Introduction au Domaine de Recherche : Stabilisation et Contrôle Exact des EDPs

HUI ZHU

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Préliminaire : Analyse Microlocale **2**
- 2.1 Transformation de Fourier 2
- 2.2 Calcul Pseudodifférentiel 3
  - 2.2.1 Quantification 3
  - 2.2.2 Classe des Symboles 3
  - 2.2.3 Symbole Principal 3
- 2.3 Calcul Paradifférentiel 4
  - 2.3.1 Paraproduit 4
  - 2.3.2 L'Opérateur Paradifférentiel 4
  - 2.3.3 Paralinéarisation 4
- 2.4 Calcul Semiclassique 5
- 2.5 Mesure de Défaut Microlocale Classique et Semiclassique 5

3 Contrôle Exact et Stabilisation d'Équation d'Onde **6**
- 3.1 Les Problèmes 6
- 3.2 Contrôle et Observabilité 8
  - 3.2.1 Méthode HUM et Observabilité pour Contrôle Exact 8
  - 3.2.2 Observabilité pour Stabilisation Forte 9
- 3.3 Stabilisation Forte avec Amortissement Continu 10
  - 3.3.1 Observabilité Faible 10
  - 3.3.2 Continuation Unique 11
  - 3.3.3 Compacité-Unicité 12
  - 3.3.4 Nécessité de la Condition du Contrôle Géométrique 12
- 3.4 Stabilisation Forte avec Amortissement Non-régulier 13
  - 3.4.1 Stabilisation Forte sur les Sphères 13
  - 3.4.2 Stabilisation Forte sur les Surfaces de Zoll d'Évolution 14

4 Contrôle Exact de l'Équation d'Onde de Surface sur Tores **15**
- 4.1 L'Équation et le Problème 15
- 4.2 Réduction à l'Équation Linéaire 16
- 4.3 Équation de Modèle 17

1 Introduction

Le problème de contrôle s'intéresse à un système dynamique, dominé par une équation différentielle,

$$\partial_t u - Au = 0, \tag{1.1}$$

de type ordinaire, ou partielle, ou bien pseudodifférentielle, ou paradifférentielle ; et l'opérateur A est ainsi choisi selon le contexte.

Le problème est de trouver, ou peut-être seulement prouver l'existence de force extérieur, notée F, de sorte que la solution du système forcé,

$$\partial_t u - Au = F \tag{1.2}$$

possède des propriétés requises. Par exemple, les deux propriétés principales qui nous intéressent le plus sont les suivantes.

1. **Stabilisation**, c'est-à-dire, la solution converge vers l'état d'équilibre (habituellement zéro).
2. **Contrôle Exact**, c'est-à-dire, pour tout état initial et tout état final, il existe une solution qui envoie le premier sur le derrière, en un certain temps $T > 0$.

En raison des natures distinctes des équations différentes, divers problèmes de contrôle peuvent être proposées, diverses conditions supplémentaires peuvent être ajoutées au contrôle F. Par exemple,

1. F est supportée dans un sous domaine ω,
2. F est le minimiseur de la norme L^2.

Les techniques pour résoudre les problèmes différents, ou bien le même problème pour des équations différentes, varient énormément (Voir [Zua2007] pour plus d'exemple). Par exemple, on n'a pas de raison pour exactement contrôler l'équation de la chaleur.

$$(\partial_t - \Delta)u = F,$$

à cause de l'effet de régularisation du demi groupe de la chaleur. Cependant, on peut s'interroger la possibilité de la **contrôlabilité approchée**, c'est-à-dire, la contrôlabilité exacte d'un sous ensemble d'état, dans un certain sens dense dans l'ensemble entier d'état ; ou bien la contrôlabilité nulle, c'est-à-dire, la controlabilité d'état d'équilibre.

Le but de cet article est de présenter principalement quelques problèmes, théorèmes (et leurs démonstrations) pour la stabilisation et le contrôle exact des équations hyperboliques/dispersives, notamment l'équation d'onde, et l'équation d'onde de surface (l'équation de water wave). Pour ce type d'équation, l'analyse microlocale sert comme un outil puissant dans l'analyse de la propagation d'énergie, qui est un élément essentiel pour bien comprendre le problème de Cauchy et du contrôle correspondant. En particulier, le problème du contrôle exact est bien adapté à de telles équations, et il est équivalent au problème du contrôle nul, grâce à sa nature réversible.

2 Préliminaire : Analyse Microlocale

Le nom "microlocale" vient du fait qu'on se localise simultanément en variable de position x et en variable de fréquence ξ, ou plus généralement, on se localise dans T^*M.

2.1 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier et la formule de la transformation inverse pour les fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont les suivantes :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.2}$$

Par continuation,

$$\mathcal{F} : u \mapsto \hat{u}$$

définit un opérateur borné sur L^2 et de $L^1 \to L^\infty$, et entre quelques espaces intermédiaires par interpolation.

2.2 Calcul Pseudodifférentiel

Voir [AG1991] et [Hör2007].

2.2.1 Quantification

Soit $a(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$. Définissons l'opérateur pseudodifférentiel $a(x,D)$ par

$$a(x,D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

On dit que a est le symbole de $a(x,D)$.

$$a(x,D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$$

définit un opérateur continu. Par dualité, cette définition s'étend sur l'espace des distributions tempérées.

$$a(x,D) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad \forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$$

2.2.2 Classe des Symboles

La définition de l'opérateur pseudodifférentiel peut s'étendre aussi à des symboles plus généraux, en particulier ceux qui ont une croissance polynomiale, donc les opérateurs différentiels peuvent être inclus dans l'étude.

Définissons les classes des symboles d'après Hörmander. Pour $m \in \mathbb{R}$, soit

$$S^m = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi) : |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \forall \alpha, \beta\}. \tag{2.4}$$

Alors $a(x,D)$ est bien défini pour $a \in S^m$. Soit

$$\Psi^m = \{a(x,D) : a \in S^m\}. \tag{2.5}$$

Si $a(x,D) \in \Psi^m$, et $b(x,D) \in \Psi^n$, alors

$$a(x,D) \circ b(x,D) \in \Psi^{m+n},\ [a(x,D), b(x,D)] \in \Psi^{m+n-1},\ a(x,D)^* \in \Psi^m. \tag{2.6}$$

2.2.3 Symbole Principal

Soit $a \in S^m$. S'il existe un $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times (\mathbb{R}^n_\xi \backslash \{0\}))$ qui est homogène d'ordre m en ξ, et un $r \in S^{m-1}$, une fonction de troncature $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ qui s'annule près de l'origine, et est égale à 1 pour $|\xi|$ assez grand, tel que

$$a(x,\xi) = \chi(\xi)b(x,\xi) + r(x,\xi), \tag{2.7}$$

alors on dit que $a(x,D)$ admet un symbole principal b. Il s'avère que le choix de b est déterminé par $a(x,D)$, il est donc légitime de l'appeler le symbole principal de $a(x,D)$, et on le dénote par

$$\sigma_m(a(x,D)) = b. \tag{2.8}$$

Pour un opérateur pseudodifférentiel qui admet un symbole principal, on a les formules de calcul suivants

$$\begin{aligned} \sigma_{m+n}(a(x,D) \circ b(x,D)) &= \sigma_m(a(x,D))\sigma_n(b(x,D)), \\ \sigma_{m+n-1}([a(x,D), b(x,D)]) &= \frac{1}{i}\{\sigma_m(a(x,D)), \sigma_n(b(x,D))\}. \\ \sigma_m(a(x,D)^*) &= \overline{\sigma_m(a(x,D))}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où $\{f,g\}$ est le crochet de Poisson,

$$\{f,g\} = \nabla_\xi f \cdot \nabla_x g - \nabla_x f \cdot \nabla_\xi g. \tag{2.10}$$

2.3 Calcul Paradifférentiel

Le calcul paradifférentiel est capable de traiter les équations avec des coefficients non-réguliers, pour lesquelles le calculs pseudodifférentiel échoue. Voir [Mét2008] pour une introduction détaillée.

2.3.1 Paraproduit

Une difficulté principale qu'on rencontre avec les coefficients non-réguliers est que l'opérateur de multiplication

$$u \mapsto au$$

défini par une fonction non-régulière, dit $a \in L^\infty$, n'est pas en général borné sur H^s sauf pour $s = 0$. En général, si $a \in H^r$, alors la multiplication par a est seulement bornée sur H^s pour $s \leq r$. Mais on peut le remplacer par l'opérateur de paraproduit, $u \mapsto T_a u$, qui est défini par

$$T_a u = S_{-N} a S_0 u + \sum_{k \geq 1} S_{k-N} a \Delta_k u, \tag{2.11}$$

où S_k est le projecteur spectral sur les fréquences plus petites que 2^k, alors que Δ_k est le projecteur spectral pour les fréquences entre 2^{k-1} et 2^k.

Il y a principalement deux avantages pour utiliser le paraproduit,

1. pour $a \in L^\infty$, T_a définit un opérateur borné H^s pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. for $a \in W^{r,\infty}$, la différence entre le produit et le paraproduit $R_a = a - T_a$ définit un opérateur régularisant de H^s dans H^{s+r}.

2.3.2 L'Opérateur Paradifférentiel

Pour définir l'opérateur paradifférentiel pour un symbole polynomial (c'est-à-dire le symbole pour un opérateur differentiel), on remplace simplement la multiplication par des coefficients par le paraproduit. Pour les symboles généraux, on observe que le paraproduit ne fait rien qu'une troncature pour les coefficients dans l'espace de phase pour que les supports de leurs fréquences correspondent à la variable x soit majoré par les supports de variable ξ. Au vu de cela, on choisit une troncature admissible $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\eta \times \mathbb{R}^n_\xi)$, telle que

1. pour un certain $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$,

$$\begin{cases} \psi(\eta, \xi) = 1, & |\eta| \leq \varepsilon_1(1 + |\xi|), \\ \psi(\eta, \xi) = 0, & |\eta| \geq \varepsilon_2(1 + |\xi|). \end{cases} \tag{2.12}$$

2. pour tout $\alpha,\ \beta$,

$$|\partial^\alpha_\eta \partial^\beta_\xi \psi(\eta, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{-|\alpha|-|\beta|}. \tag{2.13}$$

Alors pour un symbole $a = a(x, \xi)$, l'opérateur paradifférentiel T_a est défini par

$$T_a = \sigma^\psi_a(x, D), \tag{2.14}$$

où

$$\sigma^\psi_a(x, \xi) = \psi(D, \xi) a(x, \xi) \tag{2.15}$$

2.3.3 Paralinéarisation

La formule suivante de paralinéarisation généralise la notion de paraproduit. Elle est extrêmement utile dans les estimations non-linéaires.

Soit $F \in C^\infty : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction lisse telle que $F(0) = 0$. Si $u \in H^s$ avec $s > d/2$, alors

$$F(u) = T_{F'(u)} u + R, \tag{2.16}$$

où $R \in H^{2s-d/2}$. Il y a principalement deux avantages à cette formule,

1. le terme de reste R a une régularité très haute, presque deux fois celle de u ;
2. bien que $T_{F'(u)}u$ ait un ordre de non-linéaire égale à celui de $F(u)$, on ne requit qu'une régularité très petite pour $F'(u)$ dans l'estimation.

2.4 Calcul Semiclassique

Dans le formule de quantification classique, on a la correspondance suivante

$$x \mapsto x, \ \xi \mapsto D_x.$$

Dans le cadre semiclassique, on introduit un paramètre petit h qui tend vers zéro, ressemblant à la constante de Planck $\hbar$, et fait la correspondance semiclassique,

$$x \mapsto x, \ \xi \mapsto hD_x.$$

Pour un symbole a, l'opérateur semiclassique correspondant est donc noté par $a(x, hD)$.

Le symbole principal dans le cadre de quantification classique est déterminé par l'homogénéité en variable ξ. Cependant, dans le cadre de quantification semiclassique, il est déterminé par l'ordre de h. Si un opérateur semiclassique $A = a_0(x, hD) + ha_1(x, hD) + h^2 a_2(x, hD) + \cdots$, alors son symbole principal est $\sigma(A) = a(x, \xi)$, puisque les autres termes sont d'ordre supérieur en h.

Voir [Zwo2012] pour un introduction approfondie.

2.5 Mesure de Défaut Microlocale Classique et Semiclassique

Un problème typique dans l'étude des EDPs est de passer d'une limite faible à une limite forte. Par exemple, étant donnée une suite $(u_n)_n$ convergeant vers 0 dans L^2_{loc}, alors à quelle distance est-elle d'une suite qui converge forte vers 0 dans L^2_{loc} ?

Il est tentant de travailler avec le mesure de défaut

$$\mu_n = |u_n|^2 \, \mathrm{d}x,$$

mais cela ne nous donne pas toutes les informations. En effet, il y a précisément deux types d'empêchements entre une limite faible et une limite forte : la concentration (de la norme L^2), et l'oscillation (qui est en effet la concentration en variable de Fourier). La mesure de défaut usuelle ne décrit que la concentration. P. Gérard et L. Tartar ont trouvé indépendamment la mesure de défaut microlocale pour étudier ce problème. Voir [Gér1991a, Bur1997].

Pour faire cela, on considère la suite de fonctionnelle

$$a(x, \xi) \mapsto (a(x, D)u_n, u_n)_{L^2}$$

qui est définit pour tout $a \in S^0$, à support compact en x. Quelle est sa limite ?

Théorème 2.1. *Soit M une variété riemannienne, et soit $(u_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers 0 dans $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, alors, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$, et une mesure de Radon positive $\mu = \mu_0[u_{n_k}]$, définit sur S^*M, tel que pour tout $A \in \Psi^0_{\mathrm{comp}}$ à support compact en x, qui admet un symbole principal, on a*

$$\lim_{k \to \infty} (Au_{n_k}, u_{n_k})_{L^2} = \int_{S^*M} \sigma_0(A)(x, \xi) \, \mathrm{d}\mu(x, \xi). \tag{2.17}$$

En particulier, la convergence forte de $(u_{n_k})_k$ est équivalent à $\mu = 0$.

On dit que u_n est pure si la formule ci-dessus est vérifié par u_n lui-même.

Un résultat similaire pour des régularités d'ordres supérieures.

Théorème 2.2. *Soit M une variété riemannienne, et soit $(u_n)_n$ une suite convergeant faiblement vers 0 dans $H^s_{\text{loc}}(M)$, alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$, et une mesure de Radon positive $\mu = \mu_s[u_{n_k}]$ définit sur S^*M, tel que pour tout $A \in \Psi^{2s}_{\text{comp}}$ à support compact en x, qui admet un symbole principal, on a*

$$\lim_{k\to\infty} (Au_{n_k}, u_{n_k})_{H^{-s},H^s} = \int_{S^*M} \sigma_{2s}(A)(x,\xi)\,\mathrm{d}\mu(x,\xi). \tag{2.18}$$

Les choses deviennent plus intéressante quand u_n sont des solutions d'une certaine EDP, dit $Pu_n = 0$ pour un $P \in \Psi^m$ qui admet un symbole principal. En général, si u_n est pure, alors Pu_n est pure, et

$$\mu_{s-m}[Pu_n] = |\sigma_m(P)|^2 \mu_s[u_n]. \tag{2.19}$$

En particulier, comme $Pu_n = 0$, on voit immédiatement que

$$\operatorname{supp} \mu_s[u_n] \subset \{\sigma_m(P) = 0\}. \tag{2.20}$$

De plus, supposons que P soit autoadjoint, c'est-à-dire $P = P^*$, alors en commutant l'équation avec $A \in \Psi^{2s-m+1}$, et par le calcul symbolique, on obtient la formule de propagation,

$$\int_{S^*M} \{\sigma_m(P), \sigma_{2s-m+1}(A)\}\,\mathrm{d}\mu(x,\xi) = 0,$$

ou d'une manière équivalente,

$$H_{\sigma_m(P)}\mu = 0. \tag{2.21}$$

Dans le cadre semiclassique, on a des résultats similaires. Voir [Gér1992b, Bur1997, Zwo2012]

Théorème 2.3. *Soit $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^2_{\text{loc}}(M)$, alors pour toute suite $h_n \to 0$, il existe une sous-suite $(h_{n_k})_k$ et $(u_{n_k})_k$, et un mesure de Radon positive définit sur T^*M tel que pour tout $a \in C^\infty_c(T^*M)$,*

$$\lim_{k\to\infty} (a(x, h_{n_k}D_x)u_{n_k}, u_{n_k})_{L^2} = \int_{T^*M} a(x,\xi)\,\mathrm{d}\mu(x,\xi). \tag{2.22}$$

Si $P(x, h_nD_x)u_n = O(h_n)_{L^2_{\text{loc}}}$, alors $\operatorname{supp}\mu \subset \{p(x,\xi) = 0\}$. De plus, si $P(x, h_nD_x)u_n = o(h_n)_{L^2_{\text{loc}}}$, alors $H_p\mu = 0$.

La démonstration est exactement la même. On remplace seulement le rôle de l'homogénéité par l'ordre de h.

La vitesse de la convergence (vers 0) de h joue un rôle très important comme une échelle avec laquelle on mesure la convergence de u_n. En effet, si h est choisi de sorte qu'il converge vers 0 extrêmement vite, alors la mesure μ peut s'annuler, tandis que la norme L^2 de u_n est identiquement égale à 1.

3 Contrôle Exact et Stabilisation d'Équation d'Onde

3.1 Les Problèmes

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, sans bord. (Bien qu'on a toutes les raison pour considérer le cas général avec bord, et étudier le problème de **contrôle à bord**, on décide de garder la simplicité de cette exposition, et de se limiter à l'étude du **contrôle intérieur**.) Soit $\Delta = \Delta_g$ l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique riemannienne, et ω un sous-ensemble ouvert de M. On considère le problème du contrôle intérieur localisé dans ω en temps

$T > 0$. Comme mentionné ci-dessus, la controlabilité exacte de l'équation d'onde est équivalent à la contrôlabilité nulle.

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 1_w \cdot F, & \mathbb{R}_t \times M \\ (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1) & \in H^1(M) \times L^2(M). \\ (u, \partial_t u)|_{t=T} = (0, 0) \end{cases} \tag{3.1}$$

Il apparaît que la réponse pour cette question est étroitement liée au choix de ω. En effet, les ondes se propagent selon les géodésiques à la vitesse 1. Si ω ne rencontre pas chaque géodésique, ou bien si le temps T est trop petit pour que quelques géodésiques ne peuvent pas se propager dans ω en temps T, on n'a pas de raison d'espérer l'existence d'un contrôle.

Question 3.1. *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes posées sur ω pour qu'on ait la contrôlabilité exacte pour l'équation d'onde ?*

Un autre problème, la stabilisation des ondes amorties, qui semble différent, partage beaucoup de similarités dans la démonstration et la philosophie se cachant derrière.

$$(\partial_t^2 - \Delta + a\partial_t)u = 0. \tag{3.2}$$

Ici $a \in L^\infty$ est une fonction positive ; et le terme $a\partial_t u$ s'appelle le terme d'amortissement, parce qu'il cause la décroissance d'énergie. En effet, l'énergie définie par

$$E(u, t) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 \tag{3.3}$$

vérifie l'identité suivante

$$E(u, t) = E(u, 0) - \int_0^t \int_M a(x)|\partial_s u(s, x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}s. \tag{3.4}$$

On se demande si ce terme d'amortissement stabilisera les ondes, c'est-à-dire, les énergies décroitront vers zéro quand le temps t tend vers $+\infty$, ou physiquement, les ondes s'arrêteront d'osciller et de se propager en temps $+\infty$.

Question 3.2 (Stabilisation Faible)**.** *Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes posées sur a pour qu'on ait la propriété de la stabilisation faible l'équation d'onde amortie, c'est-à-dire, pour tout onde amortie u,*

$$\lim_{t \to +\infty} E(u, t) = 0. \tag{3.5}$$

Le nom "stabilisation faible" se distingue la notion de la "stabilisation forte", qui demande de plus que la décroissance de l'énergie soit uniforme pour toute onde amortie.

Question 3.3 (Stabilisation Forte)**.** *Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes posées sur a peut-on espérer l'existence d'une fonction positive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, tel que pour toute onde amortie,*

$$E(u, t) \leq E(u, 0) \times f(t), \quad \forall t > 0. \tag{3.6}$$

La stabilisation faible ne nous intéresse pas beaucoup, comme il s'avère que cela est toujours le cas, sauf si a s'annule partout. Cela s'explique facilement en considérant les translation en temps par Δt l'onde amortie, qui tendra vers une onde (non-amortie) v quand $\Delta \to +\infty$ par l'effet de l'amortissement. De plus, $\partial_t v = 0$ sur le support de a, c'est-à-dire, elle n'oscille pas dans le domaine d'amortissement. Puis on l'écrit comme une superposition des ondes stationnaires. Chaque onde stationnaire est une fonction propre de Laplacien, modulé par un facteur de temps. Comme tous ces ondes stationnaires oscillent de façon indépendantes, il faut donc que chacune d'entre elles n'oscillent pas sur le support de a. En conséquence, tous ces fonctions propres du Laplacien s'annulent sur le support de a, dont la mesure est non-nulle. Cela contredira le fait que les fonctions propres du Laplacien ne s'annulent que dans un ensemble de mesure nulle, si cette solution de la limite ne s'annule pas.

Le problème de la stabilisation forte est beaucoup plus intéressant et, comme le problème du contrôle exact, est étroitement lié à la géométrie de la variété. En effet, il est très naturel de considérer la condition suivante du contrôle géométrique, qui a été inspirée par les lois physiques d'optique géométrique, notamment la loi de propagation et la vitesse finie de la propagation.

Définition 3.4 (Condition du Contrôle Géométrique)**.** Soit $\omega \subset M$ un sous-domaine, soit $a \in C^0(M)$ une fonction positive, et soit $T > 0$. Alors, on dit que

1. ω satisfait GCC si toute géodésique de M entrera finalement dans ω.
2. ω satisfait GCC_T si toute géodésique de M entrera dans ω en temps $\leq T$.
3. a satisfait GCC si $\operatorname{Int}\operatorname{supp} a$ satisfait GCC.
4. a satisfait GCC_T si $\operatorname{Int}\operatorname{supp} a$ satisfait GCC_T.

Les résultats classiques affirment que GCC est équivalent au contrôle exact, et la stabilisation avec un amortissement continue. Voir [BLR1992].

Théorème 3.5. *L'équation d'onde est exactement contrôlable en temps T si et seulement si ω satisfait GCC_T.*

Théorème 3.6. *Si $a \in C^0(M)$, alors l'équation d'onde amortie a la propriété de la stabilisation forte si et seulement si a satisfait GCC.*

Cependant, pour l'amortissement non-régulier, c'est-à-dire, $a \in L^\infty$, le problème reste ouvert. Aucune condition équivalente a été trouvée, sauf pour une condition nécessaire, et une condition suffisante, qui viennent trivialement de la démonstration du cas continue.

1. (Condition Nécessaire) Toute géodésique de M intersecte avec $\operatorname{supp} a$.
2. (Condition Suffisante) Toute géodésique de M entre l'ouvert

$$U(a) = \bigcup_{\epsilon>0} \operatorname{Int}\{a - \epsilon \geq 0\}, \tag{3.7}$$

mais aucune d'elles est une condition exacte, puisqu'il n'est pas difficile de construire des contre-exemples. Jusqu'à présent, les seuls résultats non-triviaux connus sont quelques cas particuliers, qui possèdent la propriété de la stabilisation forte, sans satisfaire cette condition suffisante. Mais quand même ils contiennent pas mal de considérations importantes vers l'essence du problème. Cet article présentera tout d'abord les esquisses de la démonstration de ces deux théorèmes classiques, et puis un résultat récent fait par l'auteur d'un tel cas particulier sur la stabilisation forte d'onde amortie. Voir [Zhu2016].

3.2 Contrôle et Observabilité

3.2.1 Méthode HUM et Observabilité pour Contrôle Exact

J. L. Lions est le premier à avoir trouvé, par un argument purement d'analyse fonctionnelle, qui s'appelle "the Hilbert Uniqueness Method (HUM)", que la controlabilité exacte pour un système linéaire est équivalente à une inégalité importante, qui s'appelle l'inégalité d'observabilité, du système dual.

Prenant l'équation d'onde comme un exemple. On considère l'équation du contrôle,

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 1_\omega \cdot F, \\ (u, \partial_t u)|_{t=T} = (0,0), \end{cases}$$

et définit l'opérateur d'image $\mathcal{R}$ par

$$\mathcal{R} : F \in L^2((0,T) \times \omega) \mapsto (u, \partial_t u)|_{t=0} \in H^1(M) \times L^2(M). \tag{3.8}$$

Puis on considère l'équation duale,

$$\begin{cases}(\partial_t^2 - \Delta)v = 0, \\ (v, \partial_t v)|_{t=0} = (v_0, v_1) \in L^2(M) \times H^{-1}(M),\end{cases}$$

et définit l'opérateur de solution $\mathcal{S}$ par

$$\mathcal{S} : (v_0, v_1) \in L^2(M) \times H^{-1}(M) \mapsto 1_\omega \cdot v \in L^2((0,T) \times \omega). \tag{3.9}$$

On vérifie directement avec une intégration par partie la dualité suivante entre ces deux opérateurs.

Définissons d'abord la dualité entre $H^1 \times L^2$ et $L^2 \times H^{-1}$ par

$$\langle (u_0, u_1), (v_0, v_1) \rangle_{H^1 \times L^2, L^2 \times H^{-1}} = \langle u_0, v_1 \rangle_{H^1 \times H^{-1}} - \langle u_1, v_0 \rangle_{L^2, L^2}, \tag{3.10}$$

alors,

Proposition 3.7. *Soit $F \in L^2((0,T)\times\omega)$, $(v_0, v_1) \in L^2 \times H^{-1}$, et soit $(u_0, u_1) = \mathcal{R}F \in H^1 \times L^2$. Alors,*

$$\langle u_0, v_1 \rangle_{H^1 \times H^{-1}} - \langle u_1, v_0 \rangle_{L^2, L^2} = \int_0^T \int_\omega F \cdot v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t,$$

ou dans une forme compacte,

$$\langle \mathcal{R}F, (v_0, v_1) \rangle_{H^1 \times L^2, L^2 \times H^{-1}} = \langle F, \mathcal{S}(v_0, v_1) \rangle_{L^2((0,T)\times\omega)}. \tag{3.11}$$

La contrôlabilité nulle (qui est dans ce cas là équivalente à la contrôlabilité exacte) ne dit rien d'autre que la surjectivité de $\mathcal{R}$. Dans le cas de la dimension finie, cela est équivalent au fait que l'opérateur dual $\mathcal{S}$ soit injectif. Cependant, comme on est dans le cas de la dimension infinie (l'espace de Sobolev), l'injectivité de $\mathcal{S}$ n'implique que le fait que l'image de $\mathcal{R}$ soit dense (dans $L^2((0,T)\times\omega)$). Pour obtenir la surjectivité de $\mathcal{R}$, la coercivité de $\mathcal{S}$ est requise, qui est attribuée le nom d'"observabilité".

Théorème 3.8. *Les deux énoncés suivants sont équivalents,*

1. *(Contrôlabilité Exacte) $\mathcal{R}(L^2((0,T) \times \omega)) = H^1 \times L^2$,*
2. *(L'Inégalité de l'Observabilité) Pour un certain $C > 0$ et toute donnée $(v_0, v_1) \in L^2 \times H^{-1}$,*

$$\|v_0, v_1\|^2_{L^2 \times H^{-1}} \le C \|S(v_0, v_1)\|^2_{L^2((0,T)\times M)}. \tag{3.12}$$

La démonstration est un argument d'analyse fonctionnelle classique, qui utilise le théorème de l'application ouverte dans une direction, et le théorème de Lax-Milgram dans l'autre direction.

3.2.2 Observabilité pour Stabilisation Forte

Quant à la stabilisation forte, on joue simplement avec l'identité de l'énergie, et obtient son équivalence avec une autre version d'inégalité de l'observabilité.

$$E(u, 0) \le C \int_0^T \int_M a(x) |\partial_t u(t,x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t. \tag{3.13}$$

Théorème 3.9. *Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *L'équation d'onde amortie a la propriété de la stabilisation forte.*
2. *Décroissance exponentielle de l'énergie, c'est-à-dire, pour un certain $C > 0$ et $\beta > 0$ et pour toute onde amortie u,*

$$E(u, t) \le C e^{-\beta t} E(u, 0), \quad \forall t \ge 0.$$

3. L'inégalité de l'observabilité est vérifiée pour un certain $T > 0$ et $C > 0$ et toute onde amortie.

4. L'inégalité de l'observabilité est vérifiée pour un certain $T > 0$ et $C > 0$ et toute onde (non-amortie).

Pour montrer l'équivalence entre les deux dernier énoncés, on met le terme d'amortissement de l'autre côté de l'équation, et applique la formule de Duhamel. On présentera seulement la démonstration que l'observabilité implique la décroissance exponentielle de l'énergie (qui trivialement implique, par définition, la stabilisation forte).

Démonstration. En utilisant en même temps l'identité de l'énergie et l'inégalité de l'observabilité,

$$E(u,T) \leq (1 - C^{-1})E(u,0) \leq \alpha E(u,0)$$

avec $\alpha \in (0,1)$. En itérant,

$$E(u,nT) \leq \alpha^n E(u,0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En prenant $\beta = -\ln\alpha/T$, la démonstration est complète. □

3.3 Stabilisation Forte avec Amortissement Continu

On montrera dans cette section l'observabilité de la stabilisation forte, sous la condition du contrôle géométrique, quand le coefficient d'amortissement est continu. La démonstration pour l'observabilité du contrôle exact est similaire.

3.3.1 Observabilité Faible

On montre par l'absurde l'observabilité faible suivante, en utilisant la propagation de l'énergie.

$$E(u,0) \lesssim \int_0^T \int_M a(x)|\partial_t u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \|\partial_t u(0)\|^2_{H^{-1}} + \|\nabla u(0)\|^2_{H^{-1}}. \tag{3.14}$$

Les termes restes relativement compacts serviront pour identifier des limites faible comme zéro, pour qu'on puisse utiliser le mesure microlocale. Supposons que cette observabilité faible soit fausse, alors il existe une suite des données initiales $(u_0^n, u_0^1) \in H^1 \times L^2$ et des solutions correspondantes u^n, telles que

$$E(u^n,0) = 1, \quad \int_0^T \int_M a(x)|\partial_t u^n(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = o(1), \quad \|\partial_t u(0)\|_{H^{-1}} = 1, \quad \|\nabla u(0)\|^2_{H^{-1}} = o(1).$$

Quitte à extraire une sous-suite, (u_0^n, u_1^n) converge faiblement vers 0 dans $H^1 \times L^2$; en conséquence, u^n converge faiblement vers 0 in $L^\infty(H^1) \cap W^{1,\infty}(L^2)$.

Rappelons que,

$$\sigma_2(-\Delta)(x,\xi) = g_x^*(\xi,\xi), \tag{3.15}$$

où $g^* = g^{-1}$ est l'inverse de la matrice de la métrique riemannienne. Choisissons le symbole,

$$\lambda(x,\xi) = \sqrt{g_x^*(x,\xi)},$$

et puis l'opérateur $\Lambda \in \Psi^1(M)$ de sorte que $\sigma_1(\Lambda) = \lambda,\ \Lambda = \Lambda^*$. On a donc la décomposition suivante,

$$-(\partial_t^2 - \Delta) = (D_t - \Lambda)(D_t + \Lambda) - R = (D_t + \Lambda)(D_t - \Lambda) - R,$$

pour un certain $R \in \Psi^0(M)$. Définissons les deux demi-ondes,

$$v_\pm^n = (D_t \mp \Lambda)u^n \tag{3.16}$$

qui satisfont les équations de demi-onde

$$(D_t \pm \Lambda)v_\pm = Ru^n. \tag{3.17}$$

Par un argument technique (qui n'est pas un problème dans une géométrie plate), il est possible de négliger le terme de reste, et propager l'énergie selon les trajectoires du symbole principal, $\tau \pm \lambda$, qui est dans ce cas là le flot géodésique.

$$\begin{aligned}\mu_t[v^n_\pm] &= \phi^*_t \mu[v^n_\pm(0)] \\ &= \phi^*_t \mu[\Lambda u^n_0 \mp \frac{1}{i} u^n_1] \\ &= \phi^*_t(\mu[\Lambda u^n_0] + \mu[u^n_1] + \pm 2\Im \mu[\Lambda u^n_0, u^n_1]).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Notons que, l'énergie de u^n est (asymptotiquement) le somme des énergies des deux demi-ondes $v^n_\pm$,

$$E(u^n, t) = \frac{1}{4}\big(\|v^n_+(t)\|^2_{L^2} + \|v^n_-(t)\|^2_{L^2}\big) + o(1).$$

En générale, si on définit l'énergie microlocale par

$$E_A(u^n, t) = \frac{1}{2}\big((A\partial_t u^n(t), \partial_t u^n(t))_{L^2,L^2} + (A(-\Delta)u^n(t), u(t))_{H^{-1},H^1}\big), \quad \forall A \in \Psi^0(M), \tag{3.19}$$

alors, en utilisant les résultats ci-dessus, et l'orthogonalité de ces deux demi-ondes,

$$\mu[v^n_+] \perp \mu[v^n_-] \tag{3.20}$$

qui vient du fait que les mesures sont supportées de façon disjointe, on obtient donc l'analogue de la décomposition au sens microlocal,

$$\begin{aligned}E_A(u^n) &= \frac{1}{4}\big((Av^n_+(t), v^n_+(t))_{L^2} + (Av^n_-(t), v^n_-(t))_{L^2}\big) + o(1) \\ &= \frac{1}{4}\int_{T^*M} \sigma_0(A)\, \mathrm{d}(\mu[v^n_+] + \mu[v^n_-]) + o(1)\end{aligned} \tag{3.21}$$

Encore par orthogonalité,

$$\mu[D_t u^n] = \mu[\frac{1}{2}(v^n_+ + v^n_-)] = \frac{1}{2}(\mu[v^n_+] + \mu[v^n_-]), \tag{3.22}$$

et par le fait qui vient de l'hypothèse que,

$$\operatorname{supp} \mu[D_t u^n] \cap (0, T) \times \{a > 0\} = \emptyset, \tag{3.23}$$

on déduit de la loi de propagation de $\mu[v^n_\pm]$ que

$$\mu[v^n_\pm(0)] = 0, \tag{3.24}$$

puisque toute géodésique entre dans $\{a > 0\}$ en temps T. Cela contredit le fait que

$$1 \equiv E(u^n, 0) = \frac{1}{4}(|\mu[v^n_+(0)]| + \mu[v^n_-(0)]) + o(1).$$

3.3.2 Continuation Unique

Un résultat de la continuation unique est nécessaire pour l'argument suivant de compacité-unicité qui conclut la démonstration. Définissons l'espace nul,

$$\mathcal{N}(T) = \{(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2 : \int_0^T \int_M a(x)|u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0\}$$

$$\simeq \{u : (\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \int_0^T \int_M a(x)|u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0\},$$

muni de la norme $\|u_0, u_1\|_{H^1\times L^2}$. Le but est de montrer que

$$\mathcal{N}(T) = \{0\}. \tag{3.25}$$

En effet, par l'observabilité faible, la norme $H^1 \times L^2$ est équivalente à la norme $L^2 \times H^{-1}$ dans $\mathcal{N}(T)$; donc $\mathcal{N}(T)$ est un espace vectoriel normé qui est de plus compact par le théorème de l'injection compacte de Rellich, en conséquence, il est de dimension finie.

$$\dim \mathcal{N}(T) < \infty.$$

Notons que cette compacité nous permet de différentier l'équation d'onde par ∂_t dans $\mathcal{N}(T)$ (en effet, comme la dimension de $\mathcal{N}(T)$ est discrète et monotone en T, elle est localement constante ; donc on peut supposer que $\dim \mathcal{N}(T)$ est constant entre $(T_0, T_{0+\varepsilon})$) pour vérifier que $\mathcal{N}(T)$ soit invariant par ∂_t qui est, par définition,

$$\partial_t : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \quad u \mapsto \partial_t u. \tag{3.26}$$

Comme $\partial_t^2 = \Delta$ dans l'espace d'onde, au moins au sens de distribution ; mais en effet au sens exact dans $\mathcal{N}(T)$, on en déduit donc que $\mathcal{N}(T)$ est invariant par l'action de Δ,

$$-\Delta : \mathcal{N} \to \mathcal{N} \quad u \mapsto -\Delta u. \tag{3.27}$$

Dans un espace de dimension finie, un opérateur linéaire admet toujours une valeur propre, dit pour un certain u non-nul,

$$\partial_t u = \lambda u, \quad -\Delta u = \lambda^2 u, \tag{3.28}$$

où $\lambda \neq 0$ (si on jette la fonction propre constante). En conséquence,

$$u = \lambda^{-1}\partial_t u$$

s'annule sur $(0,T) \times \{a > 0\}$. La continuation unique de Laplacien montre donc $u \equiv 0$, qui nous donne une contradiction.

3.3.3 Compacité-Unicité

Pour tuer les termes de reste compacts dans l'observabilité faible, il est classique d'utiliser l'argument de compacité-unicité qui, qui est aussi un argument par l'absurde. On prend donc une suite de données initiales $(u_0^n, u_1^n) \in H^1 \times L^2$, en notant u^n les solutions correspondantes, telles que,

$$E(u^n, 0) = 1, \quad \int_0^T \int_M a(x)|\partial_t u^n(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = o(1).$$

Quitte à extraire une sous-suite, (u_0^n, u_1^n) converge faiblement dans $H^1 \times L^2$, et donc fortement dans $L^2 \times H^{-1}$ par l'injection compacte de Sobolev. Par l'observabilité faible, (u_0^n, u_1^n) est une suite de Cauchy dans $H^1 \times L^2$. Passant à la limite, (u_0^n, u_1^n) converge fortement dans $H^1 \times L^2$ vers un certain $(u_0, u_1) \in \mathcal{N}$, qui est une contradiction puisque évidement $E(u, 0) = 1$.

3.3.4 Nécessité de la Condition du Contrôle Géométrique

Si la condition du contrôle géométrique n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, il existe un géodésique qui n'entre jamais dans la région d'amortissement $\{a > 0\}$, alors on peut construire une suite de données initiales qui se concentre microlocalement en un point avec une direction tangente par rapport à cette géodésique. Ainsi les énergies des solutions correspondante se concentreront sur cette géodésique, et n'ont aucune raison d'être affecté par l'amortissement supporté loin.

3.4 Stabilisation Forte avec Amortissement Non-régulier

Comment définir le condition du contrôle géométrique pour l'amortissement non-régulier ? Rappelons la définition qui semble naturelle : Toute géodésique entre dans l'ouvert

$$U(a) = \bigcup_{\epsilon>0} \mathrm{Int}\,\{a - \epsilon \geq 0\}. \tag{3.29}$$

Cette condition généralise évidement la définition pour l'amortissement continue, et donne une minoration localement strictement positive pour a vérifiant cette condition, qui est important pour nous donner une convergence localement forte.

Malheureusement, cette condition n'est pas nécessaire, bien qu'elle soit bien suffisant par un argument similaire traitant l'amortissement continu ; en effet, ce sont des géodésiques qui touchent $\partial U(a)$ sans y entrer qui posent le problème.

3.4.1 Stabilisation Forte sur les Sphères

L'exemple le plus facile est $M = \mathbb{S}^d$, et $a(x) = 1_{\mathbb{S}^d_+}(x)$. Bien que la condition du contrôle géométrique ne soit pas vérifiée, on a quand même la stabilisation forte, grâce à la distribution spectrale du Laplacien sphérique, et le symétries des harmoniques sphériques.

D'abord, rappelons que le spectre du Laplacien sphérique $-\Delta$ sur $\mathbb{S}^d$,

$$\mathrm{spec}(-\Delta + \frac{(d-1)^2}{4}) = \{(n + \frac{d-1}{2})^2 : n \in \mathbb{N}\}. \tag{3.30}$$

Au vu de ceci, il est préférable de travailler avec l'équation perturbée

$$(\partial_t^2 - \Delta + \frac{(d-1)^2}{4})u = 0 \tag{3.31}$$

plutôt que l'équation d'onde usuelle, parce que

1. l'inégalité de l'observabilité de ces deux équations sont équivalentes ;
2. la solution de l'équation perturbée s'écrit avec une meilleure forme en séries de Fourier de sorte que les facteurs en temps sont orthogonaux.

Soit E_n l'espace de harmoniques sphériques de degré n ; et écrivons la donnée initiale comme

$$u_0 = \sum_{n\geq 0} u_{0,n}, \quad u_1 = \sum_{n\geq 0} u_{1,n},$$

avec $u_{i,n} \in E_n$. Alors la solution s'écrit comme (quand $d \geq 2$)

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 0} e^{it(n+\frac{d-1}{2})} u_n^+(x) + e^{-it(n+\frac{d-1}{2})} u_n^-(x), \tag{3.32}$$

où

$$u_n^+ + u_n^- = u_{0,n}, i(n + \frac{d-1}{2})(u_n^+ - u_n^-) = u_{1,n}. \tag{3.33}$$

Prenant le temps d'observation $T = 2\pi$, et utilisons le théorème de Fubini,

$$\int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{S}^d} a(x)|\partial_t u(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{S}^d} a(x) \sum_{n\geq 0} \big(n + \frac{d-1}{2}\big)^2 \big(|u_n^+(x)|^2 + |u_n^-(x)|^2\big)\,\mathrm{d}x. \tag{3.34}$$

D'autre part,

$$E(u,0) \lesssim \int_{\mathbb{S}^d} \sum_{n\geq 0} \big(n + \frac{d-1}{2}\big)^2 \big(|u_n^+(x)|^2 + |u_n^-(x)|^2\big)\,\mathrm{d}x, \tag{3.35}$$

cela nous ramène à la considération de l'observabilité des harmoniques sphériques.

$$\|a^{1/2} u_n^\pm\|_{L^2} = \|u_n^\pm\|_{L^2(\mathbb{S}^d_+)} \gtrsim \|u_n^\pm\|_{L^2}, \tag{3.36}$$

qui est évidente, puisque pour $v_n \in E_n$, $v_n(-x) = (-1)^n v_n(x)$.

3.4.2 Stabilisation Forte sur les Surfaces de Zoll d'Évolution

[Zhu2016] généralise ce résultat (qui à l'origine dû à G. Lebeau) en les surfaces de Zoll d'évolution. Les variétés de Zoll, par définition, sont des variétés riemanniennes sur lesquelles les géodésiques sont fermées, et ont la même période. Une surface de Zoll d'évolution, dit Σ, est une variété de Zoll de dimension 2 sur laquelle $\mathbb{S}^1$ agit d'une manière lisse, fidèle et isométrique. De plus, il ressemble beaucoup à $\mathbb{S}^2$, de sorte que les pôles, les méridiens, les parallèles (l'équateur particulièrement), et par conséquent les hémi-surfaces sont bien définis. L'amortissement sera la fonction indicatrice de l'hémi-surface supérieure, $a(x) = 1_{\Sigma^+}$.

Cette généralisation se démontre par une stratégie similaire. Premièrement, le spectre du Laplacien sur une variété de Zoll ressemble beaucoup à celui du Laplacien sphérique. En effet (voir [Bes2012]), pour un certain $A > 0$ et $\beta > 0$,

$$\operatorname{spec}(-\Delta) \subset \bigcup_{\mathbb{N}\ni n\geq 1} ((n+\beta/4)^2 - A, (n+\beta/4)^2 + A). \tag{3.37}$$

Alors, au lieu de modifier $-\Delta$ par la constante $\frac{(d-1)^2}{4}$, on le modifiera par un opérateur borné, K sur L^2, tel que

$$\operatorname{spec}(-\Delta + K) \subset \{(n+\beta/4)^2 : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}, \tag{3.38}$$

et s'occupe de l'équation

$$(\partial_t^2 - \Delta + K)u = 0. \tag{3.39}$$

Malheureusement, les fonctions propres du Laplacien, ou plutôt celles de $-\Delta + K$, sur une variété de Zoll ne possèdent généralement pas suffisamment de symétries pour qu'on puisse conclure l'observabilité comme ci-dessus. On se limitera aux surfaces de Zoll d'évolution, parce que la géométrie est mieux comprise. Comme la métrique est invariante par rotation, le Laplacien commute donc avec D_φ où φ est le variable de longitude (l'angle de rotation induit par l'action de $\mathbb{S}^1$). En conséquence, on peut trouver dans L^2 une bases hilbertienne constituée par les fonctions propres communes de $-\Delta$ et D_φ, qui sont de plus sous la forme

$$e_{\lambda,k}(x,\varphi) = w_{\lambda,k}(x)e^{ik\varphi}, \tag{3.40}$$

où x est le variable de latitude, λ^2 est la valeur propre de $-\Delta$, et $k \in \mathbb{Z}$ la valeur propre de D_φ, qui s'appelle le nombre de rotation. $w = w_{\lambda,k}$ satisfait l'équation,

$$-\partial_x^2 w + k^2 w = \lambda^2 \rho^2 w. \tag{3.41}$$

Le facteur ρ^2 vient de la géométrie. Le seule souci est avec le comportement de w près de $x = 0$ quand $\lambda \to \infty$, comme cette latitude correspond à l'équateur, la seule géodésique qui n'entre dans pas l'intérieur de Σ^+. Il y aura donc peut-être une suite de fonctions propres qui se concentrent sur l'équateur.

Par comparer les échelle de λ et k, on peut se ramener, après un propre changement d'échelle, à l'un des deux cas suivants :

1. w satisfait l'équation de Schrödinger classique stationnaire.

$$(-\partial_z^2 + z^2)w \approx Ew.$$

2. w satisfait l'équation de Schrödinger semiclassique stationnaire.

$$(-h^2\partial_z^2 + z^2)w \approx w.$$

Dans le premier cas, w est approché par les fonctions propres de l'oscillateur harmonique $-\partial_z^2 + z^2$, dont chacune est soit paire, soit impaire. Dans le deuxième cas, quand $h \to 0$, la mesure de défaut semiclassique associée est propagée et équidistribuée selon la variété caractéristique,

$$z^2 + \zeta^2 = 1,$$

qui donne l'équidistribution de la masse L^2 de w à chaque côté de l'origine $z = 0$.

4 Contrôle Exact de l'Équation d'Onde de Surface sur Tores

4.1 L'Équation et le Problème

Le deuxième sujet que l'auteur voulait présenter est le problème du contrôle du système d'onde de surface (ou "the water wave equation" en anglais).

L'équation d'onde de surface est, par définition, l'équation d'Euler (incompressible) avec une surface libre. Plus précisément, soit $\Omega_t \subset \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_y$ le domaine de l'eau borné par un fond fixé $\Gamma = \{y = -b\}$, et une surface libre $\Sigma_t = \{y = \eta(t,x)\}$,

$$\Omega_t = \{(x,y) : -b < y < \eta(t,x)\}.$$

Soit $v : \Omega_t \to \mathbb{R}^{d+1}$ le champ Eulérien de vitesse, soit P la pression (interne), et soit n la normale unitaire vers l'extérieur à $\partial\Omega_t = \Sigma_t \cup \Gamma$, alors l'équation d'onde de surface peut se formuler de la manière suivante.

1. (L'Équation d'Euler Incompressible)

$$\partial_t v + v \cdot \nabla_{x,y} v + \nabla_{x,y} P = -g\mathrm{e}_y, \quad \mathrm{div}_{x,y} v = 0, \text{ dans } \Omega_t, \tag{4.1}$$

   où g est l'accélération gravitationnelle, et e_y est le vecteur unitaire dans la direction y ;

2. (Condition Dynamique)

$$P = \kappa H(\eta) \text{ sur } \Sigma_t, \tag{4.2}$$

   où $\kappa \geq 0$ est le coefficient de la tension de surface, qui peut se normaliser à 1 s'il ne s'annule pas, et

$$H(\eta) = \mathrm{div}\Big(\frac{\nabla\eta}{\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}}\Big), \tag{4.3}$$

   est la courbure moyenne de la surface libre.

3. (Condition Cinématique)

$$\partial_t \eta = \sqrt{1+|\nabla\eta|^2} v \cdot \mathrm{n} \text{ sur } \Sigma_t. \tag{4.4}$$

4. (Condition du Fond Impénétrable)

$$v \cdot \mathrm{n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{4.5}$$

On travaillera principalement avec la formulation de **Zakharov / Craig-Sulem** pour le fluide irrotationnel,

$$\mathrm{rot}\ v = 0. \tag{4.6}$$

Dans ce cas,

$$v = \nabla_{x,y}\phi, \tag{4.7}$$

pour un certain potentiel de vitesse $\phi : \Omega_t \to \mathbb{R}$, qui est une fonction harmonique avec la condition de Neumann au fond,

$$\Delta_{x,y}\phi = 0 \text{ dans } \Omega_t, \quad \partial_{\mathrm{n}}\phi = 0 \text{ sur } \Gamma, \tag{4.8}$$

et satisfait de plus l'équation de Bernoulli,

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + P + gy = 0 \text{ dans } \Omega_t. \tag{4.9}$$

Zakharov / Craig-Sulem ont remplacé le potentiel ϕ par sa trace ψ sur la surface libre,

$$\psi(t,x) = \phi(t,x,\eta(t,x)), \tag{4.10}$$

qui détermine complètement ϕ par l'équation de Laplacien avec une condition mélangée au bord, et ont réécrit la système par rapport à les variables η et ψ. Pour faire cela, ils ont introduit l'opérateur de Dirichlet-Neumann $G(\eta)$,

$$\begin{aligned}(G(\eta)\psi)(t,x) &= \sqrt{1+|\nabla\eta|^2}\partial_{\mathrm{n}}\phi|_{y=\eta(t,x)} \\ &= (\partial_y\phi)(t,x,\eta(t,x)) - (\nabla\eta)(t,x)\cdot(\nabla\phi)(t,x,\eta(t,x))\end{aligned} \tag{4.11}$$

Par un calcul direct, on vérifie le système d'équation suivant

$$\begin{cases}\partial_t\eta - G(\eta)\psi = 0, \\ \partial_t\psi + g\eta - H(\eta) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}\frac{(\nabla\eta\cdot\nabla\psi+G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla\eta|^2} = 0.\end{cases} \tag{4.12}$$

L'objectif du problème du contrôle pour l'onde de surface est de trouver une pression extérieure, localisée dans un petit domaine $P_{\mathrm{ext}} = 1_\omega \cdot F$ qui agit sur la surface libre comme un terme du contrôle. Alors, la condition dynamique s'écrit comme,

$$P = H(\eta) + P_{\mathrm{ext}}, \text{ sur } \Sigma_t, \tag{4.13}$$

et la formulation de Zakharov / Craig-Sulem formulation devient,

$$\begin{cases}\partial_t\eta - G(\eta)\psi = 0, \\ \partial_t\psi + g\eta - H(\eta) + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}\frac{(\nabla\eta\cdot\nabla\psi+G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla\eta|^2} = P_{\mathrm{ext}}.\end{cases} \tag{4.14}$$

Question 4.1. *Peut-on exactement contrôler le système d'onde de surface par une pression extérieure localisée ?*

Jusqu'à maintenant, le seul résultat connu est pour dimension $d = 1$, quand l'onde est périodique, c'est-à-direon travaille sur $\mathbb{T}^1 \simeq \mathbb{S}^1$. Voir [ABH2015], qui utilise les techniques de séries de Fourier pour le résoudre.

L'auteur voudrait présenter l'idée d'un autre méthode qui a peut-être la possibilité de s'appliquer au cas de dimension supérieure.

4.2 Réduction à l'Équation Linéaire

Par un calcul (non-trivial) de paralinéarisation et symétrisation (voir [ABZ2011]), l'équation d'onde de surface peut s'écrire de la manière suivante,

$$\partial_t\Phi + T_V\partial_x\Phi + iT_\gamma\Phi + R\Phi = T_p P_{\mathrm{ext}}, \tag{4.15}$$

où $V,\ \gamma,\ p,\ R$ dépendent explicitement de Φ. Quand les données initiales et finales sont petites, le contrôle du ce système non-linéaire peut se résoudre par un argument d'itération et donc se ramène au contrôle d'un système linéaire, c'est-à-dire, on résout une suite de problème du contrôle,

$$\partial_t\Phi_{n+1} + T_{V_n}\partial_x\Phi_{n+1} + iT_{\gamma_n}\Phi_{n+1} + R_n\Phi_{n+1} = T_{p_n}P_{n+1}, \tag{4.16}$$

et puis on passe à la limite.

En dimension 1, [ABH2015] a montré la contrôlabilité exacte avec petites données en utilisant les séries de Fourier et l'inégalité d'Ingham. Cette méthode, malheureusement, ne marche pas pour la dimension supérieure. L'auteur est en train d'étudier le contrôle exact de l'équation d'onde de surface en dimension supérieure, en utilisant le méthode de Lebeau (voir [Leb1992]) pour l'équation de Schrödinger, qui avait fait un changement d'échelle pour introduire un paramètre semiclassique h, et a utilisé la propagation du mesure semiclassique.

4.3 Équation de Modèle

Quand la donnée initiale est petite, $V,\ R,\ p-1$ seront petites aussi, et γ sera proche de $|\xi|^{3/2}$. Donc l'équation linéarisée (sans contrôle) est une perturbation de l'équation du modèle suivant

$$(\partial_t + i|D_x|^{3/2})u = 0. \tag{4.17}$$

Le problème de cette équation est son inhomogénéité, donc la mesure microlocale, qui marche parfaitement au cadre de l'équation d'onde, ne sert à rien dans ce cas. Au vu de ceci, Lebeau a fait un changement d'échelle $s = h^{-1/2}t$ pour introduire un petit paramètre semiclassique h, de sorte que la solution u satisfait l'équation semiclassique suivante,

$$(hD_s + |hD_x|^{3/2})u = 0. \tag{4.18}$$

Ainsi on re-obtient l'homogénéité, mais au sens semiclassique. u peut ne pas être h-oscillant, donc on considère plutôt $\chi(hD_x)u$ pour un certain fonction de troncature χ. Alors $\chi(hD_x)u$ satisfait la même équation,

$$(hD_s + |hD_x|^{3/2})(\chi(hD_x)u) = 0, \tag{4.19}$$

Les trajectoires des bicaractéristiques (les caractéristiques qui se contiennent dans la variété caractéristique du symbole) du symbole principal $\sigma + |\xi|^{3/2}$ sont des géodésiques. Donc la loi de propagation et la condition du contrôle géométrique nous donne l'observabilité pour cette équation semiclassique (modulo quelque terme de reste compactes)

$$\|\chi(hD_x)u_0\|_{L^2}^2 \lesssim \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} 1_\omega |\chi(hD_x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s = h^{-1/2} \int_0^{h^{1/2}T} \int_{\mathbb{T}^d} 1_\omega |\chi(hD_x)u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Le même argument s'applique sur les intervalles $[kh^{1/2}T, (k+1)h^{1/2}T]$. On les somme pour obtenir l'observabilité pour l'équation avant le changement d'échelle,

$$\|\chi(hD_x)u\|_{L^2}^2 \lesssim \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} 1_\omega |\chi(hD_x)u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

En suit, prenant $h = 2^{-j}$ et utilisant la théorie de Littlewood-Paley, on obtient l'observabilité de l'équation de modèle.

$$\|u\|_{L^2}^2 \lesssim \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} 1_\omega |u|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Références

[ABH2015] Alazard, T., Baldi, P., & Han-Kwan, D. (2015). Control of water waves. arXiv preprint arXiv :1501.06366.

[ABZ2011] Alazard, T., Burq, N., & Zuily, C. (2011). On the water-wave equations with surface tension. Duke Mathematical Journal, 158(3), 413-499.

[AG1991] Alinhac, S., & Gérard, P. Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser,(1991). Inter-editions (Paris).

[AM2009] Alazard, T., & Métivier, G. (2009). Paralinearization of the Dirichlet to Neumann operator, and regularity of three-dimensional water waves. Communications in Partial Differential Equations, 34(12), 1632-1704.

[Bes2012] Besse, A. L. (2012). Manifolds all of whose geodesics are closed (Vol. 93). Springer Science & Business Media.

[BG2002] Burq, N., & Gérard, P. (2002). Contrôle optimal des equations aux derivées partielles. Ecole polytechnique, Département de mathématiques.

[BLR1992] Bardos, C., Lebeau, G., Rauch, J. (1992). Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilisation of waves from the boundary. SIAM journal on control and optimization, 30(5), 1024-1065.

[Bon1981] Bony, J. M. (1981). Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. In Annales scientifiques de l'École Normale supérieure (Vol. 14, No. 2, pp. 209-246).

[Bur1997] Burq, N. (1997). Mesures semi-classiques et mesures de défaut. Séminaire Bourbaki, 39, 167-195.

[Bur2002] Burq, N. (2002). Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries. International Mathematics Research Notices, 2002(5), 221-241.

[Gér1991a] Gérard, P. (1991). Microlocal defect measures. Communications in Partial differential equations, 16(11), 1761-1794.

[Gér1992b] Gérard, P. (1991). Mesures semi-classiques et ondes de Bloch. Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique), 1-19.

[Hör2007] Hörmander, L. (2007). The analysis of linear partial differential operators III : Pseudo-differential operators (Vol. 274). Springer Science & Business Media.

[Lan2013] Lannes D. (2013). The water waves problem : mathematical analysis and asymptotics (Vol. 188). American Mathematical Soc..

[Leb1992] Lebeau, G. (1992). Contrôle de l'équation de Schrödinger. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 71(3), 267-291.

[Leb1996] Lebeau, G. (1996). Equation des ondes amorties (pp. 73-109). Springer Netherlands.

[Mét2008] Métivier, G. (2008). Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems (Vol. 5). Pisa : Edizioni della Normale.

[Zhu2016] Zhu, H. (2016). Stabilisation of Damped Waves on Spheres and on Zoll's Surfaces of Revolution. arXiv preprint arXiv :1604.05218.

[Zua2007] Zuazua, E. (2007). Controllability and observability of partial differential equations : some results and open problems. Handbook of differential equations : evolutionary equations, 3, 527-621.

[Zwo2012] Zworski, M. (2012). Semiclassical analysis (Vol. 138). American Mathematical Soc..