

# Intersections stables d'ensembles de Cantor et phénomène de Newhouse en dynamique holomorphe

Sébastien Biebler

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Historique</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Retour sur le cas réel</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Notions de dynamique holomorphe</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Intersections stables d'ensembles de Cantor et phénomène de Newhouse dans le cas complexe</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>12</b>

## 1 Historique

Les orbites homoclines sont des évolutions pour lesquelles l'état est le même dans un passé infini et dans un futur infini. De telles évolutions homoclines ont été découvertes par Poincaré à la fin du XIXème siècle dans son essai sur la stabilité du système solaire. Plus tard, des travaux sur cette question ont été effectués par Birkhoff qui a travaillé sur la complexité autour des orbites homoclines, Van der Poll et ses oscillateurs ou bien encore Smale qui a introduit la notion d'application fer à cheval. Les travaux de Newhouse dans [N] utilisant des intersections stables d'ensembles de Cantor afin d'obtenir des tangences homoclines persistentes ont éveillé un nouvel intérêt pour ce domaine de recherche.

La dynamique holomorphe à 1 variable est l'étude de l'itération des fonctions holomorphes à 1 variable. Elle a été introduite au début du XXème siècle par les travaux de Fatou et de Julia qui ont donné leurs noms à de célèbres ensembles. Plus tard, en 1978, est obtenue la première représentation

de l'ensemble de Mandelbrot, étudié notamment par Douady et Hubbard. Parmi les autres grands noms à citer dans l'étude de cette discipline, donnons McMullen, Milnor, Shishikura, Yoccoz, Sullivan...

Finalement, en 1997, Buzzard parvient à étendre le résultat de Newhouse pour des automorphismes complexes, résultat mêlant dynamique holomorphe et étude des tangences homoclines, en introduisant une méthode afin d'obtenir des intersections stables d'ensembles de Cantor dans le plan.

## 2 Retour sur le cas réel

**Definition.** *Un ensemble hyperbolique pour un difféomorphisme  $f$  est un ensemble compact  $f$ -invariant  $K$  dont le fibré tangent admet une décomposition en deux sous-fibrés tangents  $TM|_K = E_s \oplus E_u$  qui satisfait :*

- $E_s$  et  $E_u$  sont invariants :  $\forall x \in K, Df(x).E_s(x) = E_s(f(x))$  et  $\forall x \in K, Df(x).E_u(x) = E_u(f(x))$
  - $E_s$  est uniformément contracté et  $E_u$  est uniformément dilaté : il existe des constantes  $C > 0$  et  $\lambda \in (0; 1)$  tels que  $\forall x \in K, u \in E_s(x)$  et  $v \in E_u(x)$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $\|Df^n(x).u\| \leq C.\lambda^n.\|u\|$  et  $\|Df^n(x).v\| \geq C^{-1}.\lambda^{-n}.\|v\|$ .
- Les espaces  $E_s$  et  $E_u$  sont appelés espace stable et espace instable.*

Donnons un exemple d'un tel ensemble. On considère dans la sphère  $\mathbb{S}^2$  un rectangle difféomorphe à  $[0; 1]^2$  divisé en trois rectangles

$$R_1 = [0, 1] \times [0, 1/3], R_2 = [0, 1] \times (1/3, 2/3) \text{ et } R_3 = [0, 1] \times [2/3, 1]$$

et considérons un difféomorphisme qui :

- coïncide avec  $(x, y) \rightarrow (1/3x, 3y)$  sur  $R_1$ .
- coïncide avec  $(x, y) \rightarrow (1 - 1/3x, 3 - 3y)$  sur  $R_3$ .
- envoie  $R_2$  en dehors de  $R$ .

L'ensemble maximal invariant associé ( l'intersection des images itérées passées et futures par le difféomorphisme du rectangle) est un ensemble hyperbolique, on l'appelle un fer à cheval (à cause de la forme de la déformation du rectangle qui rappelle un fer à cheval).

Plus généralement, on a la définition suivante :

**Definition.** *Un fer à cheval est un ensemble hyperbolique localement maximal, totalement discontinu et transitif.*

**Definition.** Soit  $\phi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{C}^2$ . Pour un point  $p$ , fixe ou périodique, de type selle, on note  $W^s(p)$  l'ensemble des points  $x$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x) = p$ , c'est la variété stable de  $p$  et de même, on note  $W^u(p)$  l'ensemble des points  $x$  tels que  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi^n(x) = p$ , c'est la variété instable de  $p$ .

On rappelle que l'on a le résultat suivant pour les variétés stables.

**Theoreme.** *Théorème de la variété stable.* Soit  $p$  un point fixe d'un difféomorphisme  $C^k$   $\phi$  de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{C}^2$  tel que la différentielle de  $\phi$  en  $p$  n'ait pas de valeur propre de module égal en 1 (on dit que le point fixe est hyperbolique). Alors, la variété stable  $W^s(p) = \{x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(x) = p\}$  est une sous-variété  $C^k$  immergée de  $M$ . Si  $\bar{\phi}$  est proche de  $\phi$  en topologie  $C^k$  alors  $\bar{\phi}$  a un point fixe hyperbolique  $\bar{p}$  et  $W^s(\bar{p})$  est proche de  $W^s(p)$  en topologie  $C^k$ .

On obtient le même résultat pour les variétés instables, c'est le théorème de la variété instable. Définissons à présent les tangences homoclines.

**Definition.** Soit  $\phi$  un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{C}^2$  et soit  $K$  en ensemble hyperbolique transitif. On dit que :

- $K$  a une tangence homocline s'il existe dans  $K$  une orbite périodique  $O$  avec la variété stable d'un point de  $O$  ayant une intersection non transverse avec la variété instable d'un autre point de  $O$ .
- $K$  a une tangence homocline généralisée s'il existe deux points  $x$  et  $y$  avec une intersection non transverse entre  $W^s(x)$  et  $W^u(y)$ .
- $K$  a une tangence homocline généralisée  $C^r$ -robuste s'il existe un voisinage en topologie  $C^r$  de  $\phi$  tel que pour tout  $g$  dans ce voisinage, la continuation hyperbolique  $K_g$  de  $K$  a une tangence homocline généralisée.

On a les théorème suivants :

**Theoreme.** Pour tout difféomorphisme  $C^k, k \geq 2$ , avec un fer à cheval  $K$  ayant une tangence homocline et des épaisseurs selon les variétés stable  $\tau^s(K)$  et instable  $\tau^u(K)$  telles que  $\tau^s(K) \cdot \tau^u(K) > 1$ , alors il existe un difféomorphisme  $g$  proche de  $f$  en topologie  $C^k$  ayant une tangence homocline généralisée  $C^2$ -robuste.

**Theoreme.** Si un difféomorphisme possède une tangence homocline généralisée robuste, alors il n'est pas hyperbolique.

Le phénomène de Newhouse que l'on déduit alors permet de montrer l'existence d'un ouvert d'ensembles de difféomorphismes de classe  $C^2$  non hyperboliques.

**Theoreme.** *Soit  $M$  une surface réelle compacte. Il existe un ensemble ouvert non vide  $U$  de difféomorphismes de classe  $C^2$  non hyperboliques. De plus, tout difféomorphisme dans un ensemble  $G_\delta$ -dense de  $U$  a une infinité de puits.*

On obtient ce résultat en utilisant le résultat suivant permettant d'obtenir des ensembles de Cantor s'intersectant stablement dans la droite réelle. D'autre part, du point de vue de la dynamique holomorphe, on peut légitimement se demander si on a un résultat similaire en dimension complexe pour des automorphismes de  $\mathbb{C}^2$ .

**Theoreme . ( Newhouse Gap Lemma )** *Si  $K$  et  $L$  sont deux ensembles de Cantor tels que :  $t(K)t(L) > 1$ , alors ou  $K$  est inclus dans un trou de  $L$  ou  $L$  est inclus dans un trou de  $K$  ou  $K \cup L$  est non vide.*

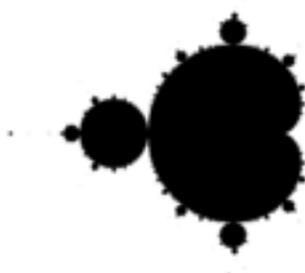
On trouve une preuve de ce théorème dans [P.T]. On peut également ici aussi se demander ce qui se passe dans le cas complexe, comment obtenir des ensembles de Cantor s'intersectant stablement dans le plan complexe.

**Conjecture.** *Conjecture de Palis : Tout difféomorphisme  $\phi$  de classe  $C^k$  peut être approximé par un difféomorphisme ou bien hyperbolique ou bien exhibant une tangence homocline.*

### 3 Notions de dynamique holomorphe

Pour des références en dynamique holomorphe, on pourra se reporter à [M] ou bien [C.G].

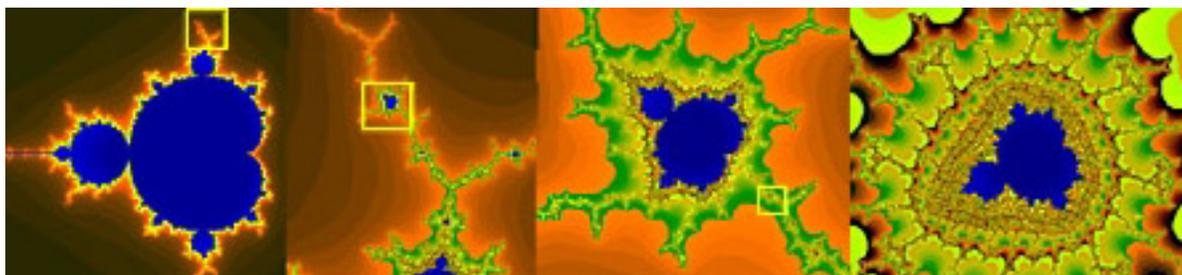
**Definition.** *L'ensemble de Mandelbrot est défini comme l'ensemble des points  $c$  du plan complexe pour lesquels la suite  $(z_n)_n$  définie par  $z_0 = 0$  et  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  pour tout  $n \geq 0$  ne tende pas vers l'infini en module.*



**Theoreme.** (Shishikura [S]) La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Mandelbrot  $M$  est égale à 2. De plus, pour tout ouvert  $U$  ayant une intersection non vide avec  $M$ , alors la dimension de Hausdorff de  $M \cap U$  est égale à 2.

**Theoreme.** (Douady-Hubbard-Sibony) L'ensemble de Mandelbrot est connexe.

On a par ailleurs un phénomène d'auto-similarité dans l'ensemble de Mandelbrot : on trouve en effet des copies réduites au niveau des ramifications.

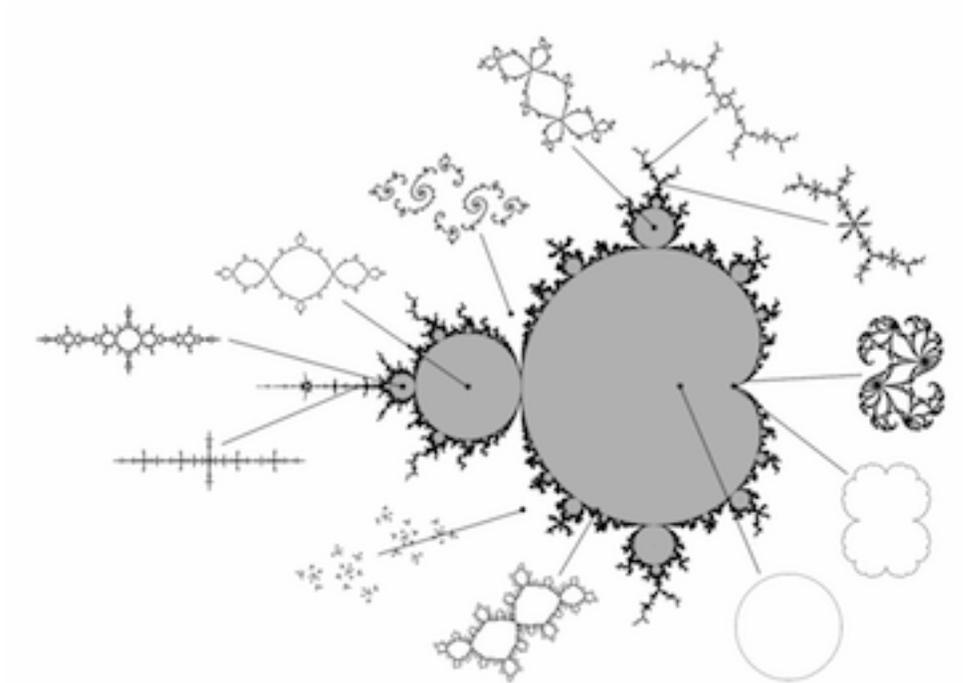


**Definition.** On dit qu'une famille  $F$  d'applications holomorphes définies sur un domaine planaire  $D$  est normale si et seulement si toute suite d'éléments de  $F$  contient une sous-suite convergeant uniformément sur tous les ensembles compacts de  $D$ .

**Definition.** Pour une application holomorphe  $f$  définie sur un domaine  $D$  du plan, l'ensemble de Fatou de  $f$ , noté  $Fa(f)$  est l'ensemble des points  $z \in D$  tels qu'il existe un voisinage de  $z$  dans  $D$  où la famille  $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$  est une famille normale. Toute composante connexe de  $Fa(f)$  est appelée composante de Fatou. L'ensemble de Julia de  $f$  est le complémentaire de son ensemble de Fatou.

On peut aussi définir les ensembles de Julia comme suit.

**Definition.** Soit deux constantes complexes  $c$  et  $a$ , on définit la suite  $(z_n)_n$  avec  $z_0 = a$  et  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ . Pour une valeur donnée de  $c$ , l'ensemble de Julia plein du polynôme  $Z^2 + c$  est l'ensemble des valeurs  $a$  pour lesquelles la suite  $(z_n)_n$  reste bornée. L'ensemble de Julia correspondant est la frontière de l'ensemble de Julia plein.



Un important résultat de dynamique holomorphe concerne la classification des composantes de Fatou.

**Definition.** Soit  $U$  une composante de l'ensemble de Fatou  $Fa(f)$  d'une application holomorphe  $f$ .

- Si  $f(U) = U$ , on dit que  $U$  est une composante fixe.
- Si  $f^n(U) = U$  pour un entier  $n$ ,  $U$  est une composante périodique.
- Si  $f^m(U)$  est périodique pour un entier  $m$ , on dit que  $U$  est une composante prépériodique.
- Sinon, tous les  $f^n(U)$  sont distincts, on dit que  $U$  est un domaine évanescent.

**Theoreme.** (Sullivan) Une application rationnelle n'a pas de domaine évanescent. Toutes les composantes de Fatou sont alors soit prépériodiques soit périodiques.

Une composante de Fatou périodique  $U$  de période  $n$  est appelée parabolique s'il y a sur sa frontière un point fixe neutre  $\zeta$  pour  $f^n$  avec un multiplicateur 1 tel que tous les points dans  $U$  convergent vers  $\zeta$  en itérant par

$f^n$ . Les domaines  $U, f(U), \dots, f^{n-1}(U)$  forment un cycle parabolique. Leur union est le bassin immédiat d'attraction associé au pétale attractif en  $\zeta$ .

**Definition.** Une composante de Fatou périodique de période  $n$  est un disque de Herman si elle est doublement connexe et si  $f^n$  est conjuguée à ou bien une rotation sur un disque ou bien une rotation suivie d'une inversion.



Une composante de Fatou simplement connexe périodique de période  $n$  dans laquelle  $f^n$  est conjuguée à une rotation irrationnelle est appelée un disque de Siegel.



**Theoreme.** (Sullivan) Soit  $U$  une composante de fatou périodique. Alors on a exactement une des situations suivantes :

- 1.  $U$  contient un point périodique attractif.
- 2.  $U$  est parabolique.
- 3.  $U$  est un disque de Siegel.
- 4.  $U$  est un anneau de Herman.

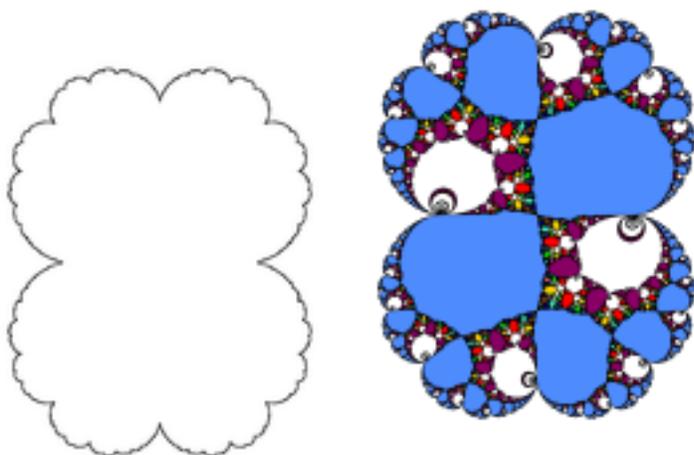
**Definition.** Soit  $f$  une application holomorphe et  $z_0$  un point fixe de  $f : f(z_0) = z_0$ . On note  $\lambda = f'(z_0)$  le multiplicateur de  $f$  en  $z_0$ . On dit que le point fixe  $z_0$  est :

- un point fixe attractif si  $|\lambda| < 1$
- un point fixe répulsif si  $|\lambda| > 1$
- un point fixe indifférent si  $|\lambda| = 1$ ,  $\lambda = e^{2i\pi\alpha}$ . On dit que  $z_0$  est parabolique si  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et que  $z_0$  est irrationnellement indifférent si  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ .

Nous savons que pour une valeur de  $c$  dans l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia obtenu est connexe, et en dehors, il est totalement discontinu. On peut s'intéresser aux dimensions de Hausdorff de ces ensembles

de Julia. On arrive précisément à montrer que cette dimension de Hausdorff n'est pas continue au niveau du cusp  $c = 1/4$ . Pour  $c = 1/4$ , l'ensemble de Julia correspondant est une courbe ressemblant à un chou-fleur. Si l'on s'écarte un peu de  $c = 1/4$  en sortant de l'ensemble de Mandelbrot, on obtient des ensembles de Julia qui sont des ensembles de Cantor, des poussières de Cantor. On remarque que l'on peut trouver des ensembles de Cantor d'autant plus "gras" que l'on se situe près de  $c = 1/4$ . En ce point, il y a discontinuité pour les ensembles de Julia et pour leur dimension de Hausdorff. Ce phénomène est dû à un changement profond de dynamique au niveau du point fixe parabolique. En effet, l'implosion parabolique consiste en quelque sorte à "imploser" le point fixe parabolique en deux points fixes. Une nouvelle dynamique est alors possible, avec des orbites passant entre les deux points. On peut alors envisager des orbites qui passent entre les deux points, et peuvent revenir à leur position initiale.

↓ Ensemble de Julia pour  $z^2 + \frac{1}{4}$

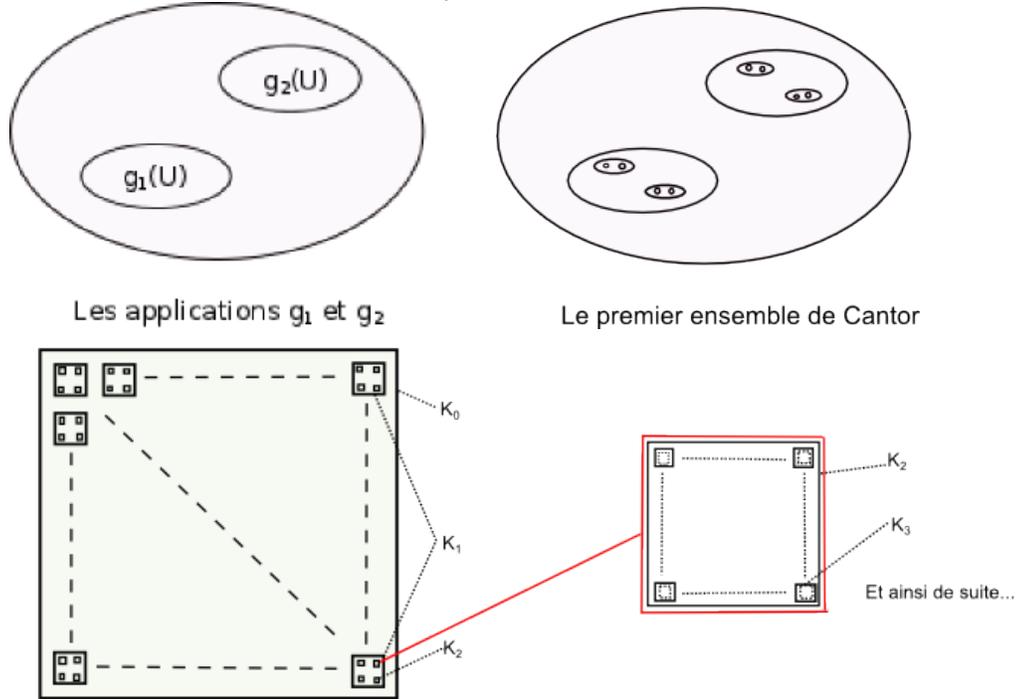


Ensemble de Julia pour  $z^2 + \frac{1}{4} + \epsilon \uparrow$

#### 4 Intersections stables d'ensembles de Cantor et phénomène de Newhouse dans le cas complexe

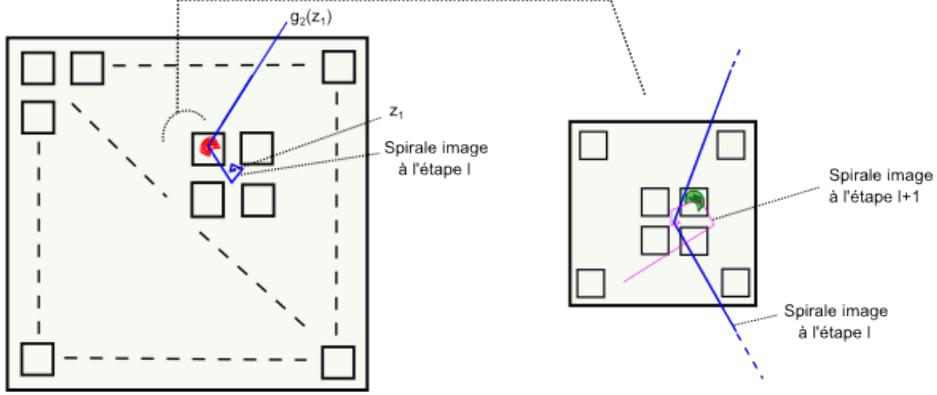
Dans son article [B1], Buzzard donne une méthode permettant d'obtenir une intersection stable entre deux ensembles de Cantor dans le plan. On considère tout d'abord un modèle linéaire avec un ensemble de Can-

tor défini à partir de deux similitudes directes définies sur un ouvert  $U$ , à images contenues dans  $U$  et disjointes :  $g_1 : z \mapsto a_1z + b_1$ , avec  $|a_1| \leq 1$ , et  $g_2 : z \mapsto a_2z + b_2$ , avec  $|a_2| \leq 1$ , qui possède une structure spirالية, et un second ensemble de Cantor intersection décroissante d'ensembles  $K_j$  de carrés, associé à des applications  $f_j$ .



Le principe pour obtenir des intersections stables est d'utiliser de façon concomitante la structure du quadrillage et celle des spirales afin d'avoir, pour chaque  $n$ ,  $K(\{g_k\}) \cap K_n(\{f_k\}) \neq \emptyset$ . Toute la preuve repose sur le principe suivant : à l'étape  $n$ , on a un carré de  $K_n(\{f_k\})$  et son quadrillage de sous-carrés de  $K_{n+1}(\{f_k\})$ . Pour tout point du carré de grande taille, on arrive à trouver une portion de couronne d'ouverture angulaire d'angle  $\pi/4$  centrée en ce point et incluse dans un petit carré, et ce, notamment en un point de  $K(\{g_k\}) \cap K_l(\{f_k\})$  choisi à l'étape précédente. On a aussi une spirale d'éléments de  $K(\{g_k\})$  qui tourne autour de ce point. L'idée est de bien choisir les paramètres géométriques pour que la spirale possède au moins un de ses points dans cette portion de couronne, d'où l'obtention d'un point appartenant à  $K(\{g_k\}) \cap K_{n+1}(\{f_k\})$ . Comme on a autour de ce point une spirale image et un quadrillage plus petit, on va pouvoir poursuivre la récurrence.

Comme la démonstration aboutit au même résultat en changeant peu les paramètres définissant les applications linéaires, on obtient une intersection stable dans le cas linéaire.



Avec des inégalités de distorsion, on obtient finalement le théorème suivant donnant sous certaines conditions une intersection stable même dans le cas non-linéaire.

**Theoreme.** Soit  $D \subset \subset \mathbb{C}$  un ensemble convexe et soient  $G_1$  et  $G_2$  deux applications biholomorphes dans un voisinage de  $\overline{D}$  avec  $G_j(\overline{D}) \subset D$  et  $G_1(\overline{D}) \cap G_2(\overline{D}) = \emptyset$ . Supposons que  $C_1 < 1$  et  $|G_j(z) - G_j(w)| < C_1|z - w|$  pour tous  $z, w$  dans  $D$ . Soit  $a_1 = z_1$  le point fixe de  $G_1$  et  $\delta_\theta \in (0, \pi/8)$  et supposons que  $\text{sign}(G_1'(z_1))$  n'est pas une racine de l'unité pour  $m \leq 3\pi/\delta_\theta$ . On a alors une région  $D'$  du plan complexe et des applications biholomorphes  $\{F_j\}_{j=1}^n : \overline{D'} \rightarrow D'$  avec des images disjointes telles que toutes applications  $g_j$  et  $f_j$  perturbations suffisamment faibles en topologie  $C^2$  de  $G_j$  et  $F_j$ , alors on a :  $K(\{g_j\}) \cap K(\{f_j\}) \neq \emptyset$ .

On prend une valeur complexe  $c$  de module strictement supérieur à 8. On prend pour  $D$  le disque centré en l'origine de rayon  $|c|/2$  et on prend pour applications  $G_1$  et  $G_2$  les branches inverses de  $z^2 + c$  :  $G_1(z) = \sqrt{z - c}$  et  $G_2(z) = -\sqrt{z - c}$ . On vérifie aisément que l'on peut prendre un tel  $c$  tel que les hypothèses du lemme soient vérifiées. En appliquant le théorème précédent, on obtient des applications  $\{F_j\}$  telles que l'on obtient une intersection stable non vide. En particulier, on peut trouver un polynôme  $P$  tel que  $P$  a  $n$  branches inverses distinctes  $P_j^{-1}$  que l'on peut choisir suffisamment proches des applications  $F_j$ . Le théorème précédent s'applique alors et

on peut donc prendre des polynômes dont les ensembles de Julia contiennent des ensembles de Cantor s'intersectant stablement.

Dans l'article [B2], Buzzard parvient à obtenir le théorème suivant donnant des tangences homoclines persistantes grâce à des intersections stables d'ensembles de Cantor dans le plan.

**Theoreme.** *Il existe  $d > 0$  tel que si  $X$  est soit :*

(a) *l'espace  $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$  des automorphismes de  $\mathbb{C}^2$*

(b) *l'espace  $\text{Aut}P_d(\mathbb{C}^2)$  des automorphismes polynômiaux de  $\mathbb{C}^2$*

*Alors il existe  $G \in X$  et un voisinage  $N \subset X$  de  $G$  tel que  $N$  a des tangences homoclines persistantes. Plus précisément, il existe un ensemble compact  $\bar{E}$  de la variété ambiante et un ensemble dense  $S \subset N$  telle que chaque  $H \in S$  a une tangence homocline dans  $\bar{E}$  entre les variétés stable et instable d'un point fixe de  $H$ .*

*Démonstration.* (Grandes lignes) La démonstration va utiliser la méthode d'intersection d'ensembles de Cantor que nous avons utilisée précédemment. Pour cela, nous considérons une application affine par morceaux de type fer à cheval que nous prolongeons sur une petite portion du plan contenant un disque de tangence sur lequel les feuilletages stable et instable sont tangents.

On remarque que près de l'origine, on peut obtenir un ensemble de Cantor de la forme spirallique inclus dans  $W^s(\Lambda_F)$  et un ensemble de Cantor de type à petits carreaux inclus dans  $W^u(\Lambda_F)$ .

Nous disposons d'un ensemble de Cantor obtenu comme une union croissante d'ensembles de points et d'un deuxième ensemble de Cantor obtenu comme intersection décroissante d'ensembles de carrés. L'essentiel est de bien choisir les bons paramètres afin d'obtenir l'intersection désirée. On peut projeter sur le disque de tangence selon les feuilletages stable et instable, projections dont on vérifie qu'elles correspondent aux deux projections selon les deux coordonnées via un bon paramétrage. En appliquant la méthode précédente, on obtient un point d'intersection et donc une tangence homocline généralisée. De plus, cette intersection est stable car des théorèmes nous donnent un bon comportement des différents disques de tangence, projections... et donc une intersection stable. De plus, en perturbant de manière aussi faible que nécessaire l'application, on obtient une tangence homocline. Avec le théorème, on peut finalement obtenir un automorphisme polynômial vérifiant les conditions requises.  $\square$

**Corollaire.** *Avec des ensembles  $N$  et  $\bar{E}$  comme dans le théorème précédent, il existe un ensemble  $G_\delta$  dense  $R \subset N$  tel que chaque  $H \in R$  a une infinité*

de points périodiques attracteurs (des puits) contenus dans  $\overline{E}$ .

## 5 Perspectives

On a vu que l'on arrivait à trouver deux ensembles de Cantor inclus dans les ensembles de Julia de deux polynômes dont l'un est quadratique et dont on ne contrôlait pas le degré. On peut se demander s'il est possible d'obtenir le même résultat pour deux polynômes quadratiques.

**Theoreme.** *( En cours ) Il existe un polynôme quadratique  $P_\lambda$  d'ensemble de Julia une poussière de Cantor et un polynôme quadratique  $Q$  d'ensemble de Julia aussi une poussière de Cantor dont les deux ensembles de Julia contiennent des ensembles de Cantor s'intersectant stablement, c'est-à-dire toujours pour des approximations holomorphes suffisamment proches de  $P_\lambda$  et de  $Q$ . En d'autres termes, il existe deux poussières de Cantor ensembles de Julia de polynômes quadratiques s'intersectant stablement.*

L'objet de ma thèse sous la direction de Romain Dujardin serait l'étude des bifurcations des systèmes dynamiques holomorphes en dimension supérieure à 1. En dimension 1, c'est une théorie qui a été initiée au début des années 80 par Mañe-Sad-Sullivan et Lyubich, et qui a été enrichie depuis par l'étude détaillée de très nombreuses familles d'exemples (comme la famille des polynômes quadratiques  $z^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ), et l'introduction d'outils d'analyse complexe à plusieurs variables (courants, etc.). En dimension supérieure, on ne dispose à ce jour que de quelques résultats :

- Dujardin et Lyubich ont étudié dans [D.L] les bifurcations de familles d'automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  et montré que le phénomène de tangence homocline est responsable des bifurcations.
- Berteloot et Dupont ont récemment annoncé une extension partielle de la théorie de Mañe-Sad-Sullivan au cas des endomorphismes de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ , pour  $k \geq 2$ .

Dans un travail classique, Newhouse a démontré qu'il existe des ouverts de bifurcations dans l'espace des difféomorphismes  $C^2$  des surfaces réelles compactes. Le coeur technique de ce résultat est l'étude de la persistance des intersections entre certains ensembles de Cantor dans la droite réelle. Ces résultats ont été étendus à certains automorphismes polynomiaux de  $\mathbb{C}^2$  par Buzzard.

Le sujet de recherche que nous envisageons se situe dans la lignée de ces deux ensembles de résultats : explorer les bifurcations de systèmes dynamiques holomorphes en dimension supérieure, et en particulier montrer

l'abondance de bifurcations persistantes dans certaines familles, en étudiant la géométrie des ensembles de Cantor dynamiques associés aux transformations holomorphes. Une première étape serait de préciser le travail de Buzzard sur les intersections persistantes d'ensembles de Cantor dynamiques dans  $\mathbb{C}$  (qui ont trait aux automorphismes de  $\mathbb{C}^2$ ), avant de s'intéresser à des questions analogues en dimension supérieure.

## Bibliographie

- [B1] Gregery T. Buzzard, Stably intersecting Julia Sets of Polynomials, C.R. Acad.Sci.Paris Ser.I Math.317 (1993), no. 11, 1013-1018
- [B2] Gregery T. Buzzard, Infinitely many periodic attractors for holomorphic maps of 2 variables. Ann. of Math. (2) 145 (1997), 389D417
- [C.G] L.Carleson,T.Gamelin, Complex dynamics, Springer, Universitext
- [D.L] Romain Dujardin and Mischa Lyubich, Stability and bifurcations for dissipative polynomial automorphisms of  $\mathbb{C}^2$ , Arxiv
- [M] John Milnor, Dynamics in one complex Variable : Introductory Lectures, 1991
- [N] Sheldon Newhouse, 1974, Diffeomorphisms with infinitely many sinks, Topology 13 9-18
- [P.T] Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations, Cambridge studies in advanced mathematics, J. Palis and F. Takens
- [S] Mitsuhiro Shishikura, The Hausdorff Dimension of the Boundary of the Mandelbrot Set and Julia Sets, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 147, No. 2 (Mar., 1998), pp. 225-267