 2.1. La mesure de Mahler logarithmique d'un polynôme $P \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ est définie par

$$m(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \log|P(e^{2\pi i\theta_1}, \ldots, e^{2\pi i\theta_n})| d\theta_1 \cdots d\theta_n,$$

et la mesure de Mahler est $M(P) = e^{m(P)}$.

Théorème 2.1. *Soient α un entier algébrique et $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $P(\alpha) = 0$, où P est de degré minimal et les coefficients de P sont premiers entre eux. On a*

$$M(P) = \textit{hauteur de Weil de } \alpha.$$

Remarque. C'est un corollaire direct de la formule de Jensen en analyse complexe.

Exemple 2.1. *Soit* $\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^{\times}$ *avec* m, n *premiers entiers entre eux, alors*

$$M(mx - n) = \max\{|m|, |n|\}.$$

Il est naturel de chercher des formules analogues pour des polynômes en plusieurs variables. La première telle formule a été montré par Smyth [13].

Théorème 2.2. *On a*

$$m(1 + x + y) = L'(\chi_3, -1),$$

où χ_3 *est le caractère de Dirichlet de conducteur* 3.

Par la suite, le travail de Deninger [8] suggère que, pour une polynômes $P \neq 0$, $m(P)$ est une période de Deligne d'un motif. Il conjecture aussi la formule suivante

$$m(1 + x + y + 1/x + 1/y) \stackrel{?}{=} L'(E_{15}, 0) = \frac{15}{4\pi^2} L(E_{15}, 2),$$

où E_{15} est une courbe elliptique de conducteur 15.

2.2 Les exemples de Boyd

Les auteur des articles [4] et [14] ont étudié un type spécial de polynôme P, qui sont appelé polynômes tempérés. Commençons par un polynôme $P(x, y) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$. Soit $\Delta(P)$ son polygone de Newton, c'est-à-dire l'enveloppe convexe des points $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ pour lesquels le coefficient de $x^m y^n$ dans P n'est pas zéro. Soit τ un côté de Δ et posons $\tau < \Delta$. On considère τ dans le sens des aiguilles d'une montre tel que $\tau(0)$,$\tau(1)$,... sont des points consécutifs dans τ et $\mathbb{Z}^2$. À chaque côté τ, on associe un polynôme

$$P_\tau(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\tau(k)} t^k \in \mathbb{C}[t],$$

où

$$P = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} c_{(m,n)} x^m y^n \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}].$$

Définition 2.2. Un polynôme $P(x, y) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ est dit tempéré si l'ensemble des racines de $\prod_{\tau < \Delta} P_\tau$ se compose uniquement des racines de l'unité. Une classe tempérée est une classe de polynômes tempérés.

Exemple 2.2. 1. *Considérons la famille de Hasse de courbes elliptiques*

$$P_k(x, y) = x^3 + y^3 + 1 - kxy,$$

Ils sont tempérés et ils ont un polygone de Newton avec les sommets $(0, 0)$*,* $(3, 0)$*,* $(0, 3)$ *(après la translation* $x \mapsto x - 1, y \mapsto y - 1$*) comme le montre la* FIGURE 1*.*

2. *Les polynômes*

$$P_k(x, y) = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k$$

sont tempérés. Ils ont un polygone de Newton avec les sommets $(0, 0)$*,* $(1, 0)$*,* $(0, -1)$*,* $(-1, 0)$ *comme le montre la* FIGURE 2*.*

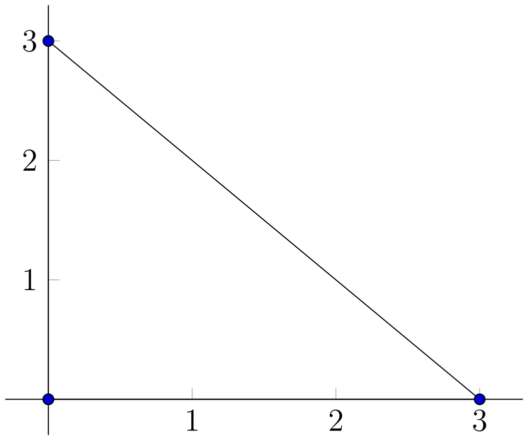

FIGURE 1

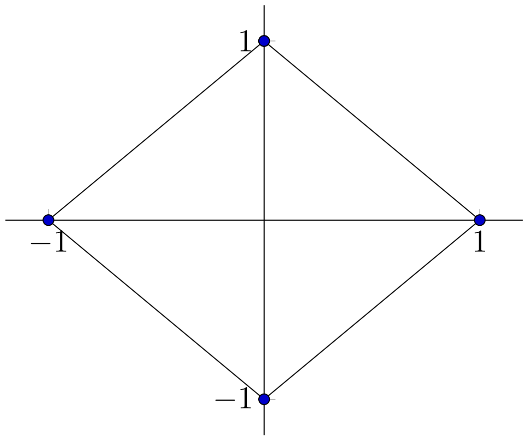

FIGURE 2

Le théorème suivant de [14, Théorème 10] nous donne une relation entre un polynôme tempéré et une application du régulateur.

Théorème 2.3. *Soit* $P(x, y) \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ *un polynôme tempéré, irréductible sur* $\overline{\mathbb{Q}}$ *et ne s'annulant pas sur le torus* $T^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 ||x| = |y| = 1\}$*. Soit* $C/\mathbb{Q}$ *la normalisation de la clôture projective de* $P = 0$*. On voit* x *et* y *comme éléments de* $\mathbb{Q}(C)$*. Alors*

$$m(P) = \frac{1}{2\pi} \langle \mathrm{reg}(x, y), [\gamma] \rangle,$$

pour un cycle non trivial $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$*.*

Pour une classe tempérée P_k, Boyd a conjecturé la propriété suivante.

Conjecture 2.1.

$$m(P_k) \sim_{\mathbb{Q}} L'(E_k, 0), \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ assez grand,}$$

où E_k *est le Jacobienne de la courbe* $C_k/\mathbb{Q}$ *définie par* $P_k = 0$*.*

Références

[1] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, VINITI Current problems in mathematics, 1984 ; Vol. 24 : pp. 181–238.

[2] S. Bloch, *Higher regulators in algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, Irvine Lecture Notes, 1977.

[3] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*, Annales Scientifiques École Normale Supérieure 7, 1974 ; pp. 235–272.

[4] D. W. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experimental Mathematics 7.1, 1998 ; pp. 37-82.

[5] F. Brunault, *Étude de la valeur en $s = 2$ de la fonction L d'une courbe elliptique*, Dissertation doctorale, Université Paris-Diderot-Paris VI, 2005.

[6] F. Brunault, *Régulateurs modulaires explicites via la méthode de Rogers-Zudilin*, Compositio Mathematica, 2017 ; 153 : pp. 1119-1152.

[7] P. Deligne, Théorie de Hodge II , IHES Pub. Math. 1971 ; no. 40 : pp. 5–57.

[8] C. Deninger, *Deligne Periods of Mixed Motives, K-Theory and the Entropy of Certain $\mathbb{Z}^n$-Actions.* Journal of the American Mathematical Society. 1997 Apr 1 ; Vol. 10 (2) : 259-81.

[9] H. Esnault et E. Viehweg, Deligne-Beilinson cohomology, *Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math. 4, Academic Press Boston, 1988 ; pp. 43–92.

[10] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Astérisque, 2005 ; 294(1).

[11] H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (Paris) 2, 1969 ; pp. 1–62.

[12] K. Rolshausen, *Elements explicites dans K_2 d'une courbe elliptique*, Dissertation doctorale, Université de Strasbourg I, 1996.

[13] C. J. Smyth, *On measures of polynomials in several variables*, Bull. Austral. Math. Soc. 23, 1981 ; No. 1 : pp. 49–63.

[14] F. R. Villegas, *Modular Mahler Measures I*, Topics in Number Theory. Mathematics and Its Applications, vol 467. Springer, Boston, MA, 1999.