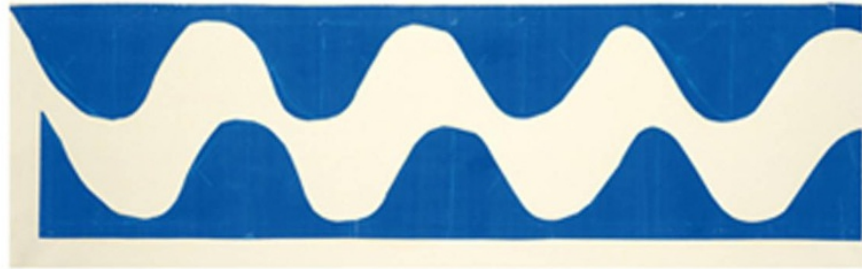


ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE - PARIS
FORMATION INTERUNIVERSITAIRE DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES ET
APPLIQUÉES



**Introduction aux explosions en temps fini pour des EDP
d'évolution**

Charles COLLOT
October 18, 2013

Contents

0.1	Introduction	1
0.2	En dimension finie	3
0.3	En dimension infinie: les EDP d'évolution	4
0.4	Les enjeux du domaine actuellement et quelques repères historiques	6
0.5	Présentation des éléments de réponses et nouvelles problématiques	7
0.6	notations et annexe	11

0.1 Introduction

Les questions simples n'admettent pas toujours de réponses qui le soient également. La problématique fondamentale du domaine de recherche que nous présentons ici est facile à comprendre, mais nous verrons il reste encore beaucoup de problèmes ouverts.

Les équations aux dérivées partielles d'évolution (EDP d'évolution) représentent la manière dont un élément évolue avec le temps. D'un point de vue physique, cet élément (souvent une fonction) représente une certaine quantité, et le phénomène qui la fait évoluer est décrit par cette EDP. La notation suivante est adoptée:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u = F(u) \\ \text{conditions aux bord} \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

La première ligne représente l'évolution temporelle de la fonction $u(t)$. La deuxième rend compte d'éventuelles conditions de compatibilité que $u(t)$ doit vérifier (par exemple on peut laisser évoluer la température dans un objet tout en la fixant à la frontière de celui-ci). La troisième signifie que l'on connaît la valeur de $u(t)$ à l'instant initial $t = 0$.

La question fondamentale est celle de la résolubilité. Si u_0 est donnée, existe-t-il une solution $u(t)$ au problème, qui soit égale à u_0 à $t = 0$ et vérifie les conditions au bord (La notion de solution étant complexe, elle n'est pas détaillée ici)? Souvent, on sait montrer l'existence locale: $u(t)$ est une solution de l'EDP mais pour des temps petits: $t \in 0 \leq t < T$. On peut également se demander si cette solution est unique, et si elle dépend continûment de la donnée initiale.

Définition 0.1.1. On dit que l'EDP d'évolution est bien posée dans l'espace de Banach X si:

existence Pour tout $u_0 \in X$, il existe $T(u_0) > 0$ et $u(t)$ une solution sur $[0, T(u_0)[$ avec $u(0) = u_0$ et pour tout $t \in [0, T(u_0)[$, $u(t) \in X$.

unicité Si $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont deux solutions issues de u_0 sur $[0, T_1[$ et $[0, T_2[$ respectivement, alors $u_1 = u_2$ sur $[0, \min(T_1, T_2)[$

continuité Une solution $u(t)$ sur $[0, T[$ est continue de $[0, T[$ dans X . De plus si $u_n \xrightarrow[X]{} u_0$ alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} T(u_n) \geq T(u_0)$ et pour tout $t \in [0, T(u_0)[$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq t} \|u_n(s) - u(s)\|_X = 0$ où $u_n(t)$ est la solution issue de u_n .

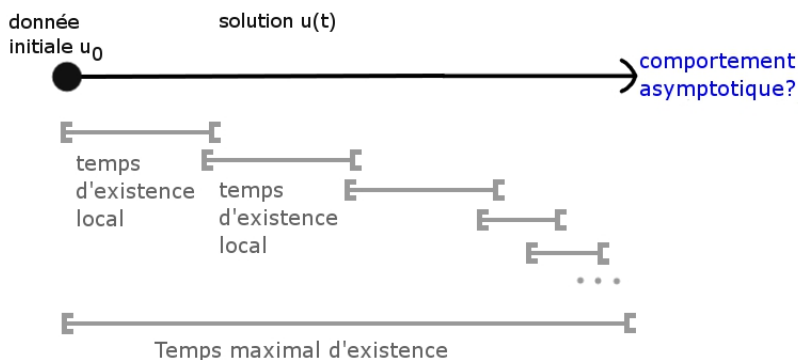
Définition 0.1.2. Le temps maximal d'existence d'une solution issue de u_0 , noté $T^*(u_0)$ est défini par:

$$T^*(u_0) = \sup\{T > 0 / \exists u(t) \text{ une solution issue de } u_0 \text{ sur } [0, T]\}$$

On dit qu'il y a explosion lorsque $T^*(u_0)$ est fini. On dit que la solution est globale lorsque $T^*(u_0) = +\infty$

Par unicité, il existe alors une unique solution maximale, toujours notée $u(t)$ définie sur $[0, T^*(u_0)[$. On peut voir cette solution maximale comme étant des solutions locales mises bout à bout.

Une question naturelle est alors: le temps maximal d'existence de la solution est-il fini ou infini? On peut également se demander quel est le comportement de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow T^*(u_0)$.



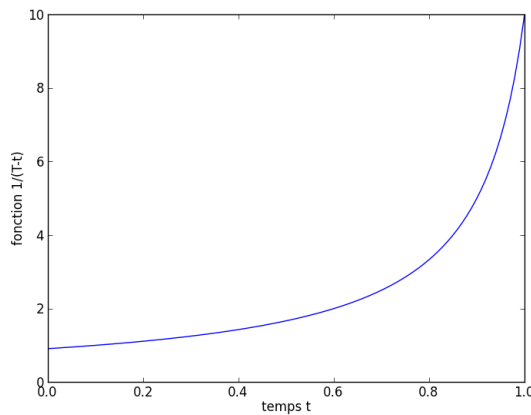
0.2 En dimension finie

Commençons par rappeler quelques résultats en dimension finie. Cela donnera une intuition du phénomène et pourra être comparé aux résultats qui suivent concernant les EDP d'évolution. On s'intéresse à l'équation différentielle ordinaire (EDO):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x &= F(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz. On sait alors que cette EDO est bien posée dans \mathbb{R}^n .

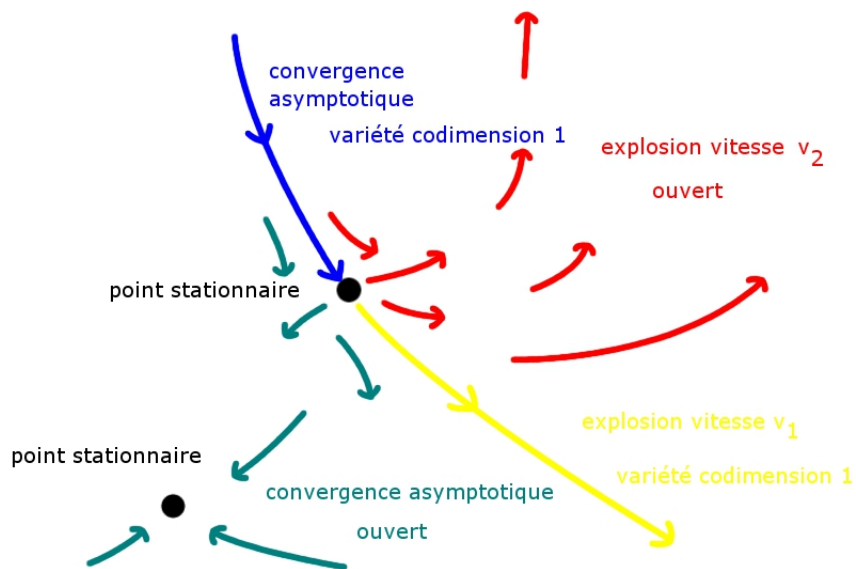
Si F est une application linéaire, alors la solution du problème s'écrit: $x(t) = e^{tF}(x_0)$. On a donc existence globale. Les explosions pour les EDO sont donc un phénomène non-linéaire. L'exemple typique est l'équation $\frac{d}{dt}x = x^p$ pour $p > 1$ et x positif. La solution s'écrit alors sous la forme $x(t) = \frac{C}{(T-t)^{\frac{1}{p-1}}}$ où C et T dépendent de x_0 , T étant clairement le temps maximal d'existence.



Dans le cas général, x explose au temps T si $\|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow T} +\infty$ pour n'importe quelle norme sur \mathbb{R}^n (sinon par compacité il y aurait un point limite x_T avec lequel on pourrait prolonger la solution).

Les questions classiques sont alors: quel est le comportement asymptotique de $x(t)$? A quelle vitesse la norme $\|x(t)\|$ tend-elle vers $+\infty$? En couplant cette étude des explosions à l'étude des autres phénomènes possibles (solutions stationnaires, périodiques, stabilité etc...), on veut pouvoir dresser le portrait de phase de l'équation. C'est-à-dire caractériser les ensembles de données initiales amenant à chacun des comportements possibles.

Afin d'éclairer un lecteur néophyte, voici un exemple de portrait de phase pour une EDO:



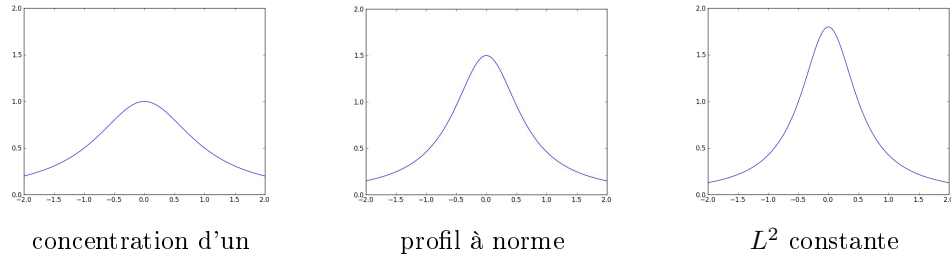
0.3 En dimension infinie: les EDP d'évolution

Certains aspects de la dimension finie s'adaptent, mais d'autres problématiques voient le jour. Dans la suite, les espaces de Banach dans lesquels on étudie les solutions sont des espaces de fonctions sur des ouverts de \mathbb{R}^n .

Les explosions sont là aussi un phénomène non-linéaire. Si une équation linéaire est bien posée au sens donné dans la section 0.1, il est assez aisé de voir que toutes les solutions sont globales.

Les normes ne sont plus équivalentes entre elles. L'espace fonctionnel sur lequel on se place pour étudier les solutions influence l'existence de certains phénomènes. Par exemple, certains espaces possèdent des solutions stationnaires et d'autres non. Il faut donc trouver la topologie adéquate pour étudier les explosions. Celle-ci est donnée par la notion d'énergie. Souvent les EDP en physique comme en mathématiques sont intimement reliées à certaines fonctionnelles sur des espaces de fonction. C'est le cas notamment des systèmes hamiltoniens ou bien des flots de gradients de fonctionnelles. Il existe le plus souvent un espace de Banach où la fonctionnelle en question est naturellement définie: c'est sur cet espace et avec sa topologie que l'on souhaite étudier les explosions. Les trois équations présentées dans la partie 0.5 possèdent ainsi un espace d'énergie naturel.

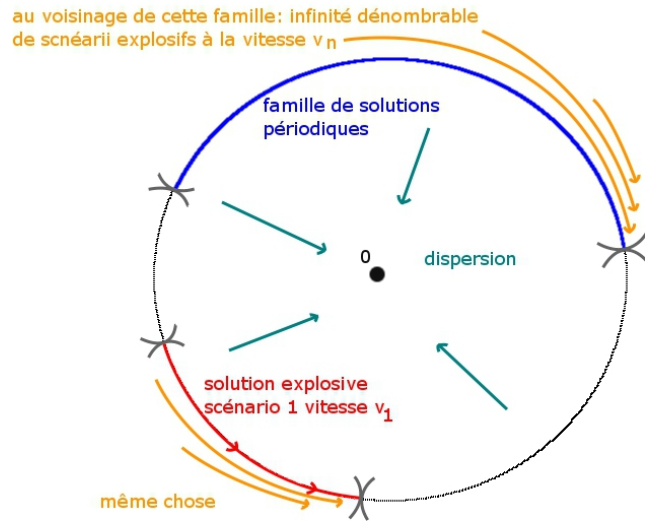
La compacité des suites bornées est également fautive en dimension infinie. La



solution peut alors exploser sans que sa norme, elle, n'explose. Dans les espaces L^p , cette perte de compacité pour $u(t)$ peut s'expliquer par la concentration d'un profil en un point par exemple (voir ci-dessus).

Nous sommes en train de voir que les scénarii explosifs peuvent être très différents les uns des autres: on veut pouvoir les classifier. Puis, on souhaite savoir comment évoluent asymptotiquement les paramètres liés à cette explosion (normes, paramètre d'échelle si concentration d'un profil, ensemble de points au voisinage desquels une énergie se concentre). Une fois que l'on a bien compris les phénomènes explosifs et décrit les ensembles de données initiales les engendrant, il reste à coupler cette étude avec les études d'autres phénomènes (dispersion, solutions stationnaires etc...) afin de dresser le portrait de phase de l'équation. En voici un exemple (la distance au centre représente la norme):

pour une masse plus grande: plusieurs combinaisons de ces comportements sont possibles



X perte de compacité

0.4 Les enjeux du domaine actuellement et quelques repères historiques

philosophie du domaine en ce moment A l'heure actuelle, les recherches portent sur:

- Des équations non-linéaires assez simples. Les explosions sont pour l'instant toujours difficiles à traiter, les équations de la mécanique des fluides sont donc peu abordées.
- La mise au jour de phénomènes généraux. Les explosions semblent en effet posséder une certaine structure, notamment dans la manière dont peuvent se concentrer les solutions. Nous verrons que la concentration de l'énergie en un point est liée à la concentration d'un profil spécifique, et que ceci se retrouve dans toutes les équations étudiées. L'article écrit par Martel et Raphael pour la gazette des mathématiciens [9] est une bonne introduction à ce sujet. Ce problème du comportement de l'énergie d'une solution est lié à l'évolution (la croissance) des normes de Sobolev pour la solution d'une EDP d'évolution non-linéaire, dont on peut citer en référence les travaux de Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka et Tao [2] par exemple.
- La mise au point de techniques robustes. Les équations étudiées peuvent être paraboliques, hyperboliques... Mais il ne faut pas que les outils dépendent des propriétés particulières de celles-ci.

quelques notions d'histoire Le problème de savoir si une EDP d'évolution admet ou non des solutions explosives est un vieux problème. L'exemple le plus connu est celui des équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides. Dans les années 30, Leray prouve l'existence locale de solutions à ces équations [7]. En dimension 2, soit un fluide dans le plan, les solutions sont en fait globales. En dimension 3 en revanche, il conjecture qu'il existe des profils explosifs particuliers et d'énergie bornée: des solutions auto-similaires. Nečas, Růžička et Šverák ont prouvé dans les années 90 [12] que de telles solutions explosives n'existent pas. A l'heure actuelle, l'existence de solutions explosives est toujours un problème ouvert, mis à prix par le Clay Institute. La description du problème par Fefferman [4] pour cet institut est une bonne introduction.

Les explosions attirent l'attention dans la seconde partie du XXe siècle. Dans les années 60 et 70, des mathématiciens (Ball, Fukita, Glassey...) sont capables de prouver l'existence de solutions explosives. Ils utilisent notamment des arguments d'obstruction (une quantité liée à la solution tend vers $+\infty$ en temps fini, nous en reparlerons plus loin). Puis dans les années 70 et 80 débute vraiment la compréhension des phénomènes explosifs avec les travaux d'Alinhac et de John notamment. De nos jours ce domaine est devenu très actif et il y a un grand nombre de résultats récents concernant toute une palette d'EDP d'évolution.

0.5 Présentation des éléments de réponses et nouvelles problématiques

EDP étudiées Des résultats concernant beaucoup d'équations seront cités dans la suite. Le but n'est pas de faire une zoologie mais plutôt de mettre l'accent sur l'aspect universel de la problématique et de la démarche. Les trois équations qui reviendront le plus souvent sont l'équation de la chaleur non-linéaire (NLH), l'équation des ondes non-linéaires focalisante (NLW) et l'équation de Schrödinger non-linéaire focalisante (NLS), toutes sur \mathbb{R}^n . Elles s'écrivent:

$$\begin{cases} \partial_t u &= \Delta u + |u|^{p-1}u & (NLH) \\ & i\Delta u + i|u|^{p-1}u & (NLS) \\ \partial_{tt} u &= \Delta u + |u|^{p-1}u & (NLW) \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

où $p > 0$. Nous utiliserons dans le cas général la notation $\partial_t u = F(u)$ lorsque l'on ne voudra pas faire référence à une EDP d'évolution en particulier. Ce sont des prototypes d'équations non-linéaires obtenus en ajoutant une non-linéarité la plus simple possible: une puissance, à une équation linéaire étudiée et relativement bien comprise depuis longtemps.

Les fonctionnelles liées à ces EDP sont les suivantes. Pour (NLH), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ est une quantité décroissante le long des trajectoires. Pour (NLW), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int |\partial_t u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ est constante le long des trajectoires. Pour (NLS), $\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$ et la norme L^2 , $(\int |u|^2)^{\frac{1}{2}}$ sont constantes le long des trajectoires.

Ces fonctionnelles sont bien définies sur \dot{H}^1 lorsque p est sous-critique où critique vis à vis de l'injection de Sobolev $\dot{H}^1 \rightarrow L^{p+1}$. Dans la suite du papier ces équations seront étudiées dans $u \in H^1 \cap L^\infty$ pour (NLH), $(u, \partial_t u) \in \dot{H}^1 \times L^2$ pour (NLW) et $u \in H^1$ pour (NLS). Pour p sous-critique ou critique, ces équations sont bien posées dans ces espaces fonctionnels. Dans la suite, nous ferons référence à eux en tant qu'"espaces d'énergie".

Ces trois équations admettent une invariance d'échelle. Pour tout $\lambda > 0$ on note $u_\lambda : x \mapsto \lambda^{\gamma(n,p)} u(\lambda x)$. Alors pour chacune des équations, il existe un exposant $\gamma(n,p)$ tel que si u est la solution issue de u_0 , alors $u(\lambda t)_\lambda$ est la solution issue de $(u_0)_\lambda$. On pose alors $\Lambda(u) = \frac{d}{d\lambda}(u_\lambda)|_{\lambda=1}$.

existence d'explosion Montrer l'existence de solutions explosives à ces EDP d'évolution (et à d'autres EDP d'évolution non-linéaires étudiées dans le domaine actuellement) n'est en général pas le plus compliqué.

Parfois on connaît des solutions explosives explicites. Par exemple, la fonction constante égale à 1 explose pour (NLW). En prenant comme condition

initiale une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 sur une boule assez large, on obtient une solution explosive à cause de la vitesse finie de propagation de (NLW), et qui est dans n'importe quel espace fonctionnel usuel.

On peut également utiliser une fonctionnelle bien choisie $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ (où X est l'espace sur lequel l'équation est bien posée), telle que G tende vers $+\infty$ en temps fini pour certaines solutions, qui sont alors explosives. Pour (NLS) par exemple, la quantité $1/(\|x|u(t)|\|_{L^2})$ tend vers $+\infty$ en temps fini dans certains cas [6].

rôle des termes de l'équation Pour (NLH) et (NLW), on peut se demander si l'explosion n'est pas due simplement à la non-linéarité. C'est le cas parfois, par exemple si l'exposant p est sous-critique pour (NLH), Merle et Zaag ont montré dans [10] que toutes les solutions se comportaient asymptotiquement comme les solutions de l'EDO $\frac{d}{dt}u = u^p$.

En général l'explosion provient de la contribution des deux termes, linéaires et non linéaires. Pour (NLS) le constat est simple: la partie non-linéaire seule $\frac{d}{dt}u = i|u|^{p-1}u$ ne mène pas à une explosion, et la partie linéaire seule évidemment non plus.

Il s'agit donc de comprendre comment ces deux termes peuvent interagir. Nous allons donc dans la suite étudier des solutions à symétrie radiales. Cette symétrie enlève des difficultés techniques, et donne une symétrie aux explosions (symétrie radiale d'un éventuel profil limite, idem pour l'ensemble des points au voisinage desquels l'énergie se concentre).

les solitons L'interaction la plus simple entre la partie linéaire et la partie non linéaire est la possibilité d'avoir d'un profil stationnaire ou périodique. Pour certaines dimensions n et exposants p on a les résultats suivants:

- (NLS) admet une famille de solutions périodiques qui sont dans l'espace d'énergie. (une démonstration est disponible dans [15].
- (NLW), (NLH) et (NLS) admettent une famille (la même) de solutions stationnaires. Cependant, elle n'est dans l'espace d'énergie que pour (NLW).

Ce sont les premiers objets non-linéaires identifiables, souvent appelés solitons. Ce sont des profils qui ne sont pas altérés par l'EDP d'évolution. Ils sont obtenus en résolvant l'équation elliptique associée au problème: $F(Q) = 0$ ou $F(Q) = iQ$. Cette partie fait donc intervenir des outils et idées du calcul des variations, notamment en théorie des équations elliptiques, et des EDO (car dans le cas radial ces EDP se transforme en EDO).

profils asymptotiques Essayons d'avoir une intuition du phénomène avec (NLH). Si l'on considère une donnée initiale radiale positive u_0 qui atteint un

maximum local strict en 0. Alors pour des temps courts, la valeur $u(t, 0)$ va croître plus vite qu'en les autres points au voisinage, mais elle va aussi être diffusée dans ce même voisinage. $u(t)$ va donc conserver le fait que 0 est un maximum local. Supposons que $u(t, 0)$ explose au temps T . On veut alors savoir à quoi ressemble $u(t, x)$ pour (t, x) suffisamment proche de $(T, 0)$: en zoomant, peut-on voir un profil asymptotique?

Essayons un raisonnement un peu plus rigoureux avec (NLW): on suppose que u explose, mais que $\int |\nabla u|^2$ reste borné. La perte de compacité de $\nabla u(t)$ dans L^2 lorsque $t \rightarrow T^*$ s'explique alors par dilatation, translation ou concentration. Comme (NLW) admet une vitesse de propagation finie, la dilatation et la translation sont donc impossibles: la solution se concentre. En considérant une solution radiale, celle-ci se concentre forcément à l'origine.

Effectuons maintenant un calcul formel. L'existence d'un profil asymptotique pour u se traduit alors par le fait qu'il existe $\lambda(t)$ un paramètre, avec $\lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow T]{} 0$ et un profil ϕ tel que: $u_{\lambda(t)} \xrightarrow[t \rightarrow T]{} \phi$. Supposons $\lambda(t)$ différentiable. Après calculs, l'équation vérifiée par $u_{\lambda(t)}$ est alors sous la forme:

$$\partial_t(u_\lambda) = \frac{1}{\lambda^{\gamma_1}} F(u_\lambda) + \frac{1}{\lambda^{\gamma_2}} \frac{d}{dt}(\lambda) \Lambda(u_\lambda)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. On peut supposer que $\partial_t(u_\lambda)$ reste borné car $u_{\lambda(t)}$ converge, que $F(u_\lambda) \rightarrow F(\phi)$ et $\Lambda(u_\lambda) \rightarrow \Lambda(\phi)$. Comme $\lambda \rightarrow 0$ il faut des conditions sur $F(\phi)$, $\Lambda(\phi)$ et $\frac{d}{dt}\lambda$ pour que le membre de droite n'explose pas. On obtient ainsi les alternatives suivantes:

profil auto-similaire Si asymptotiquement $\frac{d}{dt}\lambda(t) \sim -\lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$, ce qui implique à la limite que $F(\phi) = K\Lambda(\phi)$ ou K est une constante de proportionnalité. ϕ est donc un profil explosif en lui même, puisqu'alors la solution de l'EDP issue de $u_0 = \phi$ est de la forme $u(t) = \phi_{\frac{1}{\lambda}}$ avec $\lambda \rightarrow 0$. De plus, λ vérifie $\frac{d}{dt}\lambda = -\lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$. Cette EDO est bien connue, et on connaît donc le comportement asymptotique de λ . Cette solution étant juste un profil auquel on fait subir un changement d'échelle, on l'appelle solution auto-similaire. De telles solutions sont obtenues en résolvant l'EDP $F(u) = K\Lambda(u)$.

profil asymptotique stationnaire Si la condition précédente n'est pas vérifiée, pour ne pas que le membre de droite n'explose il y a deux possibilités. Si $\frac{d}{dt}\lambda \gg \lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$ alors ϕ vérifie à la fois $F(\phi) = 0$ et $\Lambda(\phi) = 0$: ϕ est un profil stationnaire de l'équation qui ne voit pas les changements d'échelles. Si $\frac{d}{dt}\lambda \ll \lambda^{\gamma_2-\gamma_1}$ alors là encore $F(\phi) = 0$, ϕ est donc un profil stationnaire de l'équation.

Pour résumer ce calcul formel: on vient de distinguer le régime explosif auto-similaire, une solution qui s'auto-concentre avec un paramètre d'échelle admettant une vitesse précise, et d'autres régimes explosifs éventuels, ayant une vitesse de concentration différente.

Bien sûr, la concentration de plusieurs profils à des échelles différentes est possible. Et bien sûr, les vraies démonstrations de l'existence de profils asymptotiques sont plus compliquées que ce calcul formel. Un exemple de théorème de ce genre est établi dans [3] par Duyckaerts, Kenig et Merle:

Théorème 0.5.1. *On considère (NLW) sur \mathbb{R}^3 , avec $p = p^* - 1 = 4$. Soit u une solution telle que: u est radiale, explosive, et la quantité $\int |\nabla u|^2 + \int |\partial_t u|^2$ reste bornée. Alors u se décompose asymptotiquement en la somme d'une partie non singulière v et d'un nombre fini de solutions stationnaires de (NLW) à des échelles distinctes.*

dynamique près de la famille de solitons Nous venons d'expliquer pourquoi les solitons sont au coeur de la concentration de l'énergie et du phénomène explosif: ils sont les profils asymptotiques de certaines solutions explosives. Mais en eux même ils sont des solutions globales. On remarque que ces familles sont invariantes par changement d'échelle: en notant Q un de leurs éléments, pour $\lambda > 0$ Q_λ est encore une solution stationnaire ou périodique. On veut donc savoir si l'EDP d'évolution permet de remonter la branche $(Q_\lambda)_{\lambda>0}$ vers $\lambda = 0$, ce qui correspond au fait de faire exploser une bulle de soliton. Cette question est très importante et l'étude de la dynamique de ces EDP d'évolution autour des familles de solitons est actuellement très active.

Stabilité

On veut déterminer si en partant près de la famille de solitons, on reste près de cette famille de solitons. C'est parfois le cas, voici pour exemple le théorème de stabilité orbitale de la famille de solitons pour (NLS) L^2 -sous critique [1]:

Théorème 0.5.2. *On considère (NLS), on suppose $n \geq 1$ et $1 < p \leq 1 + \frac{4}{n}$. On note Q un élément de la famille de solitons.*

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\|u_0 - Q\|_{H^1} \leq \delta(\epsilon)$, alors pour tout $t < T^$ il existe $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma(t) \in \mathbb{R}$ tels que:*

$$\|u(t, x) - Q(x - x(t))e^{i\gamma(t)}\| \leq \epsilon$$

explosion par concentration d'un soliton

La concentration d'un soliton est-elle possible? Comme l'on sait que l'énergie est conservée ou décroissante, le cas conceptuellement le plus simple est celui énergie critique. Cela signifie que l'exposant $p = p_c$ est tel que les changements d'échelle n'affectent pas l'énergie: $\int |\nabla u_\lambda|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u_\lambda|^{p+1} = \int |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int |u|^{p+1}$. Pour ces trois équations $p_c = p^* - 1$ où p^* est l'exposant critique des injections de Sobolev. On veut alors savoir si en partant au voisinage de la famille de solitons $(Q_\lambda)_{\lambda>0}$ dans la topologie de l'espace d'énergie, on peut remonter cette branche avec $\lambda \rightarrow 0$ en temps fini.

Schweyer a montré par exemple récemment [14]:

Théorème 0.5.3. *On considère (NLH) sur \mathbb{R}^4 , avec $p = p^* - 1$. Alors il existe des solutions explosives concentrant un soliton aussi proches que l'on veut de la*

famille de solitons. De plus le paramètre λ admet l'asymptotique:

$$\lambda(t) \sim \frac{T^* - t}{\log(T^* - t)^2}$$

Portrait de phase

On a pas toujours stabilité de la famille de solitons. Dans ce cas là il est intéressant de dresser la liste de tous les comportements possibles près de cette famille. Par la suite, on veut également pouvoir caractériser topologiquement les ensembles de données initiales amenant à chacun des comportements possibles. L'identification des comportements au voisinage de la famille de soliton a récemment été accomplie par Martel, Merle et Raphael pour l'équation de Korteweg de Vries généralisée [8]:

Théoreme 0.5.4. *Il existe un voisinage V de la famille de solitons tel que pour tout $u_0 \in V$ on soit forcément dans l'un des trois scénarii suivants:*

sortie la solution u sort de V en temps fini

explosion la solution u concentre un soliton

convergence la solution u converge asymptotiquement vers un soliton.

problématiques liées La liste des thématiques d'études présentée précédemment n'est pas exhaustive. On peut s'intéresser au cumul de certains comportements. Par exemple Merle montre dans [11] que l'on peut concentrer k solitons en k points de \mathbb{R}^n . Il est également intéressant de se demander si les résultats établis plus haut sont résistants à des perturbations de l'EDP d'évolution, comme des perturbations de la métrique, des perturbations de la non-linéarité. Dans [5] par exemple les auteurs s'intéressent à cette problématique. Enfin, la concentration de l'énergie peut se produire sur un ensemble de points plus complexe qu'un singleton. Dans [13] Raphael montre l'existence d'une explosion sur une sphère.

0.6 notations et annexe

Définition 0.6.1. *On note $a(t) \ll b(t)$ si $\lim_{t \rightarrow T} \frac{a(t)}{b(t)} = 0$*

Définition 0.6.2. *L^p désigne l'espace de Lebesgue usuel, H^1 l'espace de Sobolev usuel. $\dot{H}^1 = \{u \text{ distribution}, \nabla u \in L^2\}$ muni de la norme $\|u\|_{\dot{H}^1} = \|\nabla u\|_{L^2}$.*

Lorsque nous avons évoqué la vitesse de propagation finie de (NLW) c'est par rapport au résultat suivant:

Théoreme 0.6.1. *Soit $B := B(x_0, R)$ la boule de centre x_0 de rayon R . On pose K le cône défini par: $K = \{(t, x), 0 \leq t \leq R \text{ et } |x - x_0| \leq R - t\}$.*

On suppose que u et v sont deux solutions lisses de (NLW) de temps d'existence

au moins égal à R , issues respectivement de u_0 et v_0 .

Alors si $u_0 = v_0$ sur B , $u = v$ sur K .

Bibliography

- [1] Lions P. Cazenave. Orbital stability of standing waves for some nonlinear schrödinger equations. *Communications in Mathematical Physics*, pages 549–561, 1982.
- [2] Keel M. Staffilani G. Takaoka H. Tao T. Colliander, J. Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear schrödinger equation. *Inventiones mathematicae*, 2010.
- [3] Kenig C. Merle F. Duyckaerts, T. Profiles of bounded radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. *Geometric and Functional Analysis*, 2012.
- [4] C. Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. *The millennium prize problems*, 2000.
- [5] Papanicolaou G. Fibich, G. Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear schrödinger equation in critical dimension. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1999.
- [6] R.T. Glassey. On the blowing up of solutions to the cauchy problem for nonlinear schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, page 1794–1797, 1977.
- [7] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissent l’espace. *Acta Math.*, 1934.
- [8] Merle F. Raphael P. Martel, Y. Blow up for the critical gkdv equation i: dynamics near the soliton. *preprint*, 2012.
- [9] P. Martel, Y. et Raphael. Sur la dynamique des solitons: stabilité, collision et explosion. *Gaz. Math*, 2009.
- [10] Zaag H. Merle, F. Ode type behavior of blow-up solutions of nonlinear heat equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, pages 435–450, 2002.
- [11] F. Merle. Construction of solutions with exactly k blow-up points for the schrödinger equation with critical nonlinearity. *Communications in mathematical physics*, 1990.

- [12] Růžička M. Šverák V. Nečas, J. On leray's self-similar solutions of the navier-stokes equations. *Acta Mathematica*, 1996.
- [13] P. Raphaël. Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for an l^2 -supercritical nonlinear schrödinger equation. *Duke Mathematical Journal*.
- [14] R. Schweyer. Type ii blow-up for the four dimensional energy critical semi linear heat equation. *Journal of Functional Analysis*, 2012.
- [15] T. Tao. Nonlinear dispersive equations. local and global analysis. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 106, 2006.